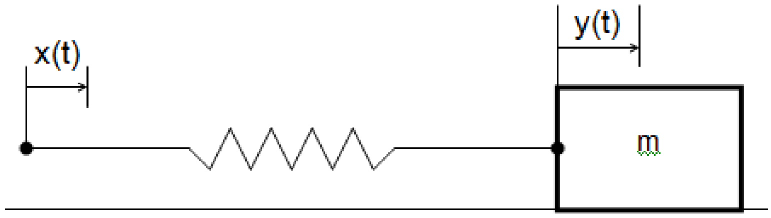
Corrigé du TD Etude des SLCI

Exercice 1.

Etude d'un système masse ressort



Cas sans frottement

Question 1 Calcul de la fonction de transfert

Equation de comportement du système : $$m.\frac{d^2y(t)}{dt^2} = k.(x(t) - y(t))$$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m.p^2.Y(p) = k.(X(p) - Y(p)) \qquad H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{m.p^2 + k}$$

Question 2 Calcul de la réponse à une impulsion

Entrée impulsion : $x(t) = \delta(t)$ ⇨ $X(p) = 1$

Sortie : $Y(p) = H(p).X(p) = \dfrac{k}{m.p^2 + k}$

On utilise le tableau des transformée usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$Y(p) = \frac{\frac{k}{m}}{p^2 + \frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}.\sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2 + \frac{k}{m}} \quad ⇨ \quad y(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}.\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right).u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie.

Question 3 Calcul de la réponse à un échelon unitaire

Entrée échelon unitaire : $x(t) = u(t)$ ⇨ $X(p) = \dfrac{1}{p}$

Sortie : $Y(p) = H(p).X(p) = \dfrac{k}{p.(m.p^2 + k)}$

On décompose en éléments simples : $Y(p)\dfrac{k}{p.(m.p^2+k)}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b.p}{m.p^2+k}$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

$$Y(p)=\frac{k}{p.(m.p^2+k)}=\frac{1}{p}+\frac{-m.p}{m.p^2+k}$$

On utilise le tableau des transformée usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\frac{k}{m}} \quad ⇨ \quad y(t)=\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t\right)\right).u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie décalée.

Question 4 Prise en compte des frottements.

Equation de comportement du système : $m.\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=k.(x(t)-y(t))-\lambda.\dfrac{dy(t)}{dt}$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m.p^2.Y(p)=k.(X(p)-Y(p))-\lambda.p.Y(p)$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{m.p^2+\lambda.p+k}$$

Question 4 Prise en compte de frottements faibles

On fait l'application numérique (frottements faibles) : $H(p)=\dfrac{5}{p^2+2.p+5}$

Entrée impulsion : $x(t)=\delta(t)$ ⇨ $X(p)=1$

Sortie : $Y(p)=H(p).X(p)=\dfrac{5}{p^2+2.p+5}$

Les racines du dénominateur sont imaginaires, on va mettre $Y(p)$ sous la forme $\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ afin de passer dans le domaine temporel.

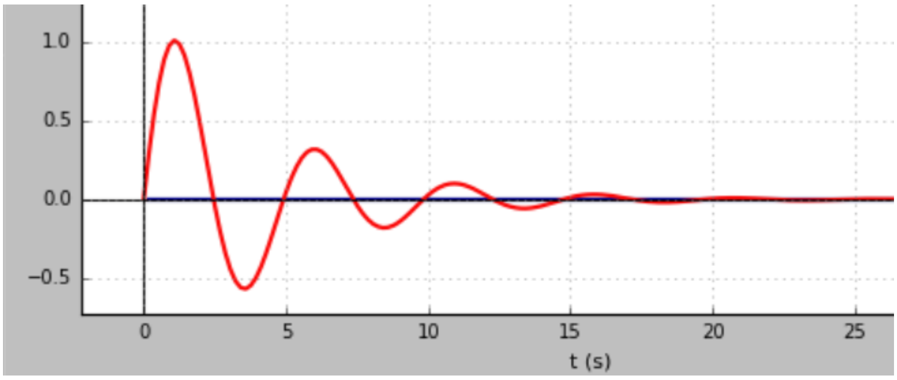
On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement

Domaine temporel	*Domaine de Laplace*	*Domaine temporel*	*Domaine de Laplace*
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{-a.t} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

$$Y(p) = \frac{\frac{5}{2} * 2}{(p+1)^2 + 2^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{5}{2} e^{-t}.\sin(2t).u(t)$$

Courbe :

Fonction sinusoïdale amortie



Cas avec frottements importants

Toujours avec une Entrée impulsion, on fait l'application numérique :

$$Y(p) = H(p).X(p) = \frac{5}{p^2 + 6.p + 5}$$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{5}{(p+1).(p+5)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+5}$$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

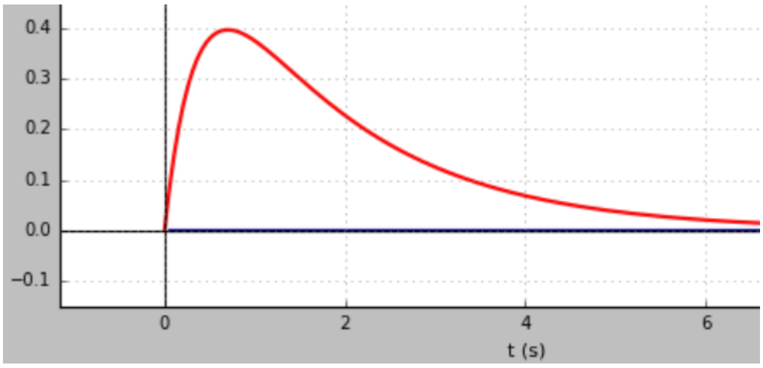
$$Y(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+5} = \frac{a.(p+5) + b.(p+1)}{(p+1).(p+5)} = \frac{5.a + b + (a+b).p}{(p+1).(p+5)}$$

$$5.a + b = 5 \quad \text{et} \quad a + b = 0$$

On trouve $a = \frac{5}{4}$ et $b = -\frac{5}{4}$ $Y(p) = \frac{5}{4}.\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+5}\right)$

On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement pour repasser dans le domaine temporel : $y(t) = \frac{5}{4}.(e^{-t} - e^{-5.t}).u(t)$

Courbe :



Exercice 2.

1. On applique la TL à l'équation $\frac{ds(t)}{dt} + 2.s(t) = 3.e(t)$ (CI = 0)

On trouve la fonction de transfert : $H(p) = \frac{4}{p+2}$

L'entrée est un échelon unitaire : $E(p) = \frac{1}{p}$

Sortie : $S(p) = H(p).E(p) = \frac{3}{p.(p+2)}$

On décompose $Y(p)$ en éléments simples : $S(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+2}$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur…

$$S(p) = \frac{3}{2}.\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right)$$

Puis on repasse dans le domaine temporel : $s(t) = \frac{2}{3}\left(1 - .e^{-2.t}\right).u(t)$

2. On applique la TL à l’équation $\frac{d^2s(t)}{dt^2}+8.\frac{ds(t)}{dt}+25.s(t)=2.e(t)$ (CI = 0)

On trouve la fonction de transfert : $H(p)=\frac{2}{p^2+8.p+25}$

Entrée impulsion : $e(t)=\delta(t)$ ⇨ $E(p)=1$

Sortie : $S(p)=H(p).E(p)=\frac{2}{p^2+8.p+25}$

Les racines du dénominateur sont imaginaires, on utilise le tableau et le théorème de l’amortissement :

Domaine temporel	*Domaine de Laplace*	*Domaine temporel*	*Domaine de Laplace*
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{-a.t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

$$S(p)=\frac{2}{3}.\frac{3}{(p+4)^2+9}$$

$$s(t)=\frac{2}{3}e^{-4t}.\sin(4t).u(t)$$

3. $S(p)=H(p).E(p)=\frac{3}{p^2+12.p+32}.\frac{1}{p}=\frac{3}{p.(p^2+12.p+32)}$

$$S(p)=\frac{3}{p.(p+4).(p+8)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p+4}+\frac{c}{p+8}$$

$$S(p)=\frac{3}{32}.\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p+4}+\frac{1}{p+8}\right)$$

$$s(t)=\frac{3}{32}-\left(1+2.e^{-4.t}+e^{-8.t}\right).u(t)$$

4. *Soit la fonction* $S(p)=\frac{2.p+3}{p^2+6.p+2}$ *, déterminer s(0), s(∞) et s’(0) en utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales.*

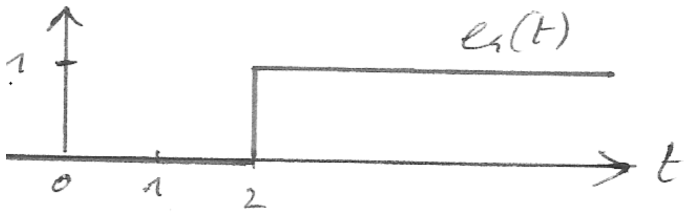
$$p.S(p)=\frac{p.(2.p+3)}{p^2+6.p+2} \qquad s(0+)=2 \qquad s(\infty)=0$$

$$s'(0)=\lim_{t\to 0} s'(t)=\lim_{p\to\infty} p.[p.S(p)-s(0+)]$$

$$p.[p.S(p)-s(0+)]=p.[\frac{p.(2p+3)}{p^2+6.p+2}-2]=\frac{-p.(9.p+4)}{p^2+6.p+2} \qquad s'(0)=-9$$

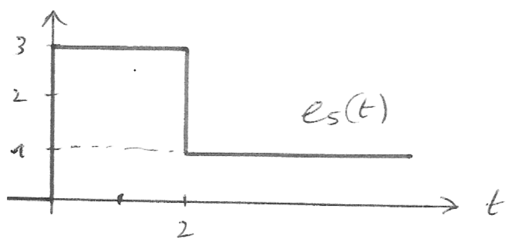
Exercice 3.

$e_4(t) = u(t-2)$



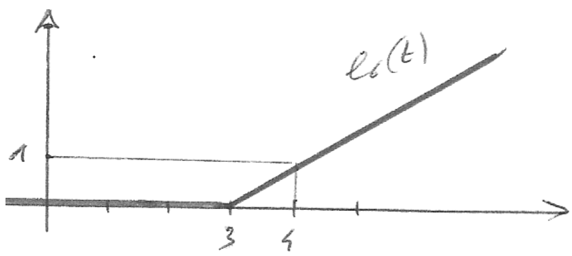
$$E_4(p)=\frac{e^{-2.p}}{p}$$

$e_5(t) = 3.u(t) - 2.u(t-2)$

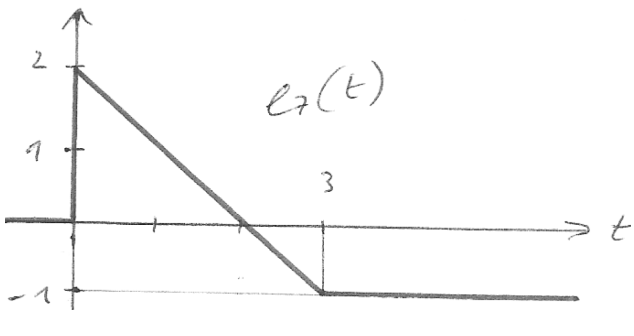


$$E_5(p)=\frac{3-2.e^{-2.p}}{p}$$

$e_6(t) = (t-3).u(t-3)$



$$E_6(p)=\frac{e^{-3.p}}{p^2}$$



$e_7(t) = 2.u(t) - t.u(t) + (t-3).u(t-3)$

$$E_7(p)=\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-3.p}}{p^2}$$

Exercice 4.

5. On applique la TL à l'équation $\frac{d^2s(t)}{dt^2}+7.\frac{ds(t)}{dt}+12.s(t)=4.e(t)$ (CI = 0)

On trouve la fonction de transfert : $H(p)=\frac{4}{p^2+7.p+12}$

L'entrée est un échelon unitaire : $E(p)=\frac{1}{p}$

Sortie : $S(p)=H(p).E(p)=\frac{4}{p.(p^2+7.p+12)}$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$S(p)=\frac{4}{p.(p+4).(p+3)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p+4}+\frac{c}{p+3}$$

On trouve a, b et c en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur…

Puis on repasse dans le domaine temporel : $s(t)=\frac{1}{3}\left(1+3.e^{-4.t}-4.e^{-3.t}\right).u(t)$

6. *Soit le système défini par la fonction de transfert* $H(p)=\frac{p+5}{p^2+6.p+13}$ *,*

déterminer la réponse temporelle de ce système à une impulsion.

$$S(p)=H(p).E(p)=\frac{p+5}{p^2+6.p+13}.1=\frac{p+3+2}{(p+3)^2+4}$$

$$s(t)=\left(e^{-3.t}.\cos(2.t)+e^{-3.t}.\sin(2.t)\right).u(t)$$