

REPONSE FREQUENTIELLE DES SLCI

I. DEMARCHE

Dans ce chapitre, nous allons soumettre les systèmes à une entrée sinusoïdale (entrée harmonique) :

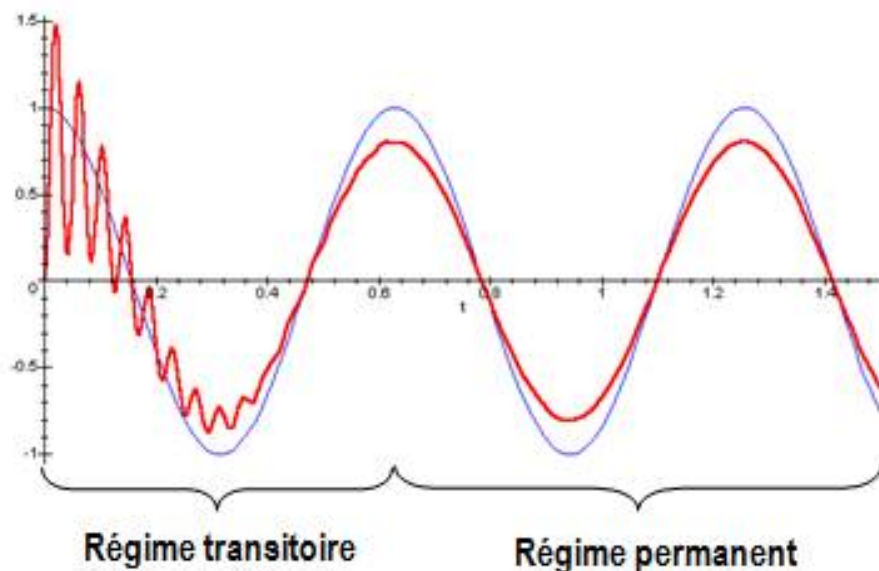
$$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t) \quad E_0 \text{ et } \omega \text{ imposées}$$

On observe que $s(t)$ se décompose en un régime transitoire et un régime permanent.

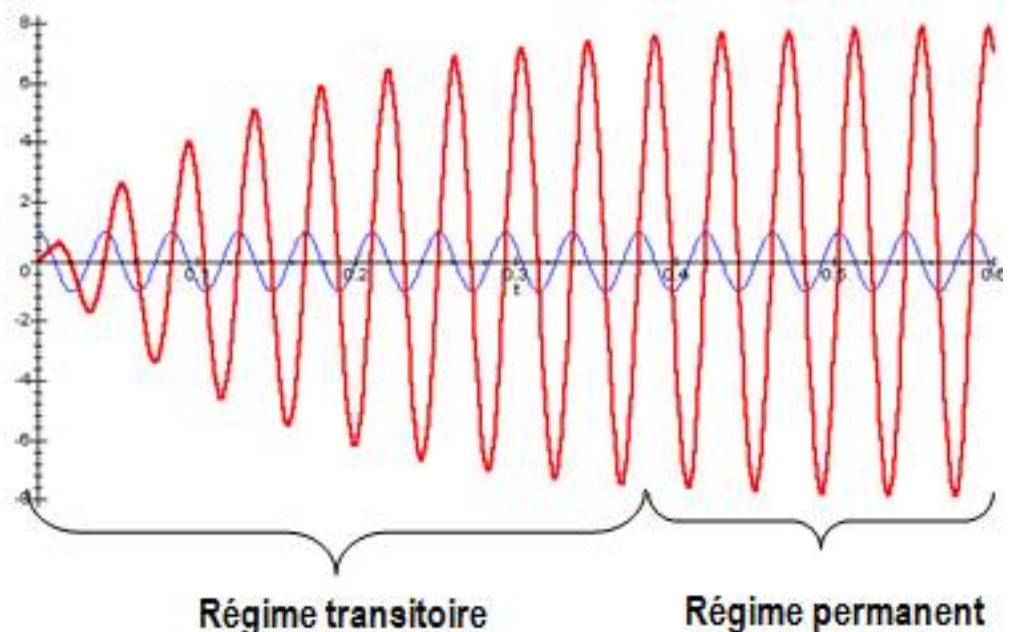
Exemples : Avec un système du second ordre : $K = 0,8$; $z = 0,05$; $\omega_n = 150 \text{ rad/s}$

Pour une entrée $e(t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$

Avec $\omega = 10 \text{ rad/s}$



Avec $\omega = 150 \text{ rad/s}$



L'effet du régime transitoire disparaît avec le temps, il ne reste plus que le régime permanent appelé aussi régime forcé.

Ce régime permanent $s_p(t)$ est de forme sinusoïdale de même pulsation ω que l'entrée mais d'amplitude S_0 différente et déphasé d'un angle φ .

$$s_p(t) = S_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot u(t) \quad \text{avec : } \omega : \text{Pulsation de l'entrée.}$$

S_0 : Amplitude de la sortie.

φ : Déphasage de la sortie.

L'étude fréquentielle va consister à étudier l'amplitude S_0 de la sortie $s_p(t)$ ou plus

particulièrement la variation d'amplitude $A = \frac{S_0}{E_0}$ et le déphasage φ de la sortie par rapport à l'entrée en fonction de la pulsation ω et des caractéristiques du système.

Méthode : Lorsque l'on donne à la variable p une valeur imaginaire pure $p = j \cdot \omega$ on obtient la fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(H(j\omega))$$

L'étude consiste à représenter graphiquement $|H(j\omega)|$ et φ en fonction de ω .

II. LES DIAGRAMMES DE BODE

Les diagrammes de Bode représentent séparément le **module** et la **phase** de la fonction $H(j\omega)$ en fonction de ω en rad/s, représentée en $\log_{10}$ (échelle logarithme décimal) :

- ✓ Diagramme de Gain, le gain est représenté en dB (décibel) :

$$G_{db}(\omega) = A_{db}(\omega) =$$

- ✓ Diagramme de phase : $\varphi =$ (En degré).

Remarque 1 : On parle de « décade » entre ω et $10 \cdot \omega$.

Remarque 2 : Cette représentation se prête bien à l'analyse des fonctions de transfert.

Exemple dans le cas d'une fonction de transfert $H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega)$

$$G_{db} = 20.\log(|H(j\omega)|) = 20.\log(|H_1(j\omega)|) + 20.\log(|H_2(j\omega)|)$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

Graphiquement, il suffit d'ajouter les diagrammes des fonctions $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$ pour obtenir les diagrammes de $H(j\omega)$.

Attention :

- ✓ Dans les diagrammes de Bode, il n'y a pas de « $\omega = 0$ rd/s » qui est rejeté à $-\infty$
- ✓ $G_{db} = 0$ db lorsque $|H(j\omega)| = 1$

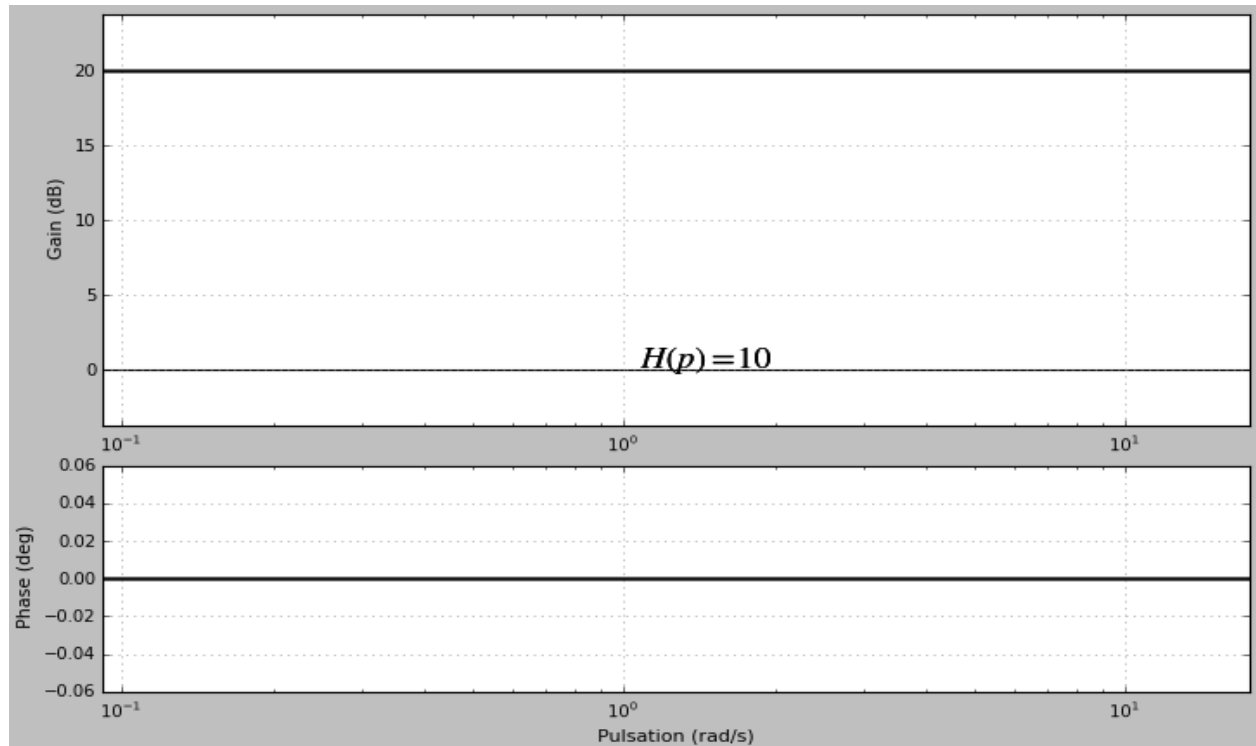
III. SYSTEME A ACTION PROPORTIONNELLE

$$s(t) = K.e(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(p) = K.E(p) \quad \Leftrightarrow \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

$$|H(j\omega)| = K$$

$$G_{db} = 20.\log|H(j\omega)| = 20.\log K \quad (\text{Droite horizontale})$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0^\circ \quad (\varphi = -180^\circ \text{ si } K \text{ est négatif}).$$



IV. SYSTEME DERIVATEUR PUR

$$s(t) = \frac{de(t)}{dt} \Rightarrow S(p) = p.E(p) \Rightarrow H(p) = p$$

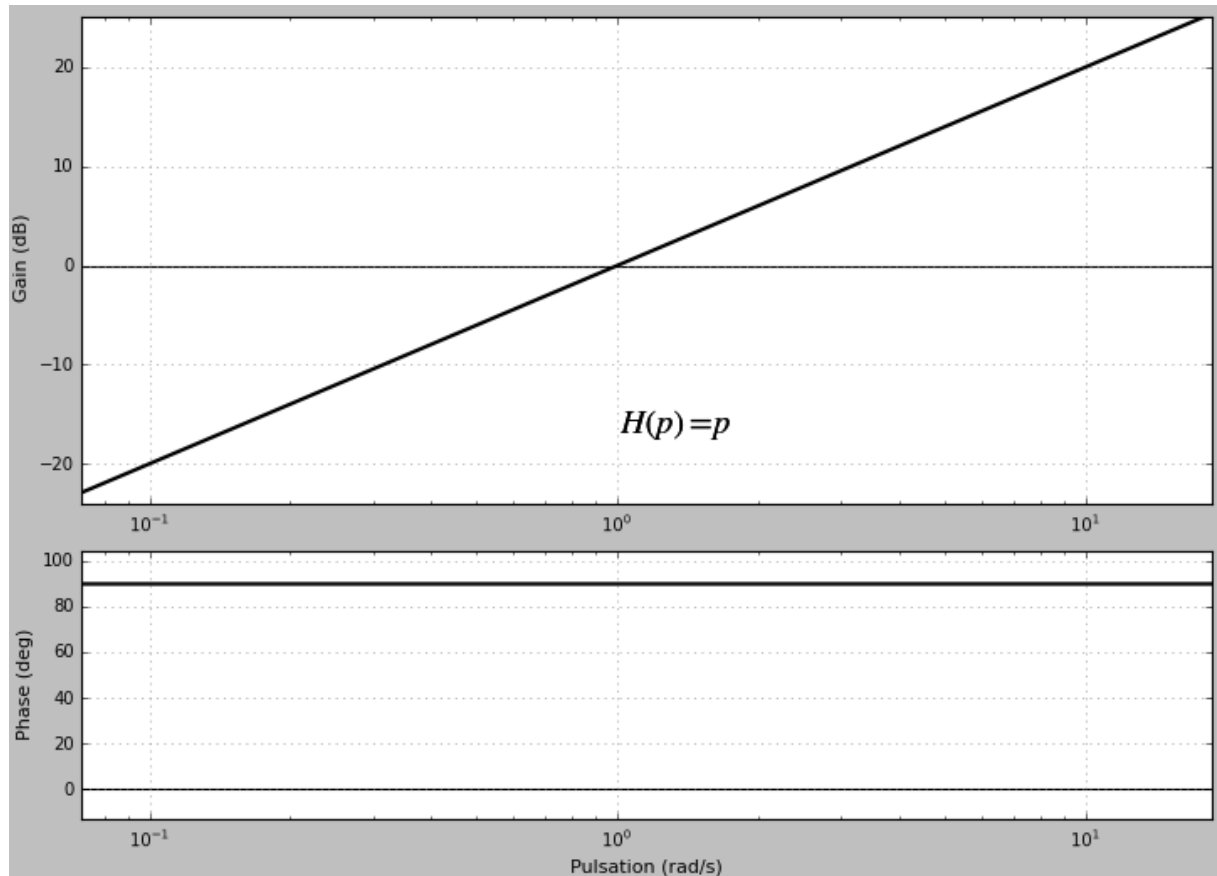
$$H(j\omega) = j\omega \Rightarrow |H(j\omega)| = \omega$$

$$G_{db} = 20.\log|H(j\omega)| = 20.\log \omega$$

(Droite de pente 20 db/décade passant par l'origine)

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(j\omega) = 90^\circ$$

(Imaginaire pur positif)



V. SYSTEME INTEGRATEUR PUR

$$S(p) = \frac{E(p)}{p} \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

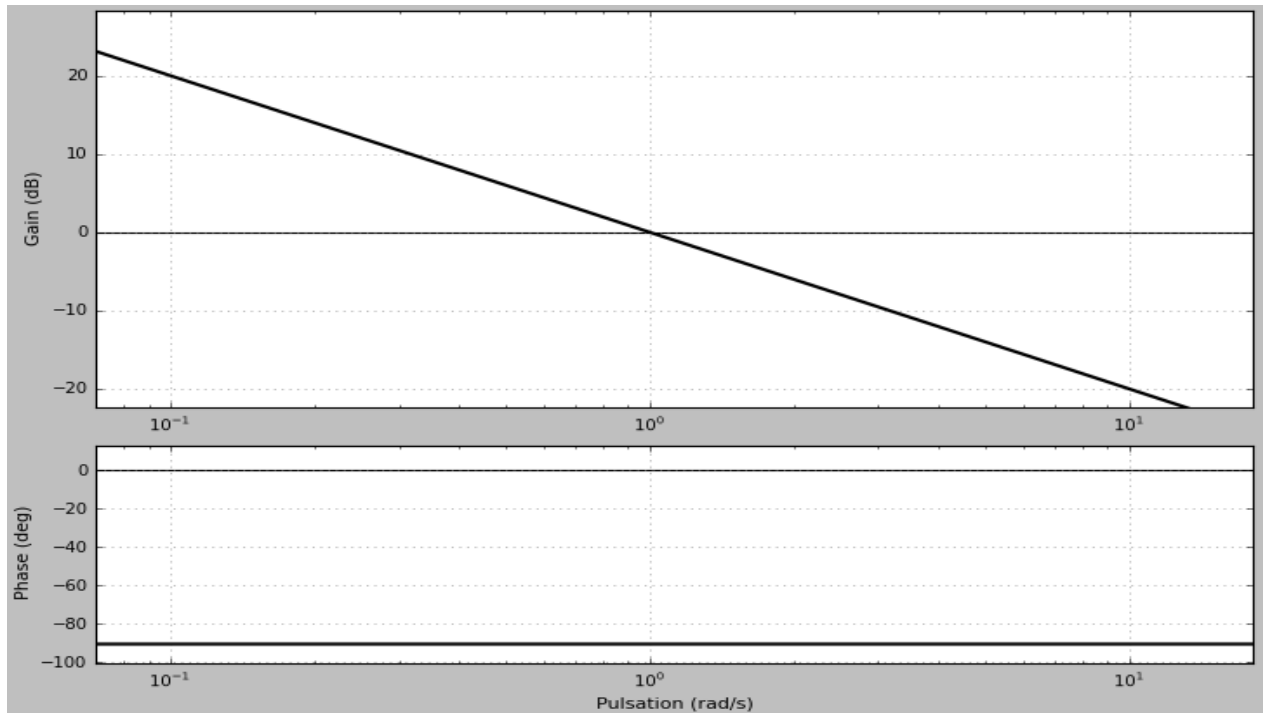
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{1}{\omega} = -20 \cdot \log \omega$$

(Droite de pente -20 db/décade passant par l'origine)

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(-\frac{j}{\omega}\right) = -90^\circ$$

(Imaginaire pur négatif)



VI. SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Fonction de transfert d'un système du premier ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + (\omega\tau)^2)$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{1 + j\omega\tau}\right) = \arg\left(\frac{K \cdot (1 - j\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

On distingue deux zones pour ces courbes :

Zone de basse fréquence : $\omega \rightarrow 0$ alors $\omega\tau \ll 1$

$$H(j\omega) \approx K$$

$$G_{db} \approx 20 \cdot \log K \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

$$\varphi \approx 0^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Zone de haute fréquence : $\omega \rightarrow \infty$ alors $\omega\tau \gg 1$

$$H(j.\omega) \approx \frac{K}{j.\omega.\tau} = -\frac{j.K}{\omega.\tau}$$

$$|H(j.\omega)| \approx \frac{K}{\omega.\tau}$$

$$G_{db} \approx 20.\log \frac{K}{\tau} - 20.\log \omega \quad (\text{Asymptote de pente } -20 \text{ db/décade})$$

$$\varphi \approx -90^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Intersection des asymptotes : $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$

✓ Les asymptotes de gain se coupent à : $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$
(Appelée pulsation de cassure).

$$\text{Pour } \omega = \frac{1}{\tau} : H(j.\omega) = \frac{K}{1+j} = \frac{K.(1-j)}{2}$$

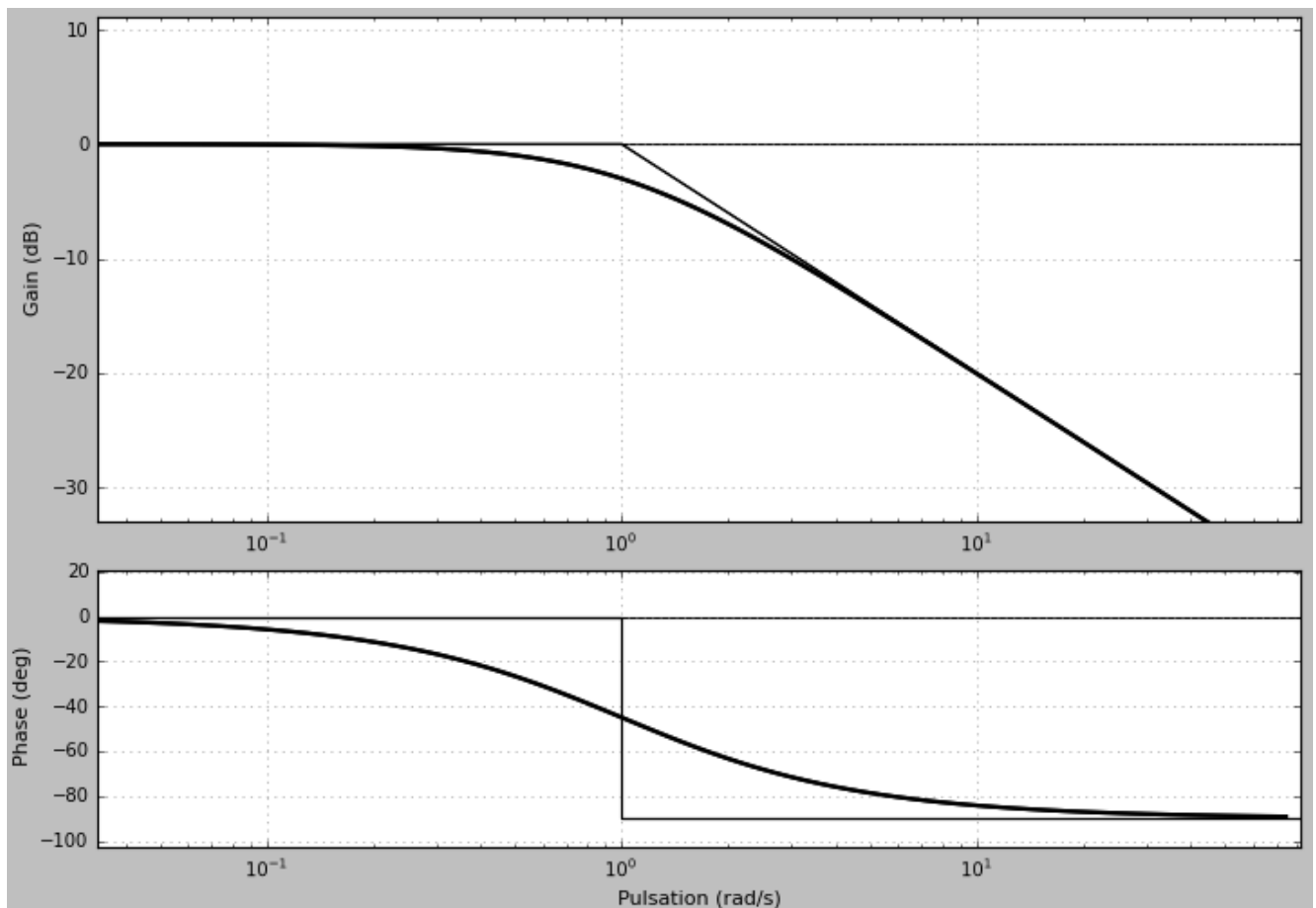
$$|H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$G_{db} = 20.\log K - 20.\log \sqrt{2} = 20.\log K - 3$$

$$\varphi = -45^\circ$$

Remarques :

- ✓ Un système du premier ordre se comporte comme un filtre passe bas avec une bande passante à -3_{dB} comprise entre 0 et ω_c .
- ✓ Les valeurs réelles de gain et de phase sont utilisées pour avoir des valeurs particulières.



Identification :

Pour ω proche de 0, $G_{db} = 20 \cdot \log K \Rightarrow K$ peut être déterminé.

La pulsation de cassure $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$ permet de déterminer τ .

VII. SYSTEME DU SECOND ORDRE

La fonction de transfert d'un 2^{ème} ordre :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot j\omega + 1} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0} \cdot j}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{db} = 20.\log K - 10.\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2.z.\omega.\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (\text{si } K > 0)$$

On distingue 3 zones pour ces courbes :

Zone de basse fréquence : $\omega \rightarrow 0$ alors $\omega \ll \omega_0$

$$H(j\omega) \approx K$$

$$G_{db} \approx 20.\log K \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

$$\varphi \approx 0^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Zone de haute fréquence : $\omega \rightarrow \infty$ alors $\omega \gg \omega_0$

$$H(j\omega) \approx \frac{K}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{K.\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$|H(j\omega)| \approx \frac{K.\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$G_{db} \approx 20.\log K + 40.\log \omega_0 - 40.\log \omega$$

(Asymptote de pente -40 db/décade)

$$\varphi \approx -180^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Intersection des asymptotes (zone de moyenne fréquence) : $\omega \approx \omega_0$

Valeur particulière pour $\omega = \omega_0$: $H(j\omega_n) = \frac{K}{2.z.j}$

$$|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2.z} \quad G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = -90^\circ$$

Résonance : Pour certaine valeur de z , la courbe de gain peut présenter un maximum.

On reprend :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

On cherche les valeurs de ω qui annulent $\frac{d(|H(j\omega)|)}{d\omega}$.

Dans le cas $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$, $\omega = \omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2.z^2}$ annule $\frac{d(|H(j\omega)|)}{d\omega}$.

La pulsation ω_r est appelée pulsation de résonance (existe si $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$).

Amplitude de résonance : $|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}} \quad G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}}\right)$

Remarque : Si z faible, on a $\omega_r \approx \omega_0$ et $G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right)$

Bilan : on distingue 2 cas

 1^{er} cas : $0 < z < 1$

✓ $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$

La courbe est toujours au-dessus des asymptotes,

Le système présente une résonance :

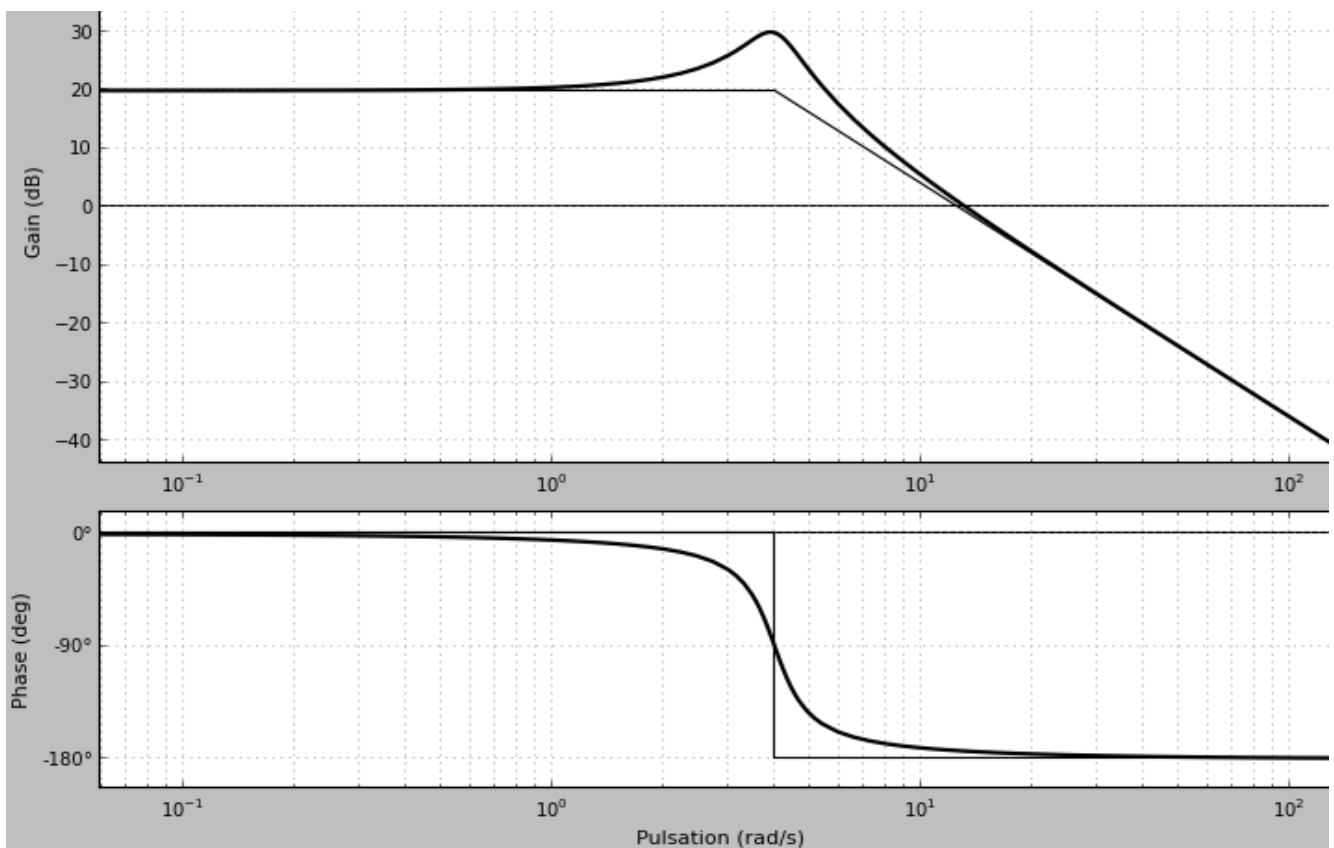
$$\omega = \omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log \left(\frac{K}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}} \right)$$

✓ $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$ La courbe est toujours au-dessous des asymptotes.

Pour $\omega = \omega_n$ $G_{db} = 20 \cdot \log \left(\frac{K}{2 \cdot z} \right)$

Tracé du diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre avec $z < 0,7$



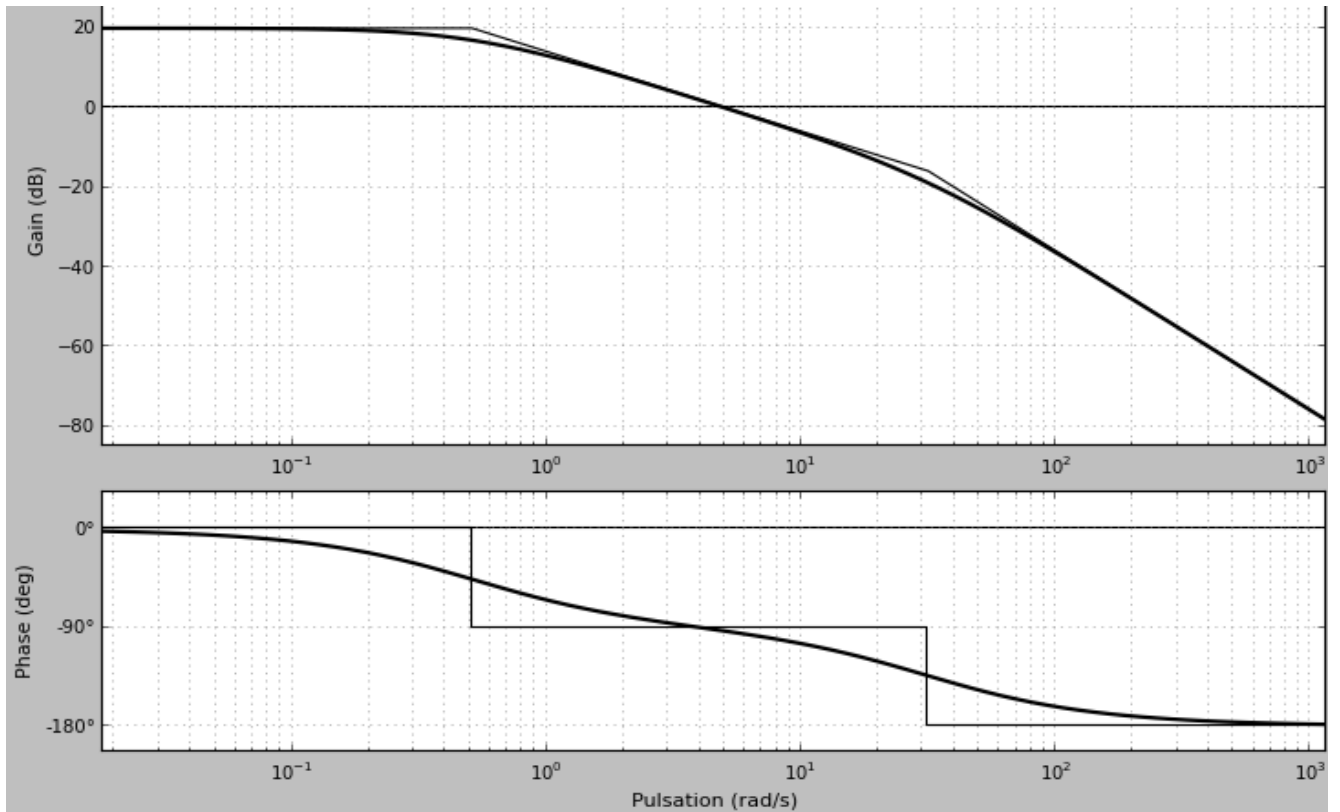
2^{ème} cas : $z \geq 1$

La fonction de transfert est le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre :

$$H(p) = K \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \quad \Rightarrow \quad H(p) = K \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

Il est donc possible d'appliquer la règle de superposition pour obtenir $H(p)$.

Tracé du diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre avec $z > 1$



Remarque : Pour tracer un diagramme de Bode, on utilise très largement les résultats du cours sans les redémontrer

Exercices

1. Tracer le diagramme de Bode de $H(p) = \frac{4}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$

2. Tracer le diagramme de Bode de $H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$

Déterminer l'extrémum de phase.

3. Tracer le diagramme de Bode de $H(p) = \frac{25}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{4} + \frac{p^2}{4}\right)}$

Compléments Diagramme de Bode

I. Réponse d'un SLCI à une entrée sinusoïdale.

Soit un système linéaire, continu et invariant (SLCI).



On le sollicite avec une entrée sinusoïdale : $e(t) = e_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$

Dans le domaine de Laplace : $E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$

Sortie dans le domaine de Laplace : $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

Pour repasser dans le domaine temporel, on décompose $S(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \dots + \dots + \dots + \frac{a \cdot p + b}{p^2 + \omega^2}$$

⇒ La première partie de la décomposition en éléments simples est une partie transitoire (elle tend vers 0 lorsque t tend vers ∞).

⇒ La deuxième partie de la décomposition en éléments simples est une partie permanente.

Conclusion : Dans le domaine temporel, en régime permanent, $s(t)$ est une fonction

sinusoïdale, de pulsation ω , d'amplitude S_0 et de déphasage φ :

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot u(t)$$

La fonction de transfert $H(p)$ est de forme générale :

$$H(p) = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Elle est obtenue à partir de l'équation différentielle :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

On le sollicite avec une entrée sinusoïdale : $e(t) = e_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Soit la fonction complexe :

$$\underline{e}(t) = e_0 \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)) = e_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

$e(t)$ est la partie imaginaire de $\underline{e}(t)$: $e(t) = \text{Im}(\underline{e}(t))$

La sortie en régime permanent est : $s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Soit la fonction complexe :

$$\underline{s}(t) = s_0 \cdot (\cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)) = s_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t + \varphi}$$

$s(t)$ est la partie imaginaire de $\underline{s}(t)$: $s(t) = \text{Im}(\underline{s}(t))$

Reprenons l'équation différentielle correspondant à la fonction de transfert $H(p)$:

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

On remplace $s(t)$ et $e(t)$ dans l'équation par leurs fonctions complexes et leurs dérivées.

De plus, on utilise : $\frac{d \underline{s}(t)}{dt} = s_0 \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t + \varphi} = (j \cdot \omega) \cdot \underline{s}(t)$

$$(a_n \cdot (j \cdot \omega)^n + \dots + a_0) \underline{s}(t) = (b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + \dots + b_0) \underline{e}(t)$$

$$\underline{s}(t) = \frac{b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + \dots + b_0}{a_n \cdot (j \cdot \omega)^n + \dots + a_0} \underline{e}(t) = H(j \cdot \omega) \cdot \underline{e}(t)$$

$$\underline{s}(t) = H(j \cdot \omega) \cdot e_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = |H(j \cdot \omega)| \cdot e_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$$

$$\underline{s}(t) = |H(j \cdot \omega)| \cdot e_0 \cdot (\cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi))$$

$$s(t) = \text{Im}(\underline{s}(t)) = |H(j \cdot \omega)| \cdot e_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$|H(j \cdot \omega)| \text{ est le module et } \varphi \text{ la phase de } H(j \cdot \omega).$$

Conclusion : Étudier la réponse à une entrée sinusoïdale revient à étudier le module et la phase de $H(j \cdot \omega)$.

II. Méthode pour tracer un diagramme de Bode en SI.

1. Identifier les cassures, les positionner dans l'ordre croissant.
2. Identifier les pentes de gain et les phases des asymptotes entre les cassures.

Utiliser les résultats du cours, sans les redémontrer.

3. Pour placer les asymptotes de Gain, rechercher une ou plusieurs valeurs.

Remarque 1 :

Pour trouver l'équation d'une asymptote de Gain, par exemple entre 2 cassures, il faut considérer que ω est grand par rapport à la première cassure et faible par rapport à la deuxième cassure. A partir de l'équation, on peut calculer une valeur.

Remarque 2 :

La différence dans le cas d'un premier ordre entre le réel et l'asymptote au niveau de la cassure est de 3 db.

4. Tracer les asymptotes de phase, puis la phase réelle.

5. Remarque 1.

Pour avoir des valeurs de phases, utiliser :

- ✓ Pour un premier

$$\text{ordre : } \varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{1 + j.\omega.\tau}\right) = -\arctan(\omega.\tau)$$

- ✓ Pour un deuxième ordre :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2.z.\omega.\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

6. Remarque 2.

- ✓ Dans le cas d'un second ordre avec $z > 1$, on peut l'écrire comme le produit de 2 premiers ordres (il y a donc 2 cassures).
- ✓ Dans le cas d'un second ordre avec $0,7 < z < 1$, il y a une seule cassure. Le différence entre le réel et l'asymptote au niveau de la cassure est donnée par la valeur de gain : $G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right)$.

- ✓ Dans le cas d'un second ordre avec $z < 0,7$, il y a résonance :

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2.z^2} \quad \text{et} \quad G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

- ✓ Dans le cas d'un second ordre avec $z \ll 0,7$, on a

$$\omega_r \approx \omega_n \quad \text{et} \quad G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right)$$

7. Remarque 3.

Dans le cas d'un second ordre, les résultats se retrouvent facilement en posant $p = j\omega$.

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2.z}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2.z.\omega}{\omega_0} \cdot j}$$

Valeurs réelles de phase :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2.z.\omega.\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Pour la cassure : $\omega = \omega_0$

On a $H(j\omega_n) = \frac{K}{2.z.j}$ $G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right)$ et $\varphi = -90^\circ$

Exercice 1 Corrigé

$$H(p) = \frac{4}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$$

Premier ordre avec un intégrateur.

On ne refait pas l'étude complète, on utilise les résultats du cours.

Cassure pour $\omega = \frac{1}{0,2} = 5$.

Avant la cassure : G_{db} pente -20 db/décade, $\varphi = -90^\circ$

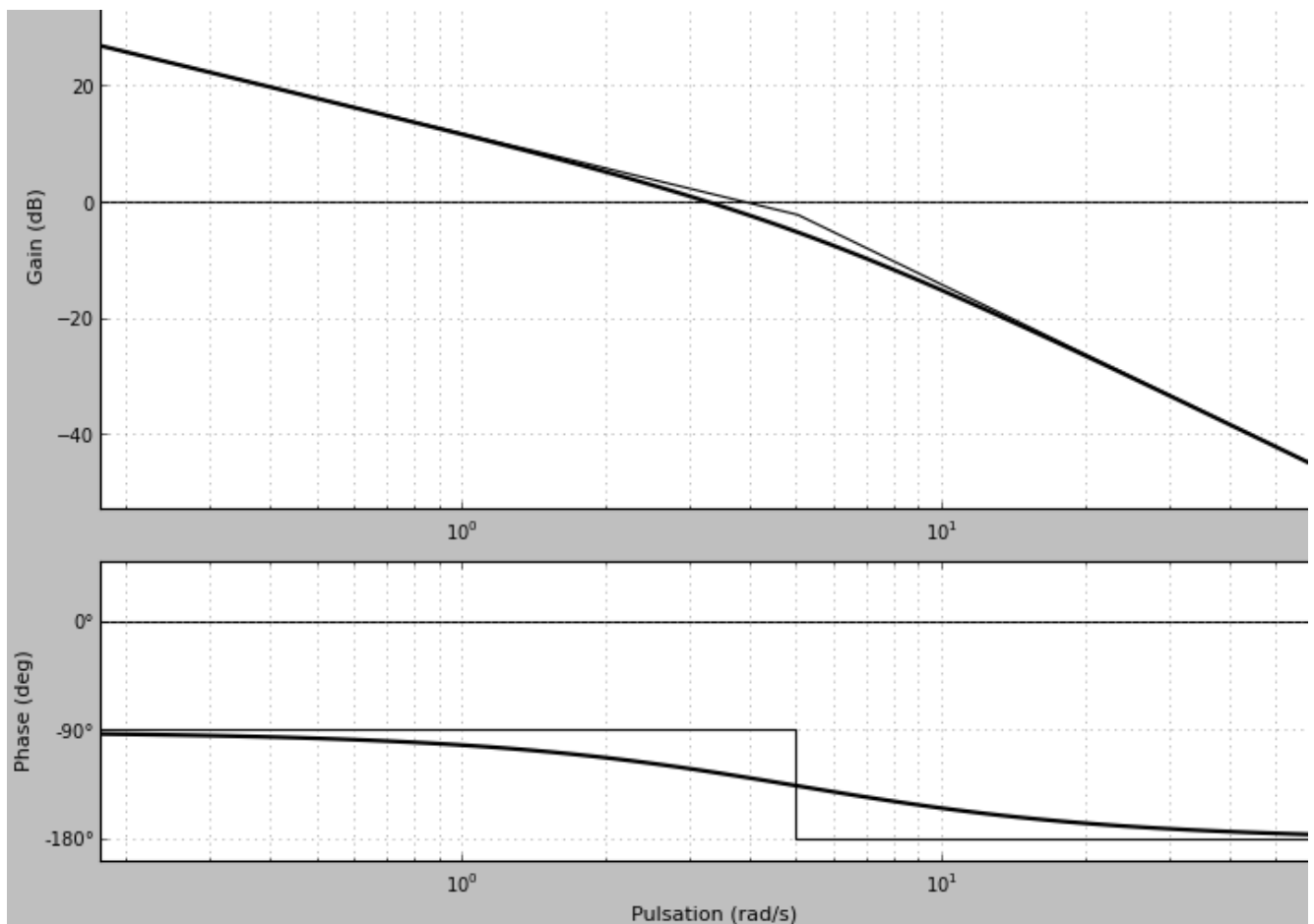
Après la cassure : G_{db} pente -40 db/décade, $\varphi = -180^\circ$

Il faut placer les asymptotes de Gain

Recherche de la première asymptote : $\omega \rightarrow 0$ $\square$ $H(j\omega) = \frac{4}{j\omega \cdot (1 + 0,2 \cdot j\omega)} = \frac{4}{j\omega}$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \left(\frac{4}{\omega} \right) = 20 \cdot \log 4 - 20 \cdot \log \omega$$

Pour $\omega = 4$, $G_{db} = 0$



Remarques :

- ✓ Pour avoir des valeurs de phase : $\varphi = -90 - \arctan(0,2 * \omega)$
- ✓ Au niveau de la cassure, le diagramme réel de gain passe 3 db en dessous de l'asymptote.
- ✓ Equation première asymptote : $H(p) = \frac{4}{p}$ $G_{db} = 20 \cdot \log\left(\frac{4}{\omega}\right)$
- ✓ Equation deuxième asymptote : $H(p) = \frac{4}{0,2 \cdot p^2}$ $G_{db} = 20 \cdot \log\left(\frac{20}{\omega^2}\right)$

Exercice 2 $H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$

Etude de $N(p) = 8 \cdot (1 + 0,9 \cdot p) = N(j\omega) = 8 \cdot (1 + j \cdot 0,9 \cdot \omega) = 8 \cdot (1 + j \cdot \frac{\omega}{1,11})$

C'est la même chose qu'un système du premier ordre avec $(1 + \tau \cdot p)$ au numérateur.

Seules différences :

- ✓ Pour $\omega \rightarrow \infty$: G_{db} a une pente de +20 db/décade et $\varphi \approx +90^\circ$.
- ✓ Pour la cassure $\omega_c = \omega = \frac{1}{0,9} = 1,11$, le diagramme réel de gain passe à 3 db au dessus de l'asymptote, et la phase $\varphi = 45^\circ$.

Etude de : $H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$

Pulsations de cassure : $\omega = \frac{1}{0,9} = 1,11$ et $\omega = \frac{1}{0,1} = 10$

Avant la première cassure : $\omega = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0,9} = 1,11$

Asymptotes : $G_{db} \approx 20 \cdot \log K = 20 \cdot \log 8 = 18 \text{ db}$
 $\varphi \approx 0^\circ$

Entre les 2 cassures :

Asymptotes : G_{db} pente 20 db/décade
 $\varphi \approx +90^\circ$

Après la deuxième cassure :

Asymptotes : $G_{db} \approx 20 \cdot \log \left(K \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = 37,15 \text{ db}$
 $\varphi \approx 0^\circ$

Pour le gain, le diagramme réel est proche du diagramme asymptotique, on retrouve une différence de 3 dB (+ ou -) au niveau des cassures.

Pour la phase, le diagramme réel comporte un maximum.
 Recherche de l'extremum de la phase :

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{(1 + j\omega\tau_1)}{(1 + j\omega\tau_2)} \quad \varphi = \arctan(\omega\tau_1) - \arctan(\omega\tau_2)$$

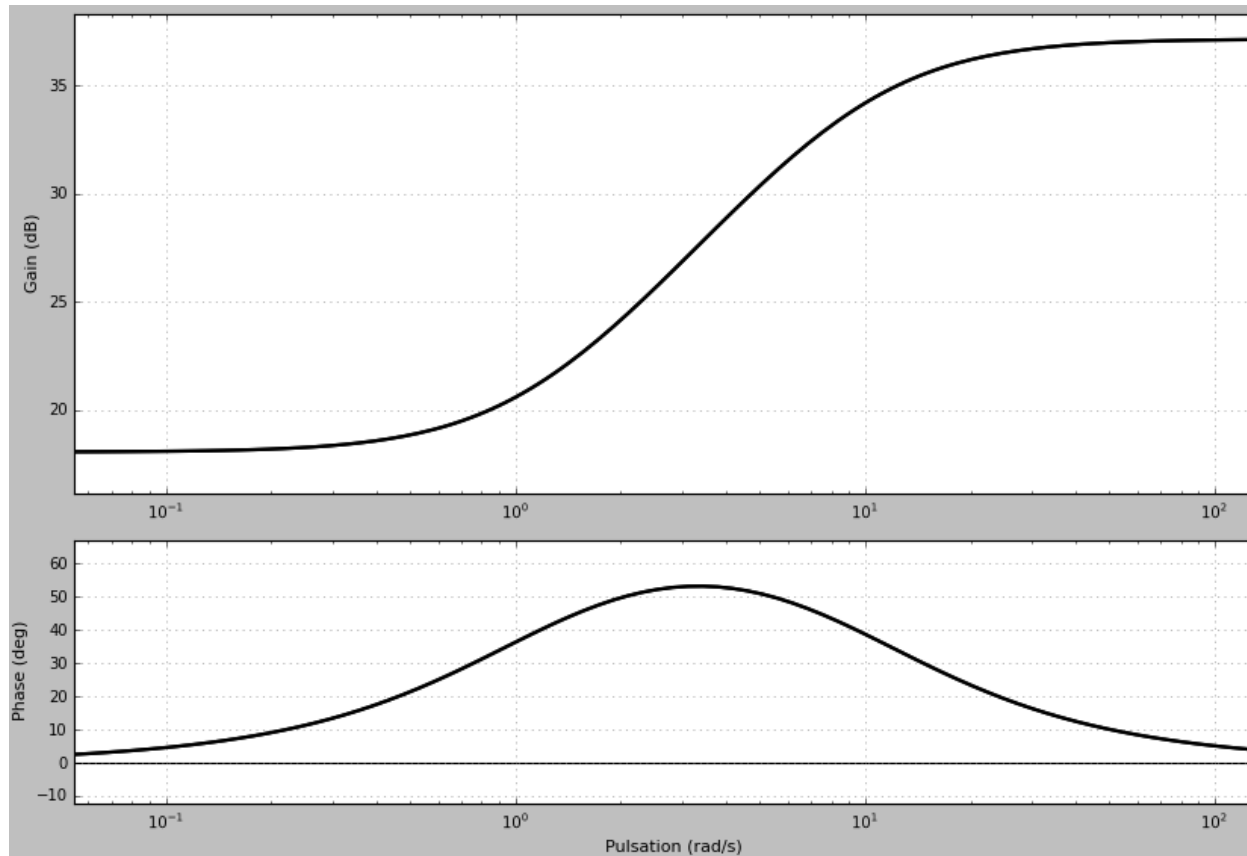
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau_1}{1 + (\omega\tau_1)^2} - \frac{\tau_2}{1 + (\omega\tau_2)^2} = \frac{\tau_1 \cdot (1 + (\omega\tau_2)^2) - \tau_2 \cdot (1 + (\omega\tau_1)^2)}{(1 + (\omega\tau_1)^2) \cdot (1 + (\omega\tau_2)^2)}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 + \tau_1 \cdot (\omega\tau_2)^2 - \tau_2 - \tau_2 \cdot (\omega\tau_1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \dots \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{0,1 \cdot 0,9}} = 3,333 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 53^\circ$$

Tracé de $H(p) = K \cdot \frac{(1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + \tau_2 \cdot p)}$:

Remarque : pour avoir des valeurs de phase : $\varphi = \arctan(\omega\tau_1) - \arctan(\omega\tau_2)$



EXERCICE 2

$$H(p) = \frac{25}{p \cdot (1 + \frac{p}{4} + \frac{p^2}{4})}$$

Etude du second ordre seul :

$$F(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} \cdot p + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} \cdot p + 1}$$

$$K = 25$$

$$\omega_n = 2$$

$$z = \frac{1}{4}$$

On ne refait pas l'étude, on utilise les résultats du cours

$$z < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Résonance}$$

$$\omega_r : \text{Pulsation de résonance} \quad \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1,87 \text{ rad/s}$$

L'amplitude de résonance est :

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}} = \frac{200}{\sqrt{15}}$$

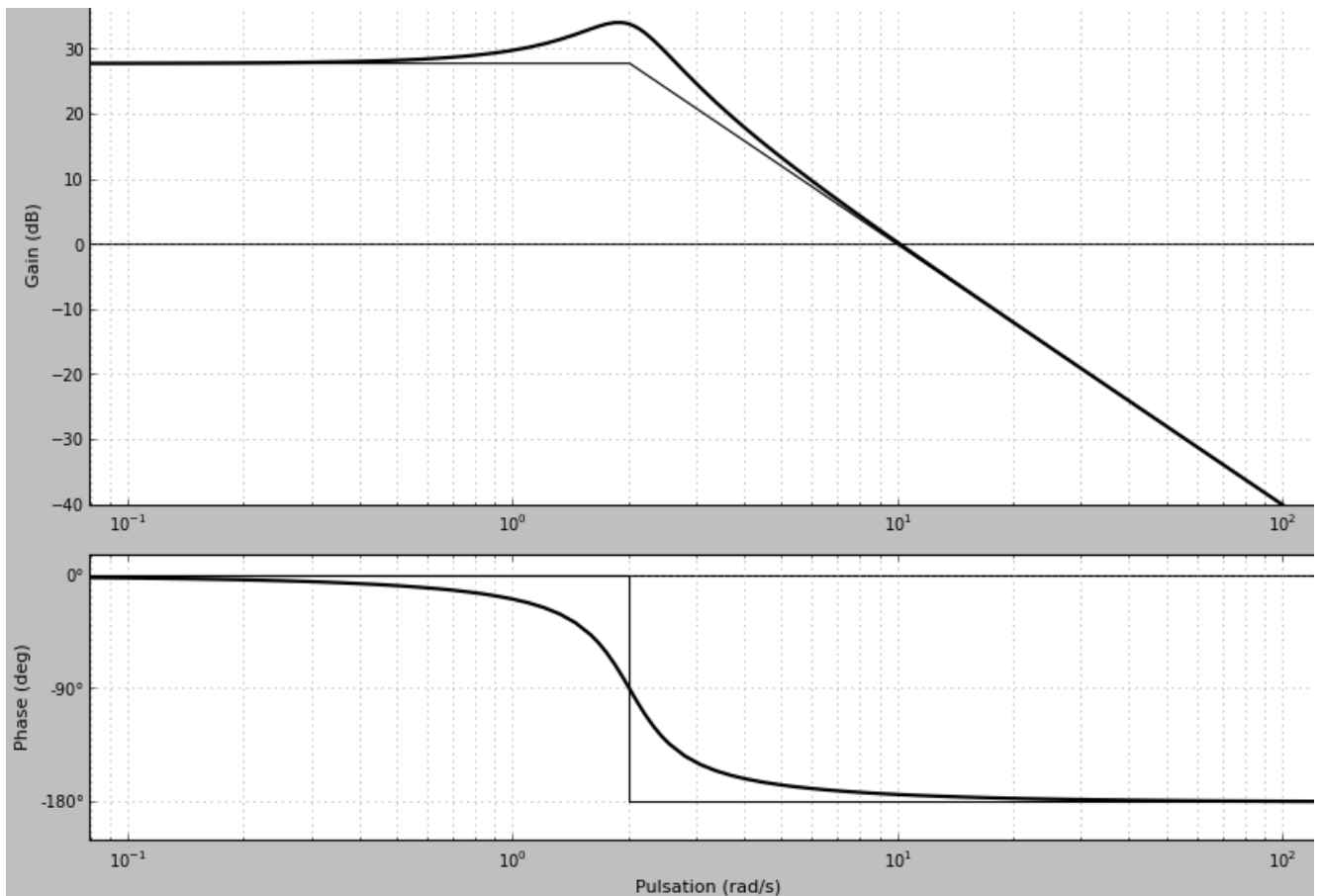
$$G_{db} = 20.\log\left(\frac{200}{\sqrt{15}}\right) = 34,26 \text{ db}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad G_{db} \approx 20.\log K = 27,95 \text{ db} \quad \varphi \approx 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad G_{db} \text{ pente de } -40 \text{ db/décade} \quad \varphi \approx -180^\circ$$

$$\omega = \omega_n = 2 \quad \text{Les asymptotes se coupent} \quad \varphi = -90^\circ$$

Tracé du second ordre seul



Tracé de
$$H(p) = \frac{25}{p.(1 + 0,5.p + 0,25.p^2)}$$

On ajoute l'intégrateur :

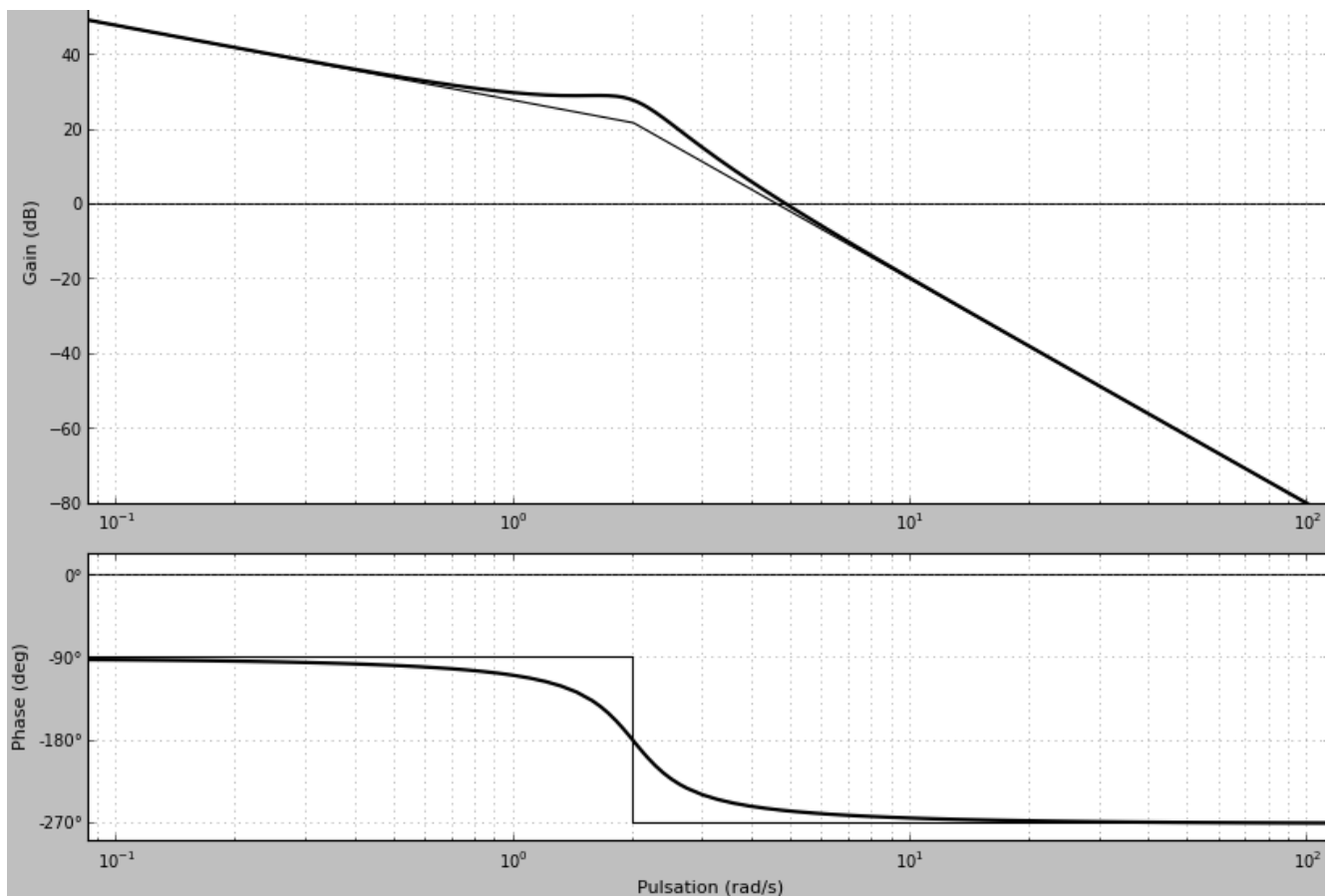
- ✓ On enlève 90° à la phase.
- ✓ On rajoute une pente de -20 db/décade au gain.

Il faut placer les asymptotes de Gain

Recherche de la première asymptote : $\omega \rightarrow 0$ $\square$ $H(j\omega) = \frac{25}{j\omega}$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \left(\frac{25}{\omega} \right) = 20 \cdot \log 25 - 20 \cdot \log \omega$$

Pour $\omega = 1$, $G_{db} = 20 \cdot \log 25 = 27,95$



Remarques :

- ✓ On place une petite bosse pour la résonance...

✓ Pour avoir des valeurs de phase : $\varphi = -90 - \arctan \left(\frac{2 \cdot z \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$