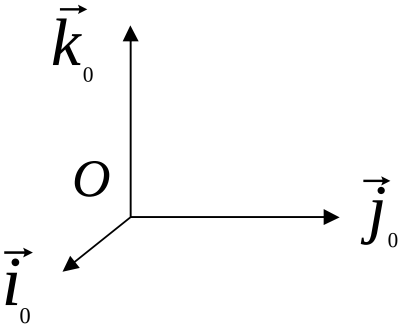
CINEMATIQUE DU SOLIDE 2 : VITESSE ET ACCELERATION

I. POSITION D'UN POINT

Un espace est défini par un repère orthonormé direct $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$.

Le point O est l'origine et $(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ est la base.

Le vecteur position du point M dans le repère R est le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Trajectoire d'un point : La trajectoire du point M est le lieu, au cours du temps, de l'extrémité du vecteur position de M : $\overrightarrow{OM}$.

II. VITESSE D'UN POINT.

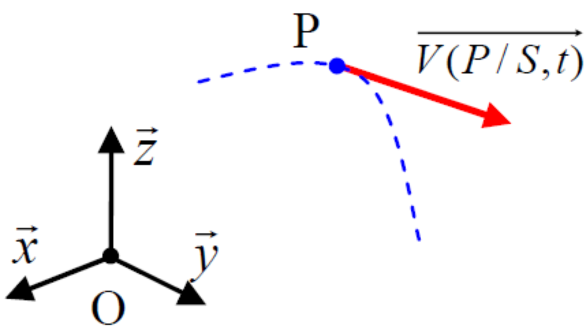
La vitesse d'un point M, appartenant à un solide (S1) dans son mouvement par rapport à un repère (R0), est la dérivé, par rapport au temps, du vecteur position de M.

$$\vec{V}(M \in S1/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R0}$$

Remarques :

1. On prend l'origine O car elle est fixe dans (R0), on peut choisir une autre origine, à condition qu'elle soit fixe dans (R0).

2. $\vec{V}(M \in S1/R0)$ est tangent en M à la trajectoire de M.



3. Du point de vue cinématique, on a équivalence entre le solide et le repère fixé à ce solide, on peut dont écrire : $\vec{V}(M \in S1/R0) = \vec{V}(M \in R1/R0) = \vec{V}(M \in S1/S0)$.

4. La base dans laquelle on exprime les composantes est appelé base de projection.

   La base dans laquelle est effectué la dérivation est appelé base de dérivation ou référentiel du mouvement.

   IMPORTANT :

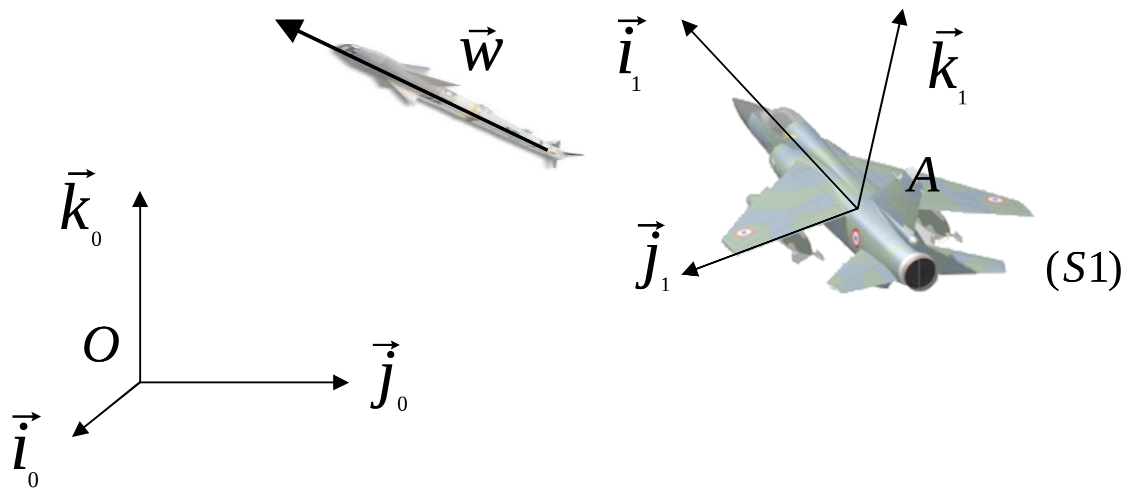
   On ne pas doit pas forcément exprimer $\vec{V}(M \in S1/R0)$ dans (R0), on veut la vitesse du point M dans son mouvement par rapport à (R0) (et pas exprimé dans (R0)).

III. FORMULE DE LA BASE MOBILE.

Soit un solide (S1) en mouvement par rapport à un solide (S0).

Les repères $R_1(A,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ et $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ sont liés aux solides (S1) et (S0)

Soit $\vec{W}$ un vecteur mobile par rapport à (S1).



Formule de la base mobile : $\left(\dfrac{d\vec{w}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\dfrac{d\vec{w}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{w}$

$\vec{\Omega}(R_1/R_0)$: vecteur vitesse de rotation de (R1) par rapport à (R0).

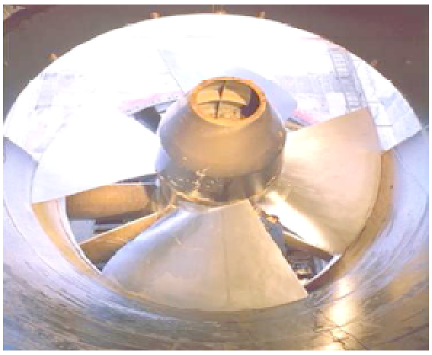
Remarques :

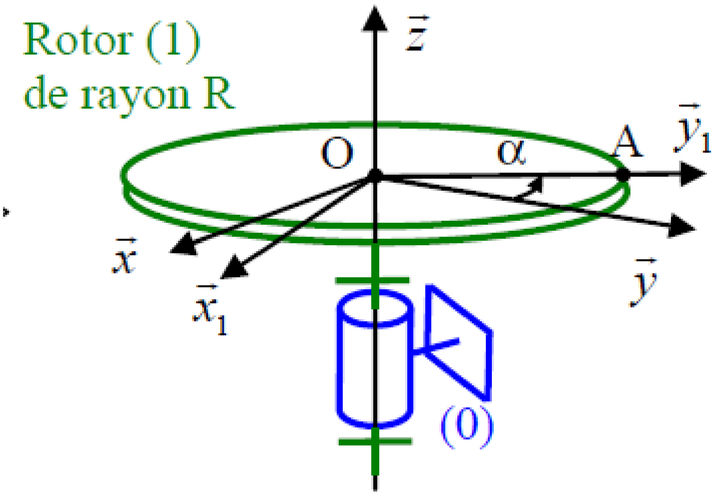
1. Comme son nom l'indique, ce vecteur caractérise la vitesse de changement d'orientation d'un solide par rapport à un autre.

2. Dans le cas d'un mouvement de rotation d'un solide par rapport à un autre : $\vec{\Omega}(R_1/R_0)=\dot{\theta}.\vec{k}$, avec $\dot{\theta}$ vitesse de rotation et $\vec{k}$ direction de la rotation.

3. Soient 3 solides en mouvement, les vecteurs vitesses de rotation se composent : $\vec{\Omega}(R_2/R_0)=\vec{\Omega}(R_2/R_1)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)$ (idem avec n solides).

IV. APPLICATION 1 : Calcul de la vitesse d'un point d'un rotor.





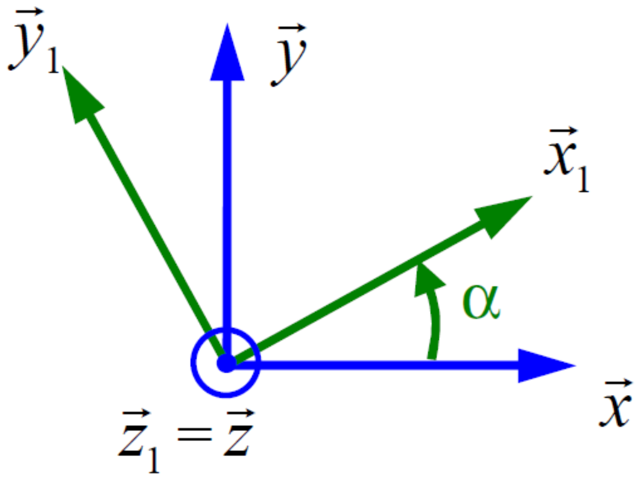
Le rotor (1) est animé d'un mouvement de rotation par rapport au bati (0).

Au bâti (0) est lié le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Au rotor (1) est lié le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$.

Objectif : Calculer la vitesse la vitesse du point A appartenant au rotor (1) dans son mouvement par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(A\in 1/0)$.

On fait la figure plane associée :



Vecteur vitesse de rotation :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}.\vec{z}$$

Position du point A : $\overrightarrow{OA} = R.\vec{y}_1$

$$\vec{V}(A \in 1/0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d(R.\vec{y}_1)}{dt}\right)_0 = R.\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0$$

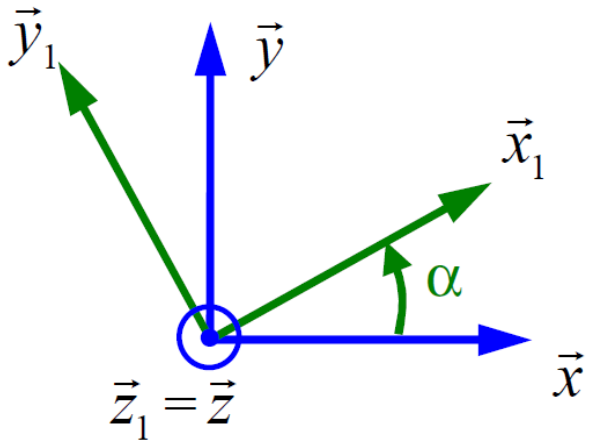
Formule de la base mobile : $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{y}_1$

Calcul : $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 = \vec{0} + \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}.\vec{x}_1$

Finalement : $\vec{V}(A \in 1/0) = -R.\dot{\alpha}.\vec{x}_1$

V. DERIVE DES VECTEURS D'UNE BASE EN ROTATION PAR RAPPORT A UNE AUTRE.

Cette figure plane représente le fait que la base (B1) est animée d'un mouvement de rotation par rapport à la base (B0), de direction $\vec{z} = \vec{z}_1$ .et d'angle α .



On a alors : $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}.\vec{z}$

De plus : $\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_0 = \dot{\alpha}.\vec{y}_1$

De même : $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 = -\dot{\alpha}.\vec{x}_1$

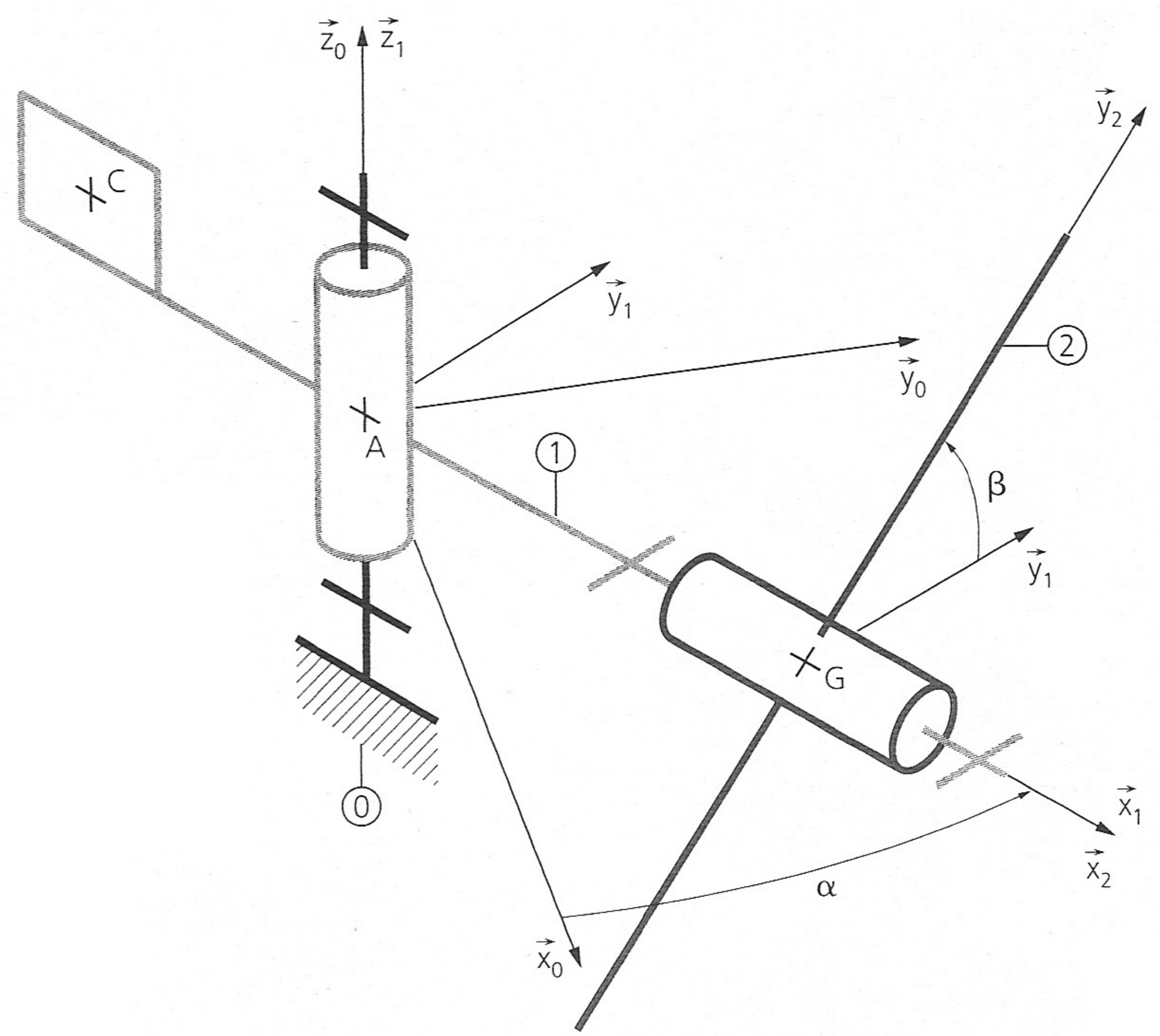
Pour simplifier, on peut utiliser directement ces résultats (en relation avec la figure plane associée)

VI. APPLICATION 2 : EOLIENNE.

Problème posé :

On se propose de calculer la vitesse et l'accélération d'un point d'une pale.

Ce calcul est une première étape dans l'étude dynamique qui permet de déterminer les efforts auxquels sont soumises les pales.



L'éolienne étudiée est composée de 3 solides :

- ✓ Le solide (0) appelé bâti sur lequel est fixé le repère $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- ✓ Le bras oscillant (1) sur lequel est fixé le repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- ✓ L'hélice (2) sur lequel est fixé le repère $R_2(G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Le bras (1) est animé d'un mouvement de rotation d'axe $(A,\vec{z}_0)$ et d'angle α par rapport au bâti (0). $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ et on pose $(\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) = \alpha$.

L'hélice (2) est animée d'un mouvement de rotation d'axe $(G,\vec{x}_1)$ et d'angle β par rapport au bras (1). $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $(\vec{y}_1,\vec{y}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2) = \beta$

$\overrightarrow{AG} = a.\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{GM} = b.\vec{y}_2$ (le point M n'est pas représenté)

Questions

1. *Tracer les figures de changement de base.*
2. *Déterminer la vitesse du point B appartenant au solide (3) dans son mouvement par rapport au solide (1) :* $\vec{V}(M \in 2/0)$.

Figures de changement de Base :

Vecteur vitesse de rotation : $\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha}.\vec{z}_1 + \dot{\beta}.\vec{x}_1$

Calcul de la vitesse :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = a.\vec{x}_1 + b.\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d(a.\vec{x}_1 + b.\vec{y}_2)}{dt}\right)_0 = a.(\frac{d\vec{x}_1}{dt})_0 + b.(\frac{d\vec{y}_2}{dt})_0$$

$$\left(\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\beta}.\vec{z}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2$$

$$\left(\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right)_0 = \dot{\beta}.\vec{z}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge (\cos\beta.\vec{y}_1 + \sin\beta.\vec{z}_1) = \dot{\beta}.\vec{z}_2 - \dot{\alpha}.\cos\beta.\vec{x}_1$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = a.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 - b.\dot{\alpha}.\cos\beta.\vec{x}_1 + b.\dot{\beta}.\vec{z}_2$$ Vitesse absolue

Remarque : La vitesse du point M, appelé vitesse absolue et due aux 2 mouvements de rotations (premier mouvement rotation d'angle α et deuxième mouvement rotation d'angle β).

Vitesse relative : $\vec{V}(M \in 2/1) = b.\dot{\beta}.\vec{z}_2$

Vitesse d'entrainement : $\vec{V}(M \in 1/0) = a.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 - b.\dot{\alpha}.\cos\beta.\vec{x}_1$

Calcul de l'accélération : on dérive la vitesse

$$\vec{A}(M \in 2/0) = a.\ddot{\alpha}.\vec{y}_1 - a.\dot{\alpha}^2.\vec{x}_1 - b.\ddot{\alpha}.\cos\beta.\vec{x}_1 + b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\sin\beta.\vec{x}_1$$
$$- b.\dot{\alpha}^2.\cos\beta.\vec{y}_1 + b.\ddot{\beta}.\vec{z}_2 + b.\dot{\beta}.\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_0$$

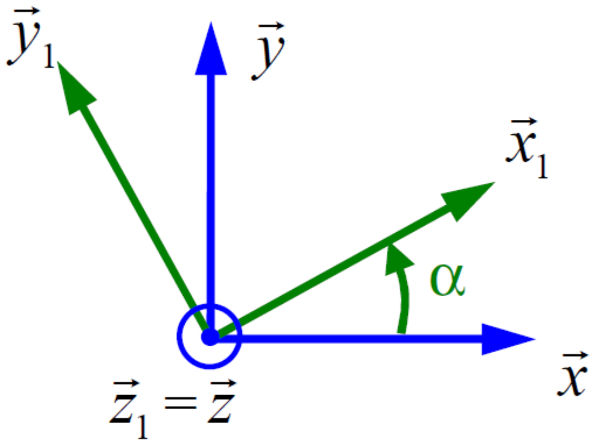
$$\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{z}_2 = -\dot{\beta}.\vec{y}_2 + \dot{\alpha}.\vec{z}_1 \wedge (\cos\beta.\vec{z}_1 - \sin\beta.\vec{y}_1)$$

$$\left(\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right)_0 = -\dot{\beta}.\vec{y}_2 + \dot{\alpha}.\sin\beta.\vec{x}_1$$

$$\vec{A}(M \in 2/0) = a.\ddot{\alpha}.\vec{y}_1 - a.\dot{\alpha}^2.\vec{x}_1 - b.\ddot{\alpha}.\cos\beta.\vec{x}_1 - b.\dot{\alpha}^2.\cos\beta.\vec{y}_1$$
$$+ b.\ddot{\beta}.\vec{z}_2 - b.\dot{\beta}.\dot{\beta}.\vec{y}_2 + 2.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\sin\beta.\vec{x}_1$$

VII. RAPPELS SUR LE CALCUL DU PRODUIT VECTORIEL.

Exemples :



$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$$

$$\vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{z} = -\vec{y}_1$$

$$\vec{x} \wedge \vec{x}_1 = \vec{x} \wedge (\cos\alpha.\vec{x} + \sin\alpha.\vec{y}) = \sin\alpha.\vec{z}$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y}_1 = \vec{x} \wedge (-\sin\alpha.\vec{x} + \cos\alpha.\vec{y}) = \cos\alpha.\vec{z}$$

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{y} = (\cos\alpha.\vec{x} + \sin\alpha.\vec{y}) \wedge \vec{y} = \cos\alpha.\vec{z}$$

VIII. ACCELERATION.

L’accélération d’un point M, appartenant à un solide (S1) dans son mouvement par rapport à un repère (R0), est la dérivé, par rapport au temps, de la vitesse de M.

$$\overrightarrow{A}(M \in S1/R0) = \left(\frac{d(\overrightarrow{V}(M \in S1/R0))}{dt} \right)_{R0}$$