

CHAPITRE

FAMILLES SOMMABLES

Préambule

En tant que série alternée la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente, par divergence de la série harmonique. On peut montrer que la somme de cette série est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ (à savoir faire !). Si on réorganise l'ordre des termes de la somme de la série en sommant deux fois plus vite les termes d'indice pair que les termes d'indice impair, on obtient $-\frac{\ln 2}{2}$.

On souhaite introduire une définition de la convergence qui exclut ce genre de situation et qui assure que la sommation donne le même résultat quel que soit l'ordre choisi.

On prolonge donc dans ce chapitre les calculs de sommes finies, de sommes de séries convergentes, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer en vrac une famille infinie.

Dans ce contexte, on sera amené à sommer des familles de nombres qui ne sont plus forcément indexées par $\mathbb{N}$ mais par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$. L'ensemble sur lequel on somme est au plus dénombrable (cf. l'année prochaine).

Dans tout ce chapitre I un ensemble quelconque non vide.

I Famille sommable de nombres réels positifs

On commence par les processus sommatoires de nombres positifs qui permettent de s'affranchir de bon nombre de précautions (on se permet d'ailleurs de sommer $+\infty$).

Notation. Rappelons que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ noté aussi $[-\infty, +\infty]$ et $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ noté aussi $[0, +\infty]$.

Remarques (Sur $\overline{\mathbb{R}}$)

- **Relation d'ordre** La relation d'ordre $\leq$ est totale sur $[0, +\infty]$ et permet de définir comme dans $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ les notions de partie majorée/minorée, de plus grand/plus petit élément et de borne supérieure et inférieure.
Le théorème de la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ que énonce que toute partie non vide A de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure notée $\sup A$ et qui peut valoir $+\infty$.
- **Opérations** L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne dans $[0, +\infty]$.
Les résultats des opérations sont naturelles. Pas de problème pour l'addition (dans $[0, +\infty]$, le problème $(+\infty) + (-\infty)$ ne se rencontre pas).
Pour la multiplication,

$$0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0.$$

Dans toute cette section, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On peut donc avoir un $i \in I$ tel que $u_i = +\infty$.

Définition (Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. La somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est définie par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i / F \subset I \text{ tel que } F \text{ est fini} \right\}.$$

Exemple. $\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{ij} = +\infty.$

Définition (Famille sommable)

- 1) **Famille sommable** Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est sommable si l'ensemble des $\sum_{i \in F} u_i$, pour F parcourant les parties finies de I est majorée dans $\mathbb{R}$ ce qui est équivalent à

$$\sum_{i \in I} u_i < +\infty.$$

- 2) **Nature d'une famille** La nature d'une famille est son caractère sommable ou non.

Exemples.

- 1) **Somme finie** Dans le cas où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ est un ensemble fini, alors

$$\sum_{i \in I} u_i = u_{i_1} + \dots + u_{i_p}.$$

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si tous les u_i sont réels.

- 2) **Séries numériques** Si $I = \mathbb{N}$ et si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty[$ alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i \geq 0} u_i$ converge. Dans ce cas

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

En cas de divergence de la série, on a

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = +\infty \quad \text{que l'on peut écrire} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} u_i = +\infty.$$

Théorème (Invariance de la somme par permutation)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et σ une permutation de I (bijection de I vers I). Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}.$$

Les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ ont donc même nature.

Propriétés (Linéarité de la somme)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$1) \sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

$$2) \sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i.$$

Exercice. Montrer que $\sum_{n \in 2\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Propriétés (Croissance)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$.
On suppose que : $\forall i \in I, u_i \leq v_i$. Alors :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

Conséquence : si de plus $(v_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Propriétés (Sous-famille)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ et $J \subset I$.
Alors :

$$\sum_{j \in J} u_j \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

Conséquence : si de plus $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(u_j)_{j \in J}$ est sommable.

L'outil principal de calcul de somme est le théorème de sommation par paquets.

Théorème (Sommation par paquets)

Soient

- $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$
- J un ensemble et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I .

Alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Théorème (Somme sur un produit : théorème de Fubini positif)

Soient I et J deux ensembles et soit (u_{ij}) une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right).$$

Exercice.

- 1) Calculer $\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^2 2^j}$.
- 2) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$ où $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$.
- 3) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

II Famille sommable de nombres complexes

Définition (Famille sommable)

- Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est sommable si la famille positive $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable c'est-à-dire si

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty.$$

- On note $l^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indexées par I .

Définition (Somme d'une famille réelle)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels sommable.

Pour tout $i \in I$ on définit

$$u_i^+ = \max(0, u_i) \quad u_i^- = \max(0, -u_i) \quad \text{de sorte que} \quad u_i = u_i^+ - u_i^-.$$

Alors $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont des familles positives sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Définition (Somme d'une famille complexe)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de complexes sommable.

Alors $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont des familles de réels sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

Dans ce cas, on a donc

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{i \in I} u_i \right) = \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i).$$

Exemples.

- 1) Une famille finie de nombres complexes est toujours sommable.
- 2) Dans le cas d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument.
Dans le cas de convergence absolue, on a alors,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Propriétés (Approximation par une somme finie)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{C}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $F \subset I$ finie telle que

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Les résultats vus précédemment dans le cas de famille de réels positifs, s'adaptent aux familles de complexes. Si dans le cas des familles de réels positifs, les résultats sont toujours valides, dans le cas de familles de complexes, il ne s'appliquent qu'après avoir démontré que les familles sont sommables.

Théorème (Invariance de la somme par permutation)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{C}$ et σ une permutation de I (bijection de I vers I). Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}.$$

Les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ ont donc même nature.

Exemple. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série complexe convergeant absolument. Alors quelle que soit la permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Propriétés (Comparaison)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$ et $(v_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty[$ vérifiant

$$\forall i \in I, \quad |u_i| \leq v_i.$$

Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille (u_i) l'est aussi.

Propriétés (Sous-famille)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{C}$ et $J \subset I$.

Alors $(u_j)_{j \in J}$ est sommable.

Propriétés (Linéarité de la somme)

Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux **familles sommables** d'éléments de $\mathbb{C}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i.$$

Théorème (Somme par paquets)

Soient

- $(u_i)_{i \in I}$ une **famille sommable** d'éléments de $\mathbb{C}$
- J un ensemble et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I .

Alors

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i.$$

Théorème (Théorème de Fubini)

Soient I et J deux ensembles et soit (u_{ij}) une **famille sommable** d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right).$$

Exercice.

- 1) Etudier la somme $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} \frac{x^n p^n}{n! p!}$.
- 2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $(z^{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.
- 3) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
- 4) Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$.

Théorème (Somme double factorisée)

Soient I et J deux ensembles, (u_i) et (v_j) deux **familles sommables** d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right).$$

Exercice. Soit $q \in]-1, 1[$. Montrer que la famille $\left(\frac{q^{n+p}}{n!} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable calculer $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} \frac{q^{n+p}}{n!}$.

Théorème (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes.

On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}.$$

Alors $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Exercice

- 1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. La somme de cette série est e^z .
Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $e^{a+b} = e^a e^b$.
- 2) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.