

Convergence et calculs de sommes

Exercice 1. (♡) Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes:

$$\begin{array}{llll}
 1) \text{ -a- } \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} & \text{-b- } \sum_{n \geq 2} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1} & \text{-c- } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{n-3}}{3^{2n+2}} & \text{-d- } \sum_{n \geq 1} (-3)^{n+1} 5^{-2n+1} \\
 2) \text{ -a- } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n n!} & \text{-b- } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{2n-3}}{n!} & \text{-c- } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{5^n}{(n+2)!} & \text{-d- } \sum_{n \geq 3} \frac{3^{2n-5}}{(n-2)!}
 \end{array}$$

Exercice 2. (♡) Série géométrique des dérivées Soit $x \in]-1, 1[$.

- 1) Montrer que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} n x^{n-1}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1)x^{n-2}$ convergent et calculer leur somme.
- 2) En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 x^n$ converge et calculer sa somme.
- 3) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n+2)x^{2n+1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. (♡) Montrer la convergence et calculer la somme des séries:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \cos(n\theta) \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n \sin(n\theta) \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } x \in]-1, 1[$$

Exercice 4. (♡) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n-1}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5. (*) Étudier la nature des séries suivantes et dans le cas de convergence, calculer la somme.

$$1) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \qquad 2) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

Exercice 6. (*) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge et calculer la somme.

Exercice 7. (**) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ converge et calculer sa somme.
On pourra utiliser $\sin(2a) = \dots?$

Exercice 8. (*) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

[Pour le calcul de la somme on exprimera la somme partielle d'indice n de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en fonction des sommes partielles de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ en décomposant selon les termes d'indices pair et impair]

Séries à termes positifs

Exercice 9. (\heartsuit) Étudier la convergence des séries de terme général

$$1) u_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

$$4) u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$$

$$8) u_n = \sin \left(\frac{2n+3}{4n^3+1} \right)$$

$$2) u_n = \frac{1}{\ln(n)}$$

$$5) u_n = \frac{n+1}{3^n}$$

$$9) u_n = \frac{n^2}{(2n)!}$$

$$3) u_n = \frac{n(\ln(n))^4}{(n+1)^3}$$

$$6) u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

$$7) u_n = \frac{\ln(n)}{2^n}$$

$$10) u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Exercice 10. (*) Discuter selon les paramètres la nature des séries de terme général suivant :

$$1) u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}} \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

$$3) u_n = \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^a} \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

$$2) u_n = \frac{1}{a^{\ln n}} \text{ } a > 0$$

$$4) u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 11. (*) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que les séries de terme général suivant sont convergentes.

$$1) u_n^2$$

$$2) \frac{\sqrt{u_n}}{n} \text{ [On pourra utiliser l'inégalité } xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ après l'avoir justifié]}$$

Exercice 12. (**) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On suppose que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 13. (*) Règle de D'Alembert Soit (u_n) une suite strictement positive telle que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1) On suppose $l < 1$. Soit $k \in]l, 1[$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} \leq ku_n$.
En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2) On suppose $l > 1$. Montrer par une technique similaire que $\sum u_n$ diverge.

3) On suppose $l = 1$. Montrer à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut conclure en général.

Exercice 14. (*) Autre preuve de CV des séries de Riemann Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$1) \text{ Montrer que, } \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}.$$

2) En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Exercice 15. (*) Comparaison série intégrale

$$1) \text{ Soit } \alpha < 1. \text{ On pose pour } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}. \text{ Montrer que } S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2) Soit $\alpha > 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Séries alternées

Exercice 16. (*) Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants

1) $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

2) $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$

4) $u_n = \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$.

Exercice 17. (**) Étudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k!}}$.

Divers

Exercice 18. (*) Constante d'Euler Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.

2) En déduire qu'il existe une constante γ telle que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 19. (*) Formule de Stirling On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n!}{n^n} e^n$ et $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2) En déduire la nature de la série $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.

3) En déduire que $n!$ à un équivalent de forme $C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. C'est la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 20. (**) Sommation des équivalents Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs définies à partir d'un rang N , telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

On suppose : $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que : $\sum_{k=N}^n u_k \sim \sum_{k=N}^n v_k$. Utiliser la définition de la limite avec les ε .

2) **Application 1.** Montrer que l'on retrouve alors le théorème de Cesaro.

3) **Application 2.** En déterminant un équivalent simple de $\ln(n+1) - \ln(n)$ retrouver que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

4) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, montrer que ce sont les restes qui sont équivalents.