

Problème

Notations

Dans tout le problème, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices dont la diagonale est nulle.

On note $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle.

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls excepté celui qui se trouve à la ligne i et à la colonne j et qui vaut 1.

On rappelle que le symbole de Kronecker est défini par : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

On définit les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme (S) par :

$$M \text{ est de la forme (S)} \iff \exists (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, M = XY - YX$$

On désigne par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

Enfin, on rappelle qu'un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f = \lambda \text{ id}$.

Un des objectifs du problème est de démontrer que :

$$M \text{ est de la forme (S) si et seulement si } M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}).$$

I-Préliminaires

1) Quelques dimensions. Aucune preuve n'est demandée pour cette question.

- a- Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel et en donner une base.
- b- Vérifier que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.
- c- Vérifier que $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.
- d- Vérifier que $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.

2) Caractérisation des homothéties. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

- a- Montrer que si f est une homothétie, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x))$ est une famille liée.
- b- Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x))$ est une famille liée. Montrer que f est une homothétie.

II-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$

Dans cette partie, nous allons démontrer que toute matrice de $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme (S).

Soit $n \geq 1$, on considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

et on définit l'application L de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$L : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A_n M - M A_n \end{matrix}$$

1) Démontrer que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 2) -a- Montrer que pour tous $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
 -b- En déduire $L(E_{i,j}) = (i-j)E_{i,j}$ pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- 3) -a- Montrer à l'aide de la question précédente que $\text{Im}(L) = \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$.
 -b- Montrer que $\text{Ker}(L) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser avec profit le théorème du rang.
 -c- En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(L) \oplus \text{Im}(L)$.
- 4) Démontrer que : $\forall M \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), \exists ! X \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), M = A_n X - X A_n$.

III-Lien entre $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 1$, dans cette partie nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{H}_n : \text{''}\forall M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ tel que } P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})\text{''}$$

- 1) Démontrer que \mathcal{H}_1 est vraie.
 On prend à présent $n \geq 2$ et l'on suppose que \mathcal{H}_{n-1} est vraie. Prenons une matrice $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ et essayons de montrer que \mathcal{H}_n est vraie.
- 2) Traiter le cas où M est la matrice nulle. On suppose dans toute la fin de cette partie que M n'est pas la matrice nulle et on note φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique est M .
- 3) -a- Démontrer que φ n'est pas une homothétie.
 -b- Montrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(u_1, \varphi(u_1))$ soit une famille libre.
 -c- On note $u_2 = \varphi(u_1)$, justifier l'existence de $n-2$ vecteurs de \mathbb{R}^n : u_3, \dots, u_n tels que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ soit une base de \mathbb{R}^n .
- 4) On note M' la matrice de φ dans la base \mathcal{C} .
 -a- Quelle est la première colonne de M' ?
 -b- On note P_1 la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} , quelle relation a-t-on entre M, M' et P_1 ?
- 5) On décompose M' en blocs : $M' = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & W \end{pmatrix}$ où $U \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}), V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.
 -a- Montrer que $M' \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.
 -b- En déduire que $W \in \mathcal{T}_{n-1}^0(\mathbb{R})$, puis qu'il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}WQ \in \mathcal{D}_{n-1}^0(\mathbb{R})$.
- 6) On considère la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q \end{pmatrix}$ où $0_{1,n-1}$ et $0_{n-1,1}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ respectivement.
 En cherchant une matrice inverse de P_2 par blocs, montrer que P_2 est inversible et donner P_2^{-1} .
- 7) On note $P = P_1 P_2$, démontrer que $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$. En déduire \mathcal{H}_n .

IV-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

On en vient au coeur du problème où l'on va démontrer que :

$$M \text{ est de la forme } (S) \text{ si et seulement si } M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$$

- 1) Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de la forme (S) , $(X', Y') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $M' = X'Y' - Y'X'$. On considère M semblable à M' et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$.
 -a- Montrer que M est aussi de la forme (S) et donner deux matrices $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ en fonction des précédentes telles que $M = XY - YX$.
 -b- Justifier que $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ si et seulement si M est de la forme (S) .
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base

canonique est M .

- a- Trouver une base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathcal{D}_3^0(\mathbb{R})$.
- b- Exhiber deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = XY - YX$.

E-Matrices nilpotentes et trace.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est nilpotente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_n$. On note \mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de démontrer que $\text{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

- 1) -a- Parmi les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont nilpotentes?
-b- Démontrer que si $n \geq 2$, \mathcal{N} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$, démontrer que $M \in \text{Vect}(\mathcal{N})$.
- 3) On considère une matrice M nilpotente d'indice n , c'est-à-dire que $M^n = 0_n$ et $M^{n-1} \neq 0_n$ et on note φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M .
 - a- Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{n-1}(u))$ soit une base de \mathbb{R}^n .
 - b- En déduire que $\text{tr}(M) = 0$.
- 4) Démontrer dans le cas général qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.
- 5) Démontrer le résultat annoncé au début de cette partie.

Problème. Transposition

Facultatif - N'est pas à rendre

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{K} .

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E , $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on note E^* l'ensemble des formes linéaires de E .

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\varphi \in E^*$, on note $f^\top(\varphi) = \varphi \circ f$.

L'application $f \mapsto f^\top$ est appelée transposition de $\mathcal{L}(E)$.

- 1) -a- Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^*)$.
-b- Montrer que cette application est linéaire.
-c- Montrer que cette application est un isomorphisme.
- 2) Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(f \circ g)^\top = g^\top \circ f^\top$.
- 3) -a- Identifier l'application $(\text{Id}_E)^\top$.
-b- Soit $f \in \text{GL}(E)$. Montrer que $f^\top \in \text{GL}(E^*)$ et que $(f^\top)^{-1} = (f^{-1})^\top$.
-c- Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^\top \in \text{GL}(E^*)$. Montrer que $f \in \text{GL}(E)$.
- 4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

-a- Pour tout $1 \leq i \leq n$, montrer qu'il existe une unique application $e_i^* \in E^*$ tel que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

-b- Montrer que $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* . \mathcal{B}^* s'appelle la base duale de \mathcal{B} .

-c- Montrer que, pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$$

-d- Soit f un endomorphisme de E , de matrice A dans une base \mathcal{B} de E .
Montrer que la matrice de f^\top dans la base \mathcal{B}^* est A^\top .

5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^\top)$.

6) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{tr}(f) = \text{tr}(f^\top)$.

7) Soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ une base de E^* .

-a- En considérant l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = (e_1^*(x), \dots, e_n^*(x))$, montrer qu'il existe (e_1, \dots, e_n) une base de E vérifiant

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

\mathcal{B} s'appelle la base antéduale de \mathcal{B}^* .

-b- Soit f un endomorphisme de E tel que la matrice de f^\top dans la base \mathcal{B}^* soit A . Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est A^\top .