Exercice 5. $(*)$ Étudier la nature des séries suivantes et dans le cas de convergence, calculer la somme.

1) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

Correction -

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors on reconnaît un téléscopage, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{0} = \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1)-(n+1)^2 n} = \frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, alors on reconnaît un téléscopage, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge de somme }}$.

Exercice 6. $(*)$ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge et calculer la somme.

Correction - Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$, alors

$$u_n = 2\ln n - \ln(n-1) - \ln(n+1) = (\ln(n)-\ln(n-1)) + (\ln(n)-\ln(n+1)).$$

Puis, on calcule la somme partielle en faisant apparaître un téléscopage,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(n) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1) = \ln(2) + \ln\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

Donc, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge de somme } \ln 2}$.

Exercice 7. $(**)$ Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ converge et calculer sa somme.
On pourra utiliser $\sin(2a) = ...?$

Correction - On pose $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

On utilise $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ c'est-à-dire $\cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2\sin a}$ avec $a = \frac{x}{2^n}$, donc

$$u_n = \ln\left(\frac{2^{n-1}\sin(\frac{x}{2^{n-1}})}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}\right) = \ln\left(2^{n-1}\sin(\frac{x}{2^{n-1}})\right) - \ln\left(2^n\sin(\frac{x}{2^n})\right).$$

On met donc en oeuvre un téléscopage, *[mise en oeuvre classique]*, pour prouver que $\boxed{\text{la série converge de somme } \ln(\sin x)-\ln(x)}$.

Exercice 11. $(*)$ Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que les séries de terme général suivant sont convergentes.

1) u_n^2 2) $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ [On pourra utiliser l'inégalité $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ après l'avoir justifié]

Correction -

1) La série $\sum u_n$ converge donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang N. Donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

De plus les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont à termes positifs, donc par comparaison des SATP, $\boxed{\sum u_n^2 \text{ converge}}$.

2) Notons que pour x, y, réels, $(x-y)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ c'est-à-dire $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
Que l'on applique ici avec $x = \sqrt{u_n}$ et $y = \frac{1}{n}$,

$$\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

On conclut classiquement par application d'un théorème de comparaison des SATP avec inégalités *[laissé au lecteur]*.

Exercice 12. (∗∗) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On suppose que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Correction - L'inégalité se réécrit

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est donc décroissante, elle est donc majorée par son premier terme $M = \frac{u_0}{v_0}$. Et donc

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M v_n.$$

Puis comme $\sum v_n$ est convergente, alors par opérations, $\sum M v_n$ est convergente.
Les séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont des séries à termes positifs, par conséquent $\sum u_n$ converge.

Exercice 14. (∗)Autre preuve de CV des séries de Riemann Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1) Montrer que, $\displaystyle \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha - 1}{n^\alpha}$.

2) En déduire que la série $\displaystyle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Correction -

1)

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times (\alpha - 1)\frac{1}{n}.$$

On a utilisé $(1+u)^\beta - 1 \underset{0}{\sim} \beta u$ avec $\beta = 1 - \alpha$ et $u = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc,

$$\boxed{\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}}.$$

2) On veut appliquer la comparaison des SATP à l'aide d'équivalents.

- **Equivalent**. D'après 1), on déduit

$$\frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)}_{=a_n}.$$

- **Ce sont des SATP**. On étudie le signe de a_n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant n+1$ donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est croissante si $\alpha > 1$ et décroissante si $\alpha < 1$, alors $\frac{1}{n^{\alpha-1}} < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$ et $\frac{1}{n^{\alpha-1}} > \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ si $\alpha < 1$. Donc par multiplication par $\frac{1}{\alpha - 1} > 0$ si $\alpha > 1$ et < 0 si $\alpha < 1$ alors $a_n > 0$.
Donc $\displaystyle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\displaystyle \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ sont des SATP.

- **Convergence de** $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$. On reconnaît une série téléscopique. On pose alors pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, alors

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right).$$

  Or $\frac{1}{(n+1)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ si $\alpha>1$ et $\frac{1}{(n+1)^\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ si $\alpha<1$ donc par opérations sur les limites, (S_n) converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha<1$.
  Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha<1$.

- **Conclusions**. Par comparasion des SATP, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si } \alpha>1 \text{ et diverge si } \alpha<1}$.

Exercice 18. $(*)$Formule de Stirling On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\frac{n!}{n^n}\,\mathrm{e}^n$ et $v_n=\frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que : $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\frac{1}{2n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$.
2) En déduire la nature de la série $\sum(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n))$.
3) Conclure.

Correction -

1) Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)&=\ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\mathrm{e}^{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n!}{n^n}\,\mathrm{e}^n\right)=\ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\mathrm{e}^{n+1}\,\frac{n^n}{n!\,\mathrm{e}^n}\right)\\&=\ln\left(\mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)=1-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^3})\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\frac{1}{2n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)&=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-(\ln(\sqrt{n+1})-\ln(\sqrt{n}))\\&=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})-\left(\frac{1}{2n}+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\right)\\&=\mathrm{O}(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$

   Or $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après un théorème de comparaison du cours, $\boxed{\text{la série } \sum(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)) \text{ converge absolument, donc converge}}$.

3) Par conséquent, la série $\sum(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n))$ étant téléscopique, on déduit que la suite $(\ln(v_n))$ converge, notons l la limite, donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^l$.
   On note $C=\mathrm{e}^l$, on a donc $C\neq0$, on en déduit $\frac{u_n}{\sqrt{n}}\underset{+\infty}{\sim}C$ et donc $u_n\underset{+\infty}{\sim}C\sqrt{n}$ et donc $\boxed{n!\underset{+\infty}{\sim}C\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 19. $(**)$Sommation des équivalents Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs définies à partir d'un rang N, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
On suppose : $u_n\sim v_n$.

1) Montrer que : $\sum_{k=N}^{n}u_k\sim\sum_{k=N}^{n}v_k$. *Utiliser la définition de la limite avec les* ε.
2) **Application 1.** Montrer que l'on retrouve alors le théorème de Cesaro.
3) **Application 2.** En déterminant un équivalent simple de $\ln(n+1)-\ln(n)$ retrouver que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.
4) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, montrer que ce sont les restes qui sont équivalents.

Correction -

1) On montrer que $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. On calcule pour cela

$$\alpha_n = \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} - 1 \right| = \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} (u_k - v_k)}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} \right| = \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=N}^{n} (u_k - v_k)\right|}{\left|\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k\right|}$$

$$\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} |u_k - v_k|}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} \text{ (inég. triangulaire au numérateur, la somme est positive au dénominateur)}$$

Puis $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ donc $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est-à-dire $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $N_1 \geqslant N$, tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} \leqslant \varepsilon$ donc $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$. On peut donc continuer à majorer α_n,

$$\alpha_n \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{N_1-1} |u_k - v_k|}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} + \frac{\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n} |u_k - v_k|}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{N_1-1} |u_k - v_k|}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} + \frac{\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n} \varepsilon v_k}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k}.$$

Comme les v_k sont positifs et $N_1 \geqslant N$ alors $\displaystyle\sum_{k=N_1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k$.

Puis, comme la série $\sum v_k$ diverge alors $\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc posons N_2 tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \quad \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{N_1-1} |u_k - v_k|}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} \leqslant \varepsilon \quad \text{(notons que le numérateur est indépendant de } n\text{).}$$

Finalement, en revenant à la majoration de α_n, on obtient pour $n \geqslant N_2$,

$$\alpha_n \leqslant \varepsilon + \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} \varepsilon v_k}{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} v_k} = 2\varepsilon.$$

On a donc prouvé $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} u_k \sim \sum_{k=N}^{n} v_k}$.

2) Posons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de limite $l \in \mathbb{R}*$ (on peut supposer $l > 0$ qui a prendre $-u_n$) alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} l$. Avec $v_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\sum v_n$ diverge et à termes positifs donc d'après la question 1

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} l \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} nl \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} l.$$

On retrouve donc le théorème de Cesaro.

3) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et est à terme positifs, on peut donc appliquer 1,

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(n+1) - \ln(1) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$.

4) Méthode similaire à celle de 1), à adapter.