**Exercice 5**. ($\heartsuit$) Soit $F$ l'ensemble des applications de la forme $x \mapsto P(x)\cos x + Q(x)\sin x$ où $P$ et $Q$ sont des fonctions polynomiales de degré au plus 2. Montrer que $F$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

**Correction -** $F$ est l'espace vectoriel engendré par les six fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \cos x \qquad f_2 : x \mapsto x\cos x \qquad f_3 : x \mapsto x^2\cos x \qquad f_4 : x \mapsto \sin x \qquad f_5 : x \mapsto x\sin x \qquad f_6 : x \mapsto x^2\sin x.$$

On montre que la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ une famille de réels telle $\sum_{i=1}^{6} f_i = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1\cos x + \lambda_2 x\cos x + \lambda_3 x^2\cos x + \lambda_4\sin x + \lambda_5 x\sin x + \lambda_6 x^2\sin x = 0.$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\cos x + (\lambda_4 + \lambda_5 x + \lambda_6 x^2)\sin x = 0.$$

En prenant $x = 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, on obtient $(\lambda_1 + \lambda_2(2k\pi) + \lambda_3(2k\pi)^2)$ donc le polynôme $\lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2$ admet une infinité de racines, il est donc nul et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
De même, en prenant $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, on montre que le polynôme $\lambda_4 + \lambda_5 X + \lambda_6 X^2$ admet une infinité de racines, il est donc nul et donc $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$.
Donc la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ est libre.
C'est donc une base de $F$ et donc $\boxed{\dim F = 6}$.

**Exercice 7**. ($*$) Soit $E$ un espace-vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Déterminer, si les familles suivantes forment une base de $E$:

1) $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$
2) $\mathcal{F}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$
3) $\mathcal{F}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.

**Correction -** Notons tout d'abord que $\dim E = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n$.

1)
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) = n = \dim E$.
- On fait $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1+e_2, \dots, e_1+e_{n-1}, e_1+e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) = E$. Donc $\mathcal{F}_1$ engendre $E$.
- D'après le théorème de caractérisation des bases, $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E}$.

2) $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{Card}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n) = n - 1 \neq \dim E$. Donc $\boxed{\mathcal{F}_2 \text{ n'est pas une base de } E}$.

3)
- $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = n = \dim E$.
- Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2(e_2 + e_3) + \cdots \lambda_{n-1}(e_{n-1} + e_n) + \lambda_n(e_n + e_1) = 0_E$.

  Alors: $(\lambda_1 + \lambda_n)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)e_n = 0_E$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une libre alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases}$.

  En remontant, $\lambda_{n-1} = -\lambda_n$, $\lambda_{n-2} = -\lambda_{n-1} = +\lambda_n$, et de proche en proche, $\lambda_1 = (-1)^{n-1}\lambda_n$. On injecte dans l'équation (1), $(1 + (-1)^{n-1})\lambda_n = 0$.

  - Si $n$ est impair, alors la dernière équation donne $2\lambda_n = 0$ donc $\lambda_n = 0$. De proche en proche, $\lambda_1 = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
    D'après le théorème de caractérisation des bases, $\boxed{\mathcal{F}\text{‘ est une base de } E}$.
  - Si $n$ est pair, alors la dernière équation donne $0 = 0$. Le système admet donc une infinité de solution (avec le paramètre $\lambda_n$) donc la famille $\mathcal{F}_3$ est liée. Donc $\mathcal{F}_3$ n'est pas une base de $E$.

  Conclusion, $\boxed{\mathcal{F}_3 \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } n \text{ est impair}}$.

**Exercice 9**. ($\heartsuit$) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ /2x - y + z + t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}^4$.

**Correction -** $F$ est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \mapsto & 2x - y + z + t \end{array}$, non nulle (car $\varphi(1, 0, 0, 0) = 2 \neq 0$) donc $F$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
$u = (1, 0, 0, 0) \notin F$, d'après une caractérisation des hyperplans alors $\boxed{\mathrm{Vect}(u) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4}$.

**Exercice 10**. ($\heartsuit$) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ /2x - y + z + t = 0 \text{ et } x - 3z - t = 0\}$

1) Montrer que $F$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base et la dimension.

2) Déterminer un supplémentaire de de $F$ dans $\mathbb{R}^4$.

**Correction -**

1) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3z+t) + z + t \\ x = 3z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7z + 3t \\ x = 3z + t \end{cases}.$$
Donc
$$F = \{(3z + t, 7z + 3t, z, t) \ /(z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{où } u_1 = (3, 7, 1, 0) \quad u_2 = (1, 3, 0, 1).$$
Donc $(u_1, u_2)$ engendre $F$ de plus est libre car les vecteurs ne sont pas proportionnels donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim F = 2}$.

2) On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z = t = 0\}$ alors $(e_1, e_2)$ engendre $G$ et est libre donc est une base de $G$ donc $\dim G = 2$.
On a déjà $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Reste à prouver (par exemple) que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
$$(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z - t = 0 \\ 2x - y + z + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t = 0.$$
Donc $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0\}$.
Par caractérisation des supplémentaires $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^4}$.

**Exercice 11**. ($\heartsuit$) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}'(1) = 0\}$.
Montrer que $G = \mathrm{Vect}(X + 1, X^2 + 1)$ est un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

**Correction -** On pose $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$,
$$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = -3a - 2b \end{cases}.$$
Donc $F = \{aX^3 + bX^2 - 3aX - 2bX \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^3 - 3X, X^2 - 2X)$.
La famille $\mathcal{B} = (X^3 - 3X, X^2 - 2X)$ engendre $F$ et est libre car les polynômes ne sont pas proportionnels, donc c'est une base de $F$.
Puis $\mathcal{B}' = (X + 1, X^2 + 1)$ est une base de $G$ (engendre et libre car polynômes non proportionnels).
Trois méthode pour montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

**Méthode 1:** on montre que la concaténation $\mathcal{C}$ des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (en montrant "bon cardinal et génératrice").
$\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Puis
$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}) &= \mathrm{Vect}(X^3 - 3X, X^2 - 2X, X + 1, X^2 + 1) \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_2 - C_3 \\ &= \mathrm{Vect}(X^3 - 3X, X^2 - 2X, X + 1, X) \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_4, \ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_4, \ C_1 \leftarrow C_1 + 3C_4 \\ &= \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3 == \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
Donc d'après le théorème de caractérisation des bases $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Et donc $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]}$.

**Méthode 2 :** on montre que la concaténation $\mathcal{C}$ des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ à l'aide du rang. On utilise la base $(X^3, X^2, X, 1)$,
$$\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} C_4 \leftarrow C_4 - C_2 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3 = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4.$$
Donc $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \dim \mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$ donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]}$.

**Méthode 3 :** on montre l'égalité des dimension et l'intersection égale au neutre.
Tout d'abord $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.
Puis on montre que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ par double inclusion.

$\supset$ : découle du fait que $F$ et $G$ sont des sev de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\subset$ : soit $P \in F \cap G$, comme $P \in G$ alors $P = a(X + 1) + b(X^2 + 1)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Puis $P \in F$ donc $\begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ donc $a = b = 0$ donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On a donc bien $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$. Et donc par caractérisation des supplémentaires en dimension finie $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]}$.

**Exercice 13.** ($\heartsuit$) Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 5 tels que $\dim F = \dim G = 3$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

**Correction -** D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 6 - \dim(F \cap G)$.
Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel d'un ev de dimension 5, donc $\dim(F+G) \leqslant 5$, donc $6 - \dim(F \cap G) \leqslant 5$ c'est-à-dire $\dim(F \cap G) \geqslant 1$.
On a donc bien $\boxed{F \cap G \neq \{0\}}$.

**Exercice 15.** ($\heartsuit$) Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, y+z, y+z) \end{array}$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

2) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

**Correction -**

1) 
- On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,1),(0,1,1)) \\ &= \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{aligned}$$

  où $\varepsilon_1 = (1,0,0)$ et $\varepsilon_2 = (0,1,1)$. Or $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre car les vecteurs $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ ne sont pas proportionnels. Donc $\boxed{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$
- Donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{Card}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ c'est-à-dire $\boxed{\operatorname{rg} f = 2}$.
- D'après le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$.
  Puis d'après les calculs de Im, $f(e_2) = f(e_3)$ c'est-à-dire $f(e_2 - e_3) = (0,0,0)$. Donc $e_2 - e_3 \in \operatorname{Ker} f$. On pose $\varepsilon_3 = e_2 - e_3$.
  $(\varepsilon_3)$ est libre, car $\varepsilon_3 \neq (0,0,0)$, et contient $1 = \dim \operatorname{Ker} f$ élément donc $\boxed{(\varepsilon_3) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$.

2) Tout d'abord $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Il suffit de prouver $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f &= \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,1),(1,-1,0)) C_3 \leftarrow -C_3 + C_1 \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,1),(0,1,0)) C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)) \\ &= \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, il vient $\boxed{\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$.

**Exercice 16.** ($*$)Polynômes de Lagrange

1) Soient $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts et l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \end{array}$.

   -a- Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme.

   -b- En déduire que si $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.
   Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

2) Soient $a$ et $b$ deux réels distincts et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.
Adapter la méthode précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P(a) = \alpha \qquad P(b) = \beta \qquad P'(a) = \gamma \qquad P'(b) = \delta.$$

**Correction -**

1) -a-
- $\Phi$ est linéaire [...].
- $\Phi$ est injective : soit $P \in \mathbb{R}_[X]$,

$$P \in \operatorname{Ker} \Phi \Leftrightarrow \Phi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \Leftrightarrow P(x_0) = \ldots = P(x_n) = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  car le seul polynôme de degré au plus $n$ admettant $n+1$ racines est le polynôme nul. Donc $\operatorname{Ker} \Phi = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

- Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$, alors par caractérisation des automorphismes, $\Phi$ **est un automorphisme de** $\mathbb{R}_n[X]$.

-b- Comme $\Phi$ est bijective, on déduit que : $\boxed{\text{si } (y_0,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ il existe un unique } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = y_i.}$ $(\Phi(P) = (y_0,\dots,y_n))$.

2) Soient $a$ et $b$ deux réels distincts et $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$.
On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P(a) = \alpha \qquad P(b) = \beta \qquad P'(a) = \gamma \qquad P'(b) = \delta.$$

On adapte la méthode précédente en prouvant que l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(a), P(b), P'(a), P'(b)) \end{array}$$

est un automorphisme *(linéaire + injective + dim départ=dim arrivée), démonstration laissée au lecteur.*

**Exercice 18**. $(**)$ On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' \end{array}$.
Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

**Correction -** Tout d'abord $f$ est un endomorphisme [*laissé au lecteur*].
**Injectivité :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme nul vérifie $P + P' + P" = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Sinon $\deg P \geqslant 0$ alors $\deg(P') < \deg P$ et $\deg(P'') < \deg P$ donc $\deg(P + P' + P'') = \deg(P)$ donc $P + P' + P'' \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Donc le polynôme nul est le seul qui vérifie $P + P' + P'' = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

**Attention :** $f$ est un endomorphisme d'un ev qui n'est pas de dimension finie, l'injectivité ne suffit donc pas à prouver la bijectivité. Resterait à prouver la surjectivité. Il y a plus astucieux que d'étudier tout de suite la surjectivité de $f$ en déterminant un antécédent à un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Considérons $f_n$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $f$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet

- $f_n$ est linéaire car restriction de $f$ qui l'est
- $f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(f(P)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(P'), \deg(P'')) \leqslant n$.
- $f_n$ est injective car restriction de $f$ qui l'est ($\mathrm{Ker}\, f_n = \mathbb{R}_n[X] \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$)

Et donc comme $f_n$ est un endomorphisme en dimension finie alors par caractérisation des automorphismes, $f_n$ est un automorphisme.

Revenons à la surjectivité de $f$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $N = \deg Q$ alors $Q \in \mathbb{R}_N[X]$. Comme $f_N$ est bijective, posons $P \in R_N[X]$ tel que $Q = f_N(P) = f(P)$. Donc $f$ est surjective.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}[X]}$.

**Exercice 19**. $(\heartsuit)$ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

**Correction -** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.

- D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f$.
- $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$ car $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
  Inversement, soit $x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(x) = 0_E$ et il existe $u \in E$ tel que $x = f(u)$.
  Donc en composant par $f$, $f^2(u) = f(x) = 0_E$. En recomposant par $f$, $f^3(u) = f(0_E) = 0_E$.
  Puis, par hypothèse $f^3(u) = f(u)$ d'où $f(u) = 0_E$. Or $x = f(u)$ et donc $x = 0_E$.
  Au final, $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
  On a donc bien $\boxed{\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E}$.

**Remarque**: le résultat reste vrai si $E$ n'est pas de dimension finie. Ce qui oblige ici à prouver de plus $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.
$\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \subset E$ car $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
Inversement, soit $x \in E$, alors par hypothèse $f^3(x) = f(x)$ c'est-à-dire $f(f^2(x)) = f(x)$ et donc $f(x - f^2(x)) = 0_E$, d'où $x - f^2(x) \in \mathrm{Ker}\, f$.
Finalement,

$$x = \underbrace{(x - f^2(x))}_{\in \mathrm{Ker}\, f} + \underbrace{f^2(x)}_{\mathrm{Im}\, f} \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f.$$

D'où l'autre inclusion. Puis finalement l'égalité $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.

**Exercice 22**. $(\heartsuit)$ Soient $E$ un ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(f)$?

**Correction -** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
L'hypothèse $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, en effet: soit $v \in \mathrm{Im}\, f$, posons $u \in E$ tel que $v = f(u)$ alors $f(v) = f^2(u) = 0_E$ car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $v \in \mathrm{Ker}\, f$.
On passe aux dimensions: $\dim \mathrm{Im}\, f \subset \dim \mathrm{Ker}\, f$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f$. Or d'après le théorème du rang: $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathbb{E} - \mathrm{rg}(f)$ donc: $\mathrm{rg}(f) \leqslant 3 - \mathrm{rg}(f)$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(f) \leqslant \frac{3}{2}$. Or $\mathrm{rg}(f)$ est entier et $\mathrm{rg}(f) \neq 0$ car $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}$.

**Exercice 24.** $(**)$ Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

1) Montrer que: $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que dans ce cas $2\operatorname{rg}(f) \leqslant n$.

2) Montrer que: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\operatorname{rg}(f))$.

**Correction -** $(**)$

1) On montre : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Alors pour $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ on déduit $f(f(x)) = 0_E$ c'est-à-dire $f^2(x) = 0_E$. Donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

   $\Leftarrow$ Supposons $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$ alors $y = f(x)$ où $x \in E$ donc $f(y) = f^2(x) = 0_E$ car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

   On a donc bien : $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

   Si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ alors en passant aux dimensions $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$ et donc d'après le théorème du rang $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E - \operatorname{rg} f$ c'est-à-dire $\boxed{2\operatorname{rg}(f) \leqslant n}$.

2) On montre : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\operatorname{rg}(f))$ par équivalence.

$$\begin{aligned}(f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)) &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \text{ et } \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f \quad \text{(d'après 1) et le th. du rang)}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \quad \text{(une inclusion et l'égalité des dimensions).}\end{aligned}$$

**Exercice 27.** $(**)$ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $F$ et $G$ deux sev de $E$.
Montrer que $\dim E = \dim F + \dim G$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$.

**Correction -**

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$. Alors d'après le théorème du rang $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim F + \dim G$.

$\Rightarrow$ Supposons $\dim E = \dim F + \dim G$.

- Si $\dim F = 0$ alors $\dim G = \dim E$ on a donc $F = \{0_E\}$ et $G = E$. On pose donc pour $f$ n'importe quelle application bijective, par exemple $f = \operatorname{Id}_E$.
- Si $\dim F = \dim E$ alors $\dim G = 0$ on a donc $F = E$ et $G = \{0_E\}$. On pose donc pour $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Sinon, posons $n = \dim E$, $p = \dim F$ et donc par hypothèse $\dim G = n - p$.
  Posons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$ et $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_{n-p}$ une base de $G$.
  On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F$ et on définit l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par :
  $$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) = 0_E \qquad \forall i \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_i) = \varepsilon_i.$$
  Alors $\operatorname{Ker}(f) = F$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((f(e_i))_{p+1 \leqslant i \leqslant n}) = G$ comme voulu.

**Exercice 29.** $(*)$ Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$.

1) Montrer que $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2) On suppose que $E = F$, $f \circ g = 0$ et $f + g \in \operatorname{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$.

**Correction -**

1)
   - On a $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ (tout élément de $\operatorname{Im}(f+g)$ s'écrit $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ donc appartient à $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$).
     Donc $\dim(\operatorname{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$.
     On a donc déjà $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
   - Puis
     $$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f + g - g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + rg(-g) \text{ d'après la première inégalité}$$
     Puis on utilise $\operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(g)$, pour déduire $\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$.
     De même on démontre que $\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$.
     Par conséquent $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$.

   On a donc bien $\boxed{|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}$.

2) On suppose que $E = F$, $f \circ g = 0$ et $f + g \in \operatorname{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$.
   $f \circ g = 0$ donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Im} g \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$ c'est-à-dire $\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leqslant \dim E$ d'après le théorème du rang.
   D'après 1), $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ or $f + g = \operatorname{Id}_E$ donc $\operatorname{rg}(f+g) = \dim E$ donc $\dim E \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
   Finalement les deux inégalités donnent $\boxed{\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E}$