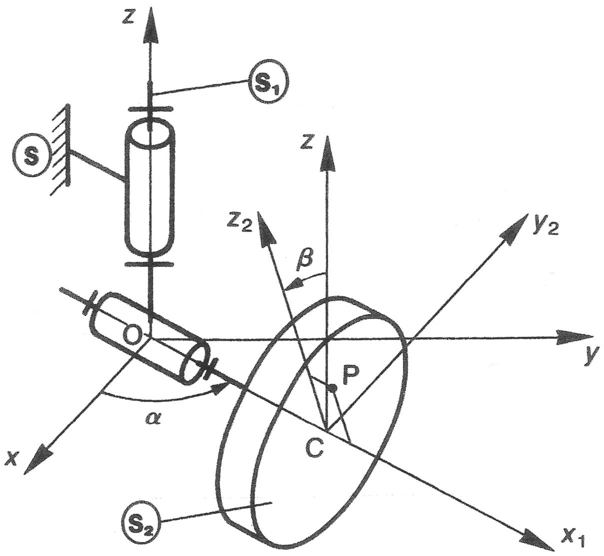
TD cinématique du solide : Torseur cinématique

Exercice 1 : Equilibreuse

Torseur cinématique : $\{V_{S2/R0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S2/R0) \\ \vec{V}(P \in S2/R0) \end{Bmatrix}_M$

Vecteur vitesse de rotation :



$$\vec{\Omega}(S2/R0) = \vec{\Omega}(S2/S1) + \vec{\Omega}(S1/R0)$$

$$\vec{\Omega}(S2/R0) = \dot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\beta}.\vec{x}_1$$

Calcul de la vitesse : $\vec{V}(P \in 2/R0)$

Méthode 1 : On dérive le vecteur position (et on utilise la formule de la base mobile)

$$\overrightarrow{OP} = b.\vec{x}_1 + c.\vec{z}_2$$

$$\vec{V}(P \in 2/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R0} = b.\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} + c.\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R0} = b.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + c.\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R0}$$

Formule de la base mobile : $\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \vec{z}_2$

$$\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_{R0} = -\dot{\beta}.\vec{y}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge (-\sin\beta.\vec{y}_1 + \cos\beta.\vec{z}) = -\dot{\beta}.\vec{y}_2 + \dot{\alpha}.\sin\beta.\vec{x}_1$$

$$\vec{V}(P \in 2/R0) = b.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + c.\sin\beta.\dot{\alpha}.\vec{x}_1 - c.\dot{\beta}.\vec{y}_2$$

vitesse d'entrainement : $\vec{V}(P \in 1/R0) = b.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + c.\sin\beta.\dot{\alpha}.\vec{x}_1$

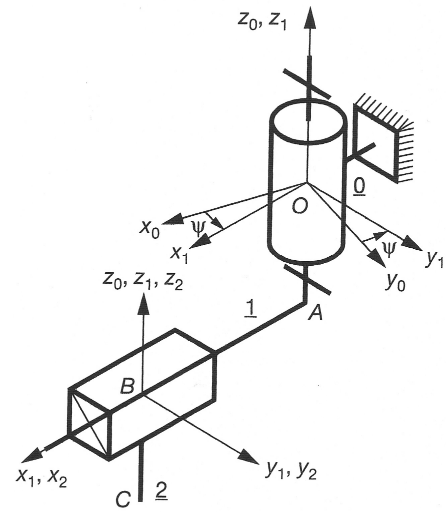
Remarque : $P \in S2$, $P \notin S1$ $\vec{V}(P \in 1/R0)$ est la vitesse du point P supposé appartenir à (S1) à l'instant t, c'est la vitesse de P « bloqué sur (S1) ».

vitesse relative : $\vec{V}(P \in 2/R1) = -c.\dot{\beta}.\vec{y}_2$

Méthode 2 : On utilise la relation de VARIGNON en passant par des points particuliers (dans cet exercice, le point O est très intéressant car il est sur l'axe des 2 mouvements de rotation, donc sa vitesse est nulle).

$$\vec{V}(P \in 2/R0) = \vec{V}(O \in 2/R0) + \vec{\Omega}(S2/R0) \wedge \overrightarrow{OP}$$
$$\vec{V}(P \in 2/R0) = \vec{0} + (\dot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\beta}.\vec{x}_1) \wedge (b.\vec{x}_1 + c.\vec{z}_2)$$
$$\vec{V}(P \in 2/R0) = \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge b.\vec{x}_1 + \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge c.\vec{z}_2 + \dot{\beta}.\vec{x}_1 \wedge c.\vec{z}_2$$
$$\vec{V}(P \in 2/R0) = \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge b.\vec{x}_1 + \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge c.(-\sin\beta.\vec{y}_1 + \cos\beta.\vec{z}) + \dot{\beta}.\vec{x}_1 \wedge c.\vec{z}_2$$
$$\vec{V}(P \in 2/R0) = b.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + c.\sin\beta.\dot{\alpha}.\vec{x}_1 - c.\dot{\beta}.\vec{y}_2$$

Exercice 1. Bras de robot



Q2 : Position du point C dans la base (B0) :

$$\overrightarrow{OC} = x.\vec{x}_1 - (a+b).\vec{z}_0$$
$$\vec{x}_1 = \cos\psi.\vec{x}_0 + \sin\psi.\vec{y}_0$$
$$\overrightarrow{OC} = x.\cos\psi.\vec{x}_0 + x.\sin\psi.\vec{y}_0 - (a+b).\vec{z}_0$$

Q2 *:* Condition pour que le point C se déplace sur une droite de direction $(O, \vec{y}_0)$ passant par le point D avec $\overrightarrow{OD} = c.\vec{x}_0 - (a+b).\vec{z}_0$: $c = x.\cos\psi$

Q3 : Au point C le torseur cinématique du solide (2) dans son mouvement par rapport au repère (R0) : $\{V_{S2/R0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S2/R0) \\ \vec{V}(C \in S2/R0) \end{Bmatrix}_M$

$$\vec{\Omega}(S2/R0) = \vec{\Omega}(S2/S1) + \vec{\Omega}(S1/R0) = \dot{\psi}.\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(C \in 2/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{R0} \qquad \overrightarrow{OC} = x.\vec{x}_1 - (a+b).\vec{z}_0$$

On a : $\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R0} = \dot{\psi}.\vec{y}_1$ $\qquad \vec{V}(C \in 2/R0) = \dot{x}.\vec{x}_1 + x.\dot{\psi}.\vec{y}_1$

vitesse d'entrainement : $\vec{V}(C \in 1/R0) = x.\dot{\psi}.\vec{y}_1$

vitesse relative: $\vec{V}(C \in 2/1) = \dot{x}.\vec{x}_1$

Q4 : Accélération $\vec{A}(C \in 2/R0) = \ddot{x}.\vec{x}_1 + \dot{x}.\dot{\psi}.\vec{y}_1 + \dot{x}.\dot{\psi}.\vec{y}_1 + x.\ddot{\psi}.\vec{y}_1 - x.\dot{\psi}^2.\vec{x}_1$

$$\vec{A}(C \in 2/R0) = \ddot{x}.\vec{x}_1 + (x.\ddot{\psi}.\vec{y}_1 - x.\dot{\psi}^2.\vec{x}_1) + 2.\dot{x}.\dot{\psi}.\vec{y}_1$$

Respectivement accélération relative, d'entrainement et de Coriolis