Matrice d'une application linéaire

Exercice 1. (♡) Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques et déterminer leur noyau et image.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x-y+4z. \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+3y, 4x-5y). \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, -2x+3y+z, -y-z). \end{array}$$

Exercice 2. (♡) Soit φ l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $X(X+1)P' - 2XP$.

1) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
3) Déterminer une base de l'image et du noyau de φ.

Exercice 3. (∗) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse et les puissances de la matrice A.
On pourra déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_4[X]$ tel que A soit la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 4. (♡) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3) Déterminer noyau et image de φ.

Exercice 5. (♡)

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{Ker} f$.
2) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme canoniquement associé à B.
   Déterminer le rang de g et une base de $\operatorname{Ker} g$.

Exercice 6. (∗) Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première ligne et la première colonne qui valent 1.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 7. (♡) Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par:

$$f(e_1) = e_1 + 2e_3 \qquad f(e_2) = 2e_2 - e_3 \qquad f(e_3) = 3e_1 + e_2 + 2e_3.$$

1) Donner la matrice de f dans cette base.

2) On pose $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_1)$. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$:

 -a- en utilisant la définition

 -b- en utilisant la formule de changement de base.

Exercice 8. $(**)$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \quad \varphi \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}.$$

Montrer que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(u) = 1$.

2) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) En déduire les endomorphismes qui commutent avec f.

Exercice 10. $(**)$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure stricte c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) [\![1, n]\!]^2, \quad i \geqslant j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Montrer que $A^n = 0_n$.
Indication : par le calcul matriciel c'est pénible, mais avec une application linéaire....

Exercice 11. $(*)$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Si $x_0 \in E$ est tel que $f^{(n-1)}(x_0) \neq 0_E$, montrer que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)\big)$ est une base de E.

2) Déterminer la matrice de f relativement à cette base $\mathcal{B}$. Puis les matrices de f^2,...f^{n-1} dans cette même base.

3) $(**)$En déduire que $\{g \in \mathcal{L}(E) \;/\; g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$.

Exercice 12. $(\heartsuit)$ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un projecteur.

2) Déterminer ses éléments caractéristiques.

3) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

 Une telle base est appelée une base adaptée à f.

Exercice 13. $(\heartsuit)$ Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (-1, 3, 2)$, $v = (1, -1, -1)$, $w = (0, 3, 1)$.
Et on pose $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(v, w)$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1) Donner la matrice de s dans une base adaptée.

2) Déterminer alors la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 14. ($*$) Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G deux sev de E supplémentaires dans E. On désigne par p la projection sur F parallèlement à G et par s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1) Montrer que dans une base adaptée la matrice de p est diagonale que l'on déterminera.

2) Montrer que dans une base adaptée la matrice de s est diagonale que l'on déterminera.

Matrices semblables

Exercice 15. ($*$)- Diagonalisation Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer le rang de f, une base de son image et une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$, puis déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id})$.

3) En déduire une base $\mathcal{B}'$ où la matrice de f est diagonale. On notera D cette matrice.

4) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Retrouver le résultat précédent.

5) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

6) **1ère application :** déterminer le terme général des suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 7u_n + 4v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = -1 \end{cases}.$$

7) **2ème application :** on souhaite résoudre le système différentiel (S) $\begin{cases} x' = 5x + 4y - z \\ y' = 2x - 2z \\ z' = 7x + 4y - 3z \end{cases}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

-a- Montrer que $(S) \Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

-b- Résoudre $Y' = DY$. En déduire la résolution de (S).

Exercice 16. ($\heartsuit$) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à I_n.

Exercice 17. ($\heartsuit$) Montrer que les matrices suivantes sont semblables et déterminer la matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Puis calculer A^n.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. $(*)$ On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer PAP.

3) En déduire qu'une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Rang et trace

Exercice 19. $(\heartsuit)$ Déterminer le rang des matrices suivantes:

1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1

2) $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i,i} = 1$ et les autres nuls

3) $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

4) $D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ où $(, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 20. $(*)$

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement s'il existe $(C, D) \in (\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}))^2$ non nulles tels que $A = CD^\top$.

Exercice 21. $(**)$ Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que $\text{rg}\, A + \text{rg}\, B = n$.

Exercice 22. $(*)$ Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(A - B)$.

Exercice 23. $(**)$ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe des matrices $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

Exercice 24. $(**)$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose l'endomorphisme $\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & AM \end{array}$.
Déterminer la trace de f en fonction de la trace de A.