Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.
On dit qu'un entier i est un point fixe d'une permutation f lorsque $f(i) = i$.
On note γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe. On adopte la convention $\gamma_0 = 1$.

Partie I - Propriétés de la suite (γ_n)

1) A l'aide d'un schéma, donner les éléments de $\mathcal{S}_1$ puis donner la valeur de γ_1.
Puis, faire de même pour trouver γ_2 et γ_3.
2) On suppose dans cette question que $n = 4$.
   -a- Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_4$ ayant exactement deux points fixes?
   -b- Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_4$ ayant exactement un points fixe?
   -c- Calculer γ_4.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   -a- Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$?
   -b- Pour $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes à l'aide de n, k et des valeurs γ_0, γ_1,..., γ_n.
   -c- Établir pour tout entier naturel n la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k = n!$.
   -d- En déduire la valeur de γ_5.
   Application: en arrivant à une fête, 5 personnes déposent leur manteau au vestiaire. En fin de soirée, chacune de ces 5 personnes repart en prenant, au hasard, un des 5 manteaux. Quelle est la probabilité qu'aucun des invités ne porte son manteau?

Partie II - Une méthode de calcul de (γ_n)

On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$ $(*)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$.

1) Calculer α_1, α_2, α_3 et α_4.
2) -a- Calculer β_1, β_2 et β_3.
   -b- Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   -c- Montrer alors que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.
3) -a- Rappeler la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k$.
   -b- Montrer que $u_{n+1} = (n+1)u_n$.
   -c- Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété: $\mathcal{P}(n)$: "$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \alpha_k = \gamma_k$".
Donner alors une expression de γ_n en fonction de n.
5) En déduire l'existence et la valeur de la limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_n}{n!}$. Que représente cette valeur?