Exercice 2. ($\heartsuit$) Soit φ l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $X(X+1)P' - 2XP$.

1) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
3) Déterminer une base de l'image et du noyau de φ.

Correction -

1) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $X(X+1)P'$ et $2XP$ appartiennent à $\mathbb{R}_3[X]$.
Notons α le coefficient devant X^2 dans P, alors le coefficient devant X^3 dans $\varphi(P)$ est $2\alpha - 2\alpha = 0$.
Finalement, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
La linéarité est laissée au lecteur [...].
$\boxed{\varphi \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2) $\varphi(1) = -2X$, $\varphi(X) = -X^2 + X$, $\varphi(X^2) = 2X^2$ et donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Dans la matrice, $C_3 = -2C_2 - C_1$, donc
$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2 \text{ et } (X, X^2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,\varphi}$.
Le théorème du rang donne alors $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 1$. La combinaison linéaire nulle des colonnes $C_1 + 2C_2 + C_3$ donc $1 + 2X + X^2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.
Pour résumer :
- $(1 + 2X + X^2)$ est une famille de $\mathrm{Ker}\,\varphi$
- $(1 + 2X + X^2)$ est libre car $1 + 2X + X^2 \neq 0$
- $\mathrm{Card}(1 + 2X + X^2) = 1 = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$

Et donc par caractérisation des bases $\boxed{(1 + 2X + X^2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,\varphi}$.

Exercice 8. ($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \quad \varphi \circ f = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}.$$
Montrer que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Correction - Posons $\mathcal{B}$ une base de E, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est une matrice ligne de format $(n, 1)$.
L'hypothèse de l'exercice se réécrit donc :
$$\forall L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K}), \quad LA = 0_{1,n}.$$
En prenant $L = (0 \cdots 010 \cdots 0)$ alors LA est la i-ème ligne de A. Donc toutes les lignes de A sont nulles. Donc A est nulle, donc $\boxed{f = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

Exercice 14. ($*$) Soit E un espace vectoriel de dimension n et F, G deux sev de E supplémentaires dans E. On désigne par p la projection sur F parallèlement à G et par s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1) Montrer que dans une base adaptée la matrice de p est diagonale que l'on déterminera.
2) Montrer que dans une base adaptée la matrice de s est diagonale que l'on déterminera.

Correction - C'est du cours. Prendre une base résultant de la concaténation de base de F et G.

Exercice 18. ($*$) On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer PAP.

3) En déduire qu'une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Correction - On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1) Le calcul de P^2 donne $P^2 = I_n$ donc $\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = P}$.
2) Si on note par blocs de colonnes/lignes la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$PM = \begin{pmatrix} L_n \\ \vdots \\ L_1 \end{pmatrix} \qquad MP = \begin{pmatrix} C_n & \dots & C_1 \end{pmatrix}.$$

NB pour les curieux : la matrice P est la matrice I_n sur laquelle on effectué une permutation des lignes, ou des colonnes. La multiplication à gauche par P permute les lignes de A par la même permutation qui a modifié les lignes de I_n pour obtenir A. La multiplication à droite par P permute les colonnes de P.
Rien d'étonnant car on connait ce résultat pour les matrices de permutation qui échange deux ligne/colonnes et on sait qu'une permutation est une composition de transpositions. Il suffit de répéter les transpositions qui mènent à la permutation voulues.
Finalement, PAP est la matrice A où l'on permute les colonne puis les lignes, c'est-à-dire :

$$PAP = \begin{pmatrix} a_{nn} & \dots & an1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} = (a_{n-j+1,n-i+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Attention : ce n'est pas la transposée de A.

3) Si A est une matrice triangulaire supérieure alors $A' = PAP$ est une matrice triangulaire inférieure. Et comme $P^{-1} = P$ alors $A' = P^{-1}AP$ et donc A et A' sont semblables.
Donc $\boxed{\text{une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure}}$.

Exercice 21. $(**)$ Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = n$.

Correction - On pose f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On note $E = \mathbb{K}^n$
Les hypothèses se réécrivent alors :

$$f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \qquad f + g \text{ bijective}.$$

On montre alors que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

- De $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ on déduit $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et donc en passant aux dimensions $\operatorname{rg} g \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$. Et donc d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg} f$.
  On déduit donc cette première inégalité : $\boxed{\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant n}$.
- Pour l'autre inégalité, on commence par observer
  $$\operatorname{Im}(f + g) = \{(f + g)(x) \;/\; x \in E\} = \{f(x) + g(x) \;/\; x \in E\} \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$
  Comme $f + g$ est bijective alors $\operatorname{Im}(f + g) = E$. On passe alors aux dimensions l'inclusion ci-dessus :
  $$n \leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.$$
  On a donc bien $n \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.
- Bilan : $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$ donc $\boxed{\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = n}$.

Exercice 22. $(*)$ Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(A - B)$.

Correction - Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $C_{n+j} \leftarrow C_{n+j} - C_j$, $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B - A \end{pmatrix}$.
Puis pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_{n+j} \leftarrow L_{n+j} - L_j$, $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B - A \end{pmatrix}$. On échelonne A et $B - A$ par colonnes : $A \underset{C}{\sim} D_1$ et $B - A \underset{C}{\sim} D_2$

alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(D_1)$(= nb de colonnes non nulles) et $\mathrm{rg}(B-A) = \mathrm{rg}(D_2)$(= nb de colonnes non nulles).
Par des opérations similaires sur les colonnes $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B-A \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} D_1 & 0_n \\ 0_n & D_2 \end{pmatrix}$.
Cette dernière matrice est échelonnée par colonnes quitte à déplacer les colonnes nulles issues de D_1 à la fin. En comptant alors les colonnes non nulles on obtient

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} D_1 & 0_n \\ 0_n & D_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(D_1) + \mathrm{rg}(D_2).$$

Finalement $\boxed{\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(A-B)}$

Exercice 23. (∗∗) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe des matrices $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

Correction - Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Par caractérisation des matrices de rang ρ avec la matrice J_r, il existe des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$.
Notons que $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$ et posons $B' \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C' \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$

$$B' = \begin{pmatrix} I_r \\ O_{n-r,r} \end{pmatrix} \qquad C' = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-p} \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \quad B'C' = J_r.$$

Alors $A = PB'C'Q = (PB')(C'Q)$. On pose $\boxed{B = PB' \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \text{ et } C = C'Q \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K}) \text{ alors } A = BC}$

Exercice 24. (∗∗) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose l'endomorphisme $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.
Déterminer la trace de f en fonction de la trace de A.

Correction - (∗∗) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose l'endomorphisme $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.
On pose C la matrice de f, dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Cette matrice est de format (n^2, n^2), et on a $\mathrm{Trace}(f) = \mathrm{Trace}(C) = \sum_{i=1}^{n^2} c_{kk}$.
Chaque coefficient diagonal de C correspond à la coordonnée sur E_{ij} de $f(E_{ij}) = AE_{ij}$ où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc

$$\mathrm{Trace}(f) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [AE_{ij}]_{ij}.$$

Or $f(E_{ij}) = AE_{ij}$ est la matrice où toutes les colonnes sont nulles, sauf la j-ème colonne qui est la i-ème colonne de A. Et donc en position (i,j) de $f(E_{ij})$ le coefficient est a_{ii}.
D'où

$$\mathrm{Trace}(f) = \mathrm{Trace}(C) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ii} = n \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n\mathrm{Trace}(A).$$