Exercice

1. (a) La variable S_n représente donc le nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.
   On a alors évidemment $S_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
   Et en fait il s'agit même d'une égalité puisque pour $k \in [\![0, n]\!]$, on peut tout à fait avoir k boules rouges lors des k premiers tirages, puis uniquement des boules blanches.

   (b) Si $c = 0$, alors le contenu de l'urne ne change pas au cours des tirages : il y a toujours a boules blanches et b boules rouges, si bien qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{b}{a+b}$.
   Et par indépendance des tirages, $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{b}{b+a}\right)$.

2. (a) Utilisons le système complet d'événements $\{[S_k = i], 0 \leqslant i \leqslant k\}$. Alors

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(S_k = i)\mathbf{P}_{[S_k=i]}(X_{k+1} = 1).$$

   Mais sachant $[S_k = i]$ réalisé, au moment du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient $a+b+kc$ boules, dont $b+ic$ sont rouges. Et donc la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{b+ic}{a+b+kc}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(S_k = i)\frac{b+ic}{a+b+kc} \\ &= \frac{1}{a+b+kc}\left(b\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}(S_k = i) + c\sum_{i=0}^{k} i\mathbf{P}(S_k = i)\right) \\ &= \frac{1}{a+b+kc}\left(b + c\mathbf{E}(S_k)\right) = \frac{b+c\mathbf{E}(S_k)}{a+b+kc}.\end{aligned}$$

   (b) On a, en notant éventuellement $S_0 = 0$ (dans le cas où $k = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) &= \frac{b+c\mathbf{E}(S_k)}{a+b+kc} = \frac{b+c\mathbf{E}(S_{k-1}+X_k)}{a+b+kc} \\ &= \frac{b+c\mathbf{E}(S_{k-1})}{a+b+kc} + \frac{c\mathbf{E}(X_k)}{a+b+kc} \\ &= \frac{a+b+(k-1)c}{a+b+kc}\mathbf{P}(X_k = 1) + \frac{c\mathbf{P}(X_k = 1)}{a+b+kc} \\ &= \frac{a+b+kc}{a+b+kc}\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = 1).\end{aligned}$$

   (c) Puisque les X_k sont des indicatrices, elles ne prennent que les valeurs 0 et 1, et donc suivent des lois de Bernoulli. Et la question précédente prouve donc qu'elles suivent toutes la même loi de Bernoulli. On a en particulier $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$, et donc X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.
   On en déduit notamment que $\mathbf{E}(X_n) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbf{V}(X_n) = \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = \frac{ab}{(a+b)^2}$.

3. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) = n\mathbf{E}(X_1) = \frac{nb}{a+b}.$$

4. (a) L'événement *obtenir k rouges puis $n-k$ blanches* est l'événement $A = \bigcap_{i=1}^{k}[X_i = 1] \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i = 0]$.

Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1)\cdots\mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=1]}(X_k = 1)\\
&\quad\times \mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=1]}(X_{k+1} = 0)\cdots\mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{n-1}=0]}(X_n = 0)\\
&= \frac{b}{a+b}\frac{b+c}{a+b+c}\cdots\frac{b+(k-1)c}{a+b+(k-1)c}\cdot\frac{a}{a+b+(k-1)c}\cdots\frac{a+(n-k-1)c}{a+b+(n-1)c}\\
&= \frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.
\end{aligned}$$

(b) Si on raisonne comme à la question précédente, les seuls termes qui vont changer vont être le $k^{\text{ème}}$ et le $(k+1)^{\text{ème}}$, qui vont être remplacés respectivement par

$$\frac{a}{a+b+(k-1)c} \text{ et } \frac{b+(k-1)c}{a+b+kc}.$$

Ceci ne change pas le produit, et donc la probabilité d'obtenir d'abord $k-1$ rouges, puis une blanche, puis une rouge, puis des blanches est la même que celle calculée à la question précédente.

(c) Plus généralement, le même raisonnement prouve que tout échange d'un tirage donnant une boule blanche avec un tirage donnant une boule rouge ne change pas la probabilité. Et plus généralement, si $(i_1, \dots, i_n)$ est un n-uplet d'éléments de $\{0, 1\}$ comportant exactement k 1, alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right) = \frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.$$

Mais si on note $E_k = \{(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}$ l'ensemble des n-uplets comportant exactement k fois 1, alors

$$[S_n = k] = \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in E_k}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right)$$

l'union étant disjointe. Donc

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in E_k}\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right) = \mathrm{Card}(E_k)\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.$$

Puisque choisir un élément de E_k revient à choisir la position des 1, on a donc $\mathrm{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$ et donc

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.$$

(d) Dans le cas très particulier où $a = b = c = 1$, on a $\pi(i,j) = i(i+1)\cdots(i+j-1)$, et donc

$$\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)} = \frac{1(1+1)\cdots(1+k-1)\cdot 1(1+1)\cdots(1+n-k-1)}{2\times 3\times\cdots\times(2+n-1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

si bien que

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Et donc S_n suit la loi uniforme sur $[0, n]$.

(e) Le plus simple est de remarquer que puisque S_n est à valeurs dans $[0, n]$, alors $\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$. Soit encore

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)} = 1 \text{ et donc } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi(b,k)\pi(a,n-k) = \pi(a+b,n).$$

5. Soit $n \geqslant 2$.

(a) Il n'y a à peu près rien à dire, il suffit de sortir les deux premiers termes du produit.

(b) Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_n^2 - S_n) = \mathbf{E}(S_n(S_n-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(S_n = k) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(S_n = k) \\ &= \frac{1}{\pi(a+b,n)} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\pi(b,k)\pi(a,n-k).\end{aligned}$$

Les termes de la somme pour $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls.
Commençons par appliquer deux fois la formule dite adu capitaine : pour $k \geqslant 2$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-2)\binom{n-2}{k-2}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_n^2 - S_n) &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2}\pi(b,k)\pi(a,n-k) \\ &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i}\pi(b,i+2)\pi(a,n-2-i) \\ &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} b(b+c)\pi(b+2c,i)\pi(a,n-2-i) \\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{\pi(a+b,n)} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i}\pi(b+2c,i)\pi(a,n-2-i) \\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{\pi(a+b,n)}\pi(a+b+2c,n-2) \\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)\pi(a+b+2c,n-2)}\pi(a+b+2c,n-2) \\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}.\end{aligned}$$

(c) Par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) - \mathbf{E}(S_n)^2 &= \mathbf{E}(S_n^2 - S_n) + \mathbf{E}(S_n) - \mathbf{E}(S_n)^2 \\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{nb}{a+b} - \frac{n^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{nb}{(a+b)^2(a+b+c)}\big((n-1)(b+c)(a+b) + (a+b+c)(a+b) - nb(b+c)\big) \\ &= \frac{nb}{(a+b)^2(a+b+c)}\big(na(b+c) + a(a+b) - nab\big) \\ &= \frac{nab(a+b+nc)}{(a+b)^2(a+b+c)}.\end{aligned}$$