Dénombrement

Exercice 1. (♡) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot ABRACADABRA (du dictionnaire ou non).

Exercice 2. Principe des tiroirs et des chaussettes.

1) 501 entiers sont choisis parmi les entiers de 1 à 1000. Montrer qu'il existe toujours au moins un couple de nombres tels que l'un des termes divise l'autre. *On pourra écrire les entiers sous forme $2^p k$ où k est impair.*

2) Montrer que parmi 101 entiers distincts, il existe toujours 11 d'entre eux dont la somme est divisible par 11. *On pourra s'intéresser aux ensembles E_i qui contiennent les entiers parmi les 101 choisis qui ont un reste égal à i modulo 11.*

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples (x, y)

1) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $x + y = n$
2) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $x < y$
3) dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ tels que $x < y$
4) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $|x - y| \leqslant 1$.

Exercice 4. ($*$) Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets (où $n \geqslant 3$).

Exercice 5. ($*$) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de l'intervalle $[\![1, p]\!]$ vers l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

Exercice 6. ($*$)Formule de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant a + b$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n}$

Exercice 7. ($*$)Formule de Pascal
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $p+1$-combinaison de $[\![1, n+1]\!]$?

2) En utilisant ce qui précède, compter de deux manières les $p+1$-combinaison de $[\![1, n+1]\!]$ pour en déduire une formule.

Exercice 8. ($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre N_n de parties de $[\![1, 2n]\!]$ contenant autant de nombres pairs que de nombres impairs.

Exercice 9. ($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre P_n de partition de $[\![1, 2n]\!]$ en parties de 2 éléments.
Par exemple pour $n = 3$, $\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$ est une partition qui convient.

Exercice 10. ($*$)Nombre de relations Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

1) Dénombrer les relations binaires sur E.

2) Dénombrer les relations binaires, réflexives sur E.

3) Dénombrer les relations binaires, réflexives et symétriques sur E.

Exercice 11. ($*$)-($**$)Nombre de surjections

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   -a- Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
   -b- Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n+2]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$.

Exercice 12. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note N_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$. En déduire l'expression de G_n.

Exercice 13. ($*$) Déterminer le nombre d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres est inférieure ou égale à 2.

Exercice 14. ($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$.

1) De combien de façons peut-on répartir p chemises identiques dans n tiroirs?
2) Quel est le cardinal de l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \ / \ x_1 + \dots + x_n = p\}$?.

Exercice 15. ($**$) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = n2^{n-1}$.

Exercice 16. ($**$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments.
Dénombrer les couples $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$.

Manipulations ensemblistes

Exercice 17. ($\heartsuit$) Soit A, B et C trois évènements d'un espace probabilisé (Ω, P). Traduire de façon ensembliste les évènements:

1) A_1: "seul l'évènement A est réalisé"
2) A_2: "A et B réalisés mais pas C"
3) A_3: "les trois évènements sont réalisés"
4) A_4: "au moins l'un des évènements est réalisé"
5) A_5: "au moins deux évènements sont réalisés"
6) A_6: "un seul des trois évènements est réalisé"
7) A_7: "exactement deux évènements sont réalisés"
8) A_8: "aucun évènement n'est réalisé"
9) A_9: "pas plus de deux évènements ne se réalisent"

Exercice 18. ($*$)- **Formule du crible**. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) Soient A, B, C trois événements. Déterminer $P(A \cup B \cup C)$.
2) Soit $A_1, \dots, A_n$ n événements. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{p=1}^{k} A_{i_p}\right)\right).$$

Probabilités par dénombrement simple

Exercice 19. ($\heartsuit$) Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20:

- 8 boules blanches numérotées de 1 à 8
- 12 boules noires numérotées de 9 à 20.

1) On tire simultanément 5 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   -a- A : "on tire au moins une noire"
   -b- B : "on ne tire que des numéros pairs"
   -c- B : "on tire exactement 2 boules blanches et 3 boules noires"
2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise. Mêmes questions.
3) On tire successivement 5 boules de l'urne avec remise. Mêmes questions.

Exercice 20. ($\heartsuit$) On lance trois fois un dé. Déterminer:

1) la probabilité de faire 11
2) la probabilité de ne pas obtenir de 1
3) la probabilité d'obtenir deux 6
4) la probabilité qu'au moins deux des résultats indiquent le même nombre.

Exercice 21. ($\heartsuit$) On distribue 8 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité d'avoir:

1) exactement 2 coeurs et 1 valet
2) au moins 1 coeur et au moins 1 valet
3) exactement 2 coeurs et au moins 1 valet.

Exercice 22. ($*$) Quatre personnes posent leur verre sur une table et les reprennent au hasard.

1) Quelle est la probabilité que chacun reprenne son verre?
2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des quatre récupère son verre?

Exercice 23. ($*$) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On tire une poignée de p boules où $1 \leqslant p \leqslant n$.

1) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on pose B_j: "le plus grand numéro est égal à j". Déterminer $P(B_j)$.
2) En déduire la formule: $\displaystyle\sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{i}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Exercice 24. ($*$) Dans une population de N personnes quelle est la probabilité pour deux personnes soient nées le même jour.
A partir de combien de personnes cette probabilité est-elle supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 25. ($**$) Une personne a dans sa poche deux boîtes de TicTac contenant n TicTac chacune. Chaque fois qu'il désire un TicTac il le prend au hasard dans l'une des boîtes.

1) Déterminer la probabilité pour que, lorqu'il prend le dernier TicTac d'une boîte, l'autre boîte contienne encore p TicTac.
2) Distrait, il se rend compte que l'une des boîtes est vide, non pas lorsqu'il prend le dernier TicTac de la boîte, mais lorsque cherchant un TicTac il prend la boîte et constate qu'elle est vide. Quelle est la probabilité que l'autre boîte contienne encore p TicTac

Exercice 26. ($**$) Soient N enveloppes associées à N lettres. On apparie au hasard lettres et enveloppes. Soit p la probabilité qu'aucune lettre ne soit adressée au bon destinataire.

1) On note A_k l'évènement que l'appariement soit correct pour la k-ième enveloppe. Montrer que $P(A_k) = \dfrac{1}{N}$ et donner $P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k})$.
2) Calculer la valeur de p en utilisant la formule du crible.

Exercice 27. ($**$) Une puce part de $O(0,0)$ et à chaque saut de déplace de façon équiprobablen d'une unité vers le haut, le bas, la gauche, la droite.
Quelle est la probabilité que la puce se retrouve au point O après n sauts ?
Donner un équivalent de cette probabilité en $+\infty$ lorsque n est pair.

Probabilités conditionnelles

Exercice 28. ($\heartsuit$) Un lot contient 100 articles dont 10 sont défectueux. On tire 3 articles l'un après l'autre sans remise. Calculer la probabilité que les trois articles ne soient pas défectueux.

Exercice 29. ($*$) Une puce se déplace sur les 3 sommets d'un triangle ABC.
Au départ, elle est en A et à chaque instant elle fait un saut :

- si elle est en A, elle va en B
- si elle est en B, elle a une chance sur deux d'aller en A ou en C
- si elle est en C, elle y reste.

1) Montrer que la puce ne peut arriver en C qu'à des instants pairs.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité que la puce arrive en C à l'étape $2n$.

Exercice 30. ($\heartsuit$) Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes:

- 20 % pour la machine A
- 30 % pour la machine B
- 50 % pour la machine C.

Les fiabilités respectives des machines A, B et C sont respectivement 0.9, 0.95, 0.8 (autrement dit la probabilité pour qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est 0.9).
On achète une ampoule, elle est bonne. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A.

Exercice 31. ($*$) Trois pièces de monnaie ont pour probabilités respectives de tomber sur pile: 0.1, 0.4, 0.6. On choisit une pièce au hasard.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir pile?
2) En lançant trois fois cette pièce préalablement choisie, on obtient deux faces et un pile dans cet ordre. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la première pièce.

Exercice 32. ($*$) Une urne U contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ... n jetons numérotés n.
On dispose de n urnes numérotés de 1 à n et contenant n boules, la i-ème urne contient i boles blanches et $n - i$ boules noires.
On tire un jeton dans U, si le jeton est i on tire une boule dans l'urne i.
Quelle est la probabilité que la boule soit blanche.

Exercice 33. ($*$) Une boîte A contient n cartes numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) et une boîte B contient p cartes numérotées de 1 à p ($2 \leqslant p \leqslant n$).
On choisit une boîte au hasard, on tire une carte, le numéro est pair. Calculer la probabilité que la carte provienne de A.

Avec des suites

Exercice 34. ($*$) On dispose d'un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont truqués. Pour un dé truqué la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.
On choisit un dé dans le lot.

1) On lance le dé choisi une fois. On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit truqué?
2) On lance le dé choisi n fois. On obtient toujours 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit truqué? Déterminer la limite de (p_n). Surprenant?

Exercice 35. ($*$) Un Professeur de Mathématiques a décidé de faire l'effort de ne plus s'énerver.

S'il ne s'énerve pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne s'énerve pas le lendemain est 0.3.
En revanche, s'il s'énerve un jour donné, alors la probabilité qu'il ne s'énerve pas le lendemain est 0.9.
Le premier jour, jour de la rentrée, le professeur n'est pas énervé.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose l'évènement E_n: "le professeur est énervé le n-ième jour" et $p_n = P(E_n)$.

1) Donner la valeur de p_1.

2) Calculer p_2, p_3.

3) Le troisième jour le professeur est énervé. Quelle est la probabilité qu'il ait été énervé le deuxième jour?

4) Quelle est la probabilité que le professeur soit énervé les trois jours consécutifs: 2ème, 3ème et 4ème jour?

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Exercice 36. ($*$) On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile soit de $\frac{1}{3}$:

- si on obtient pile on décide de jouer uniquement avec le dé A
- si on obtient face on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1) Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.

2) On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.

3) On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A. Déterminer la limite de (p_n). Surprenant?

Exercice 37. ($*$) Trois opérateurs de téléphonie mobile A, B, C possèdant un tiers du marché, mettent en place une nouvelle offre de forfait. A la fin de l'année, l'évolution des parts de marché se fait de la manière suivante:

- les clients de A se répartissent indifféremment de façon équiprobable entre A et B et C
- les clients de B restent chez B
- les clients de C seront chez A, B, C avec probabilités respectives $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n, c_n les probabilités pour qu'à l'issue de la n-ième année un consommateur décide de s'abonner chez A, B ou C.

1) Déterminer une relation de récurrence entre a_n, b_n, c_n et a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}. On pourra introduire les événements A_n (resp. B_n et C_n), "à l'issue de la n-ième année le consommateur décide d'être client de A" (resp B, C).

2) En déduire le terme général des suites (a_n), (b_n), (c_n) en fonction de n, puis les limites de ces suites. On montrera que les suites (a_n) et (c_n) vérifient une relation de récurrence double.

Indépendance

Exercice 38. ($\heartsuit$) On admet que chaque enfant naissant dans une famille est un garçon ou un fille avec une probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres enfants de la famille. On s'intéresse aux événements suivants:
A: "la famille a des enfants des 2 sexes $\qquad$ B: "la famille a au plus une fille".

1) On suppose qu'une famille a $n = 2$ enfants. Calculer les probabilités de évènements A et B. Sont-ils indépendants?

2) Même question pour $n = 3$.

3) Pour quelles valeurs de $n \geqslant 2$, A et B sont-ils indépendants?