Exercice Soient n, a, b des entiers naturels non nuls et c un entier naturel.
On considère une urne qui contient initialement a boules blanches et b boules rouges. On tire une boule dans l'urne, et on la remet dans l'urne, accompagnée de c autres boules de la même couleur (c'est-à-dire de la couleur tirée). On répète n fois cette expérience, qu'on suppose modélisée par un espace probabilisé fini (Ω, P) qu'on ne cherchera pas à déterminer, et sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable indicatrice de l'événement «la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge», c'est-à-dire

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A_k \text{ est vérifiée} \\ 0 & \text{si } A_k \text{ n'est pas vérifiée} \end{cases}.$$

Enfin, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

1) -a- Que représente la variable S_n ? Déterminer $S_n(\Omega)$.
   -b- Dans le cas particulier $c = 0$, donner la loi, l'espérance et la variance de S_n.

2) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   -a- Montrer que $P(X_{k+1} = 1) = \dfrac{b + c\,\mathbb{E}(S_k)}{a + b + kc}$.
   -b- En déduire que $P(X_{k+1} = 1) = P(X_k = 1)$.
   -c- Déterminer alors la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

3) Déterminer l'espérance de S_n.

4) Pour $i, j \in \mathbf{N}$, on pose
$$\pi(i,j) = \prod_{k=0}^{j-1} (i + kc) = i(i+c)\cdots(i+(j-1)c).$$
   -a- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. À l'aide des $\pi(i, j)$ définis ci-dessus, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord k rouges, puis $n - k$ boules blanches au cours des n tirages.
   -b- Montrer que la probabilité calculée à la question précédente est aussi celle d'avoir d'abord $k - 1$ boules rouges, puis une blanche, puis une rouge, puis $n - k - 1$ blanches.
   -c- En déduire que $P(S_n = k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}$.
   -d- Quelle est la loi de S_n dans le cas particulier $a = b = c = 1$?
   -e- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi(b,k)\pi(a,n-k) = \pi(a+b,n)$.

5) Soit $n \geqslant 2$.
   -a- Montrer que $\forall i, j \in \mathbf{N}, \pi(i, j+2) = i(i+c)\pi(i+2c, j)$.
   -b- Prouver que $\mathbb{E}(S_n^2 - S_n) = \dfrac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}$.
   -c- En déduire la variance de S_n.