Exercice 1

Partie I - Propriétés de la suite (γ_n)

1) $\boxed{\gamma_1 = 0}$ et $\boxed{\gamma_2 = 1}$ $\boxed{\gamma_3 = 2}$.

2) On suppose dans cette question que $n = 4$.

-a- Pour dénombrer les bijections de $\mathcal{S}_4$ ayant exactement deux points fixes:

- on choisit les deux points fixes: $\binom{4}{2} = 6$ choix
- 1 choix pour leur image
- reste à construire une bijection sans point fixe entre les deux éléments restants: $\gamma_2 = 1$ choix

Au final $\boxed{\text{6 bijections de } \mathcal{S}_4 \text{ ayant exactement deux points fixes}}$.

-b- Pour dénombrer les bijections de $\mathcal{S}_4$ ayant exactement un point fixe:

- on choisit le point fixe: 4 choix
- 1 choix pour l'image
- il faut construire une bijection sans point fixe entre les éléments restants: $\gamma_3 = 2$ choix (d'après 1)).

Au final $\boxed{\text{8 bijections de } \mathcal{S}_4 \text{ ayant exactement un point fixe}}$.

-c- Les bijections sans point fixe sont les bijections desquels on retire les bijections avec exactement 1 point fixe (8), avec exactement 2 points fixes (6), avec exactement 3 points fixes (0 car le quatrième serait fixé), avec exactement 4 points fixes (1, l'application identité). Donc $\gamma_4 = 4! - 8 - 6 - 1$ donc $\boxed{\gamma_4 = 9}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

-a- $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = n!}$.

-b- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour dénombrer les éléments de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes:

- on choisit les k points fixes: $\binom{n}{k}$ choix
- on construit une bijection sans point fixe entre les éléments restants: γ_{n-k} choix

Au final $\boxed{\binom{n}{k}\gamma_{n-k} \text{ éléments de } \mathcal{S}_n \text{ ayant exactement } k \text{ points fixes}}$.

-c- $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe des A_k où A_k est l'ensemble des bijections avec exactement k points fixes. Donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k).$$

Or $\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k}\gamma_{n-k}$ d'après 3)-b-, d'où:

$$\begin{aligned} n! &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\gamma_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\gamma_{n-k} \qquad \text{(formule de symétrie)} \\ &\boxed{n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\gamma_j} \qquad \text{(changement d'indice } j = n-k\text{).} \end{aligned}$$

-d- On prend $n = 5$ dans 3)-c-,

$$\gamma_0\binom{5}{0} + \gamma_1\binom{5}{1} + \gamma_2\binom{5}{2} + \gamma_3\binom{5}{3} + \gamma_4\binom{5}{4} + \gamma_5\binom{5}{5} = 5!$$

Avec les valeurs de γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 déjà trouvées, on obtient:

$$\gamma_5 = 120 - 1 - 0 - 10 - 20 - 45 \qquad \text{donc } \boxed{\gamma_5 = 44}.$$

Application: en arrivant à une fête, 5 personnes déposent leur manteau au vestiaire. En fin de soirée, chacune de ces 5 personnes repart en prenant, au hasard, un des 5 manteaux.

$\boxed{\text{La probabilité qu'aucun des invités ne porte son manteau est } \frac{\gamma_5}{5!} = \frac{11}{30}}$.

Partie II - Propriétés de la suite (γ_n)

On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1) $\alpha_1 = \alpha_0 - 1$ donc $\boxed{\alpha_1 = 0}$. $\quad \alpha_2 = 2\alpha_1 + 1$ donc $\boxed{\alpha_2 = 1}$.
$\alpha_3 = 3\alpha_2 - 1$ donc $\boxed{\alpha_3 = 2}$. $\quad \alpha_4 = 4\alpha_3 + 1$ donc $\boxed{\alpha_4 = 9}$.

2) -a- $\beta_1 = 1 - 1$ donc $\boxed{\beta_1 = 0}$. $\quad \beta_2 = 2!(1 - 1 + \frac{1}{2})$ donc $\boxed{\beta_2 = 0}$. $\quad \beta_3 = 3!(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6})$ donc $\boxed{\beta_3 = 2}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} - (n+1)\beta_n &= (n+1)!\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n+1)!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\ &= (n+1)!\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (-1)^{n+1}}.$$

-c- Montrons par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:"$\alpha_n = \beta_n$".

- **Initialisation**. $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \qquad \text{(par définition de } \alpha_n\text{)} \\ &= (n+1)\beta_n + (-1)^{n+1} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \beta_{n+1} \qquad \text{(d'après 2)-b-) .} \end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$.

3) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de newton,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 1^{n+1-k} = (1-1)^{n+1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = 0}.$$

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha_k \\
&= \binom{n+1}{0} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (k\alpha_{k-1} + (-1)^k) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} k\alpha_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} k\alpha_{k-1} + 0 - 1 \qquad \text{(II-3)-a-)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1} (j+1)\alpha_j \qquad \text{(changement d'indice } k = j+1\text{)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{n+1}{j+1} \binom{n}{j} (j+1)\alpha_j \qquad \text{(formule du sélectionneur)} \\
&= (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha_j
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n}.$$

4) On peut itérer la relation précédente:

$$u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+1)nu_{n-1} = (n+1)n(n-1)u_{n-2} = \ldots = (n+1)n \times 2 \times 1u_0 = (n+1)!.$$

Montrons par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:"$u_n = n!$".

- **Initialisation**. $u_0 = 1 = 0!$.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (n+1)u_n \\
&= (n+1)n! \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)!.
\end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = n!}$.

Remarque : on peut aussi obtenir le résultat par téléscopage du produit $\dfrac{u_n}{u_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = n!$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \alpha_k = \gamma_k\text{"}.$$

- **Initialisation**. Soit $k \in [\![0, 0]\!]$, $\alpha_0 = 1 = \gamma_0$.

- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors au rang $n+1$, soit $k \in [\![0, n+1]\!]$. Déja, par hypothèse de récurrence, $\alpha_k = \gamma_k$ si $0 \leqslant k \leqslant n$, puis d'après I)-3)-c- et II-4),

$$(n+1)! = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \gamma_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha_k.$$

D'où:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \gamma_k + \binom{n+1}{n+1} \gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \alpha_k + \binom{n+1}{n+1} \alpha_{n+1}$$

Les deux sommes ci-dessus sont égales, car d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \gamma_k$. Et donc $\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1}$.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \alpha_k = \gamma_k}$.

En particulier, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \alpha_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$ d'après B-2)-c-.

6) On déduit $\dfrac{\gamma}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. En reconnaissant la somme partielle d'une série exponentielle, on déduit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma_n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}}$. Interprétation: si n invités, quand n grandit la probabilité qu'aucun ne retrouve son chapeau tend vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.