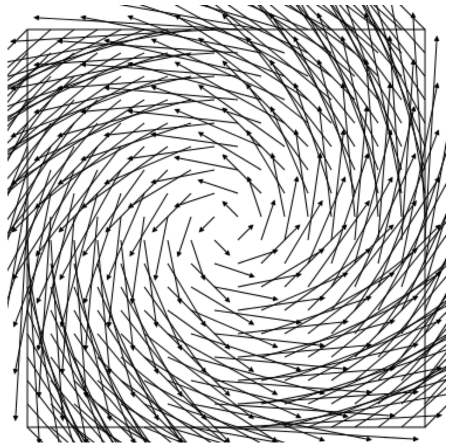
CINEMATIQUE DU SOLIDE 3 : CHAMPS DES VITESSES ET TORSEUR CINEMATIQUE

I. CHAMPS DES VITESSES D'UN SOLIDE INDEFORMABLE.

Exemple :

La figure représente le champ des vitesses d'un solide animé d'un mouvement de rotation.



Le champ des vitesses du solide (S1) dans son mouvement par rapport à un repère (R0) est le champ qui associe à tout point M appartenant à (S1) le vecteur vitesse $\vec{V}(M \in S1/R0)$.

Relation cinématique du solide :

Soient 2 solides (S0) et (S1) auxquels sont rattachés les repères (R0) et (R1).

$R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

Il existe une relation entre la vitesse de 2 points d'un même solide indéformable (Appelée relation de Varignon) :

$$\vec{V}(M \in S1/R0) = \vec{V}(N \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{NM}$$

II. TORSEUR CINEMATIQUE.

Pour connaître le champ des vitesses d'un solide (S1), dans son mouvement par rapport à un repère R0, il suffit de connaître :

- ✓ Le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R1/R0)$
- ✓ La vitesse d'un point (la vitesse des autres points est donnée par la relation de Varignon).

C'est ce que l'on appelle le torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses).

Notations :

$$\{V S1/R0\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{Bmatrix}_M$$

$\vec{\Omega}(R1/R0)$: résultante du torseur

$\vec{V}(M \in S1/R0)$: moment du torseur

Autre notation : $$\{V S1/R0\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix}_{M, dans R0}$$ composantes exprimées dans une base ou un repère précisé.

Torseurs particuliers :

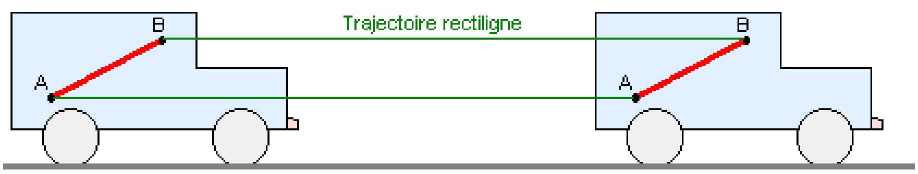
Torseur nul : $$\{V S1/R0\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M ,$$ S1 fixe / R0

Torseur couple : $$\{V S1/R0\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{Bmatrix}_M ,$$ mouvement de translation

Il existe plusieurs types de mouvement de translation selon la nature de la trajectoire :

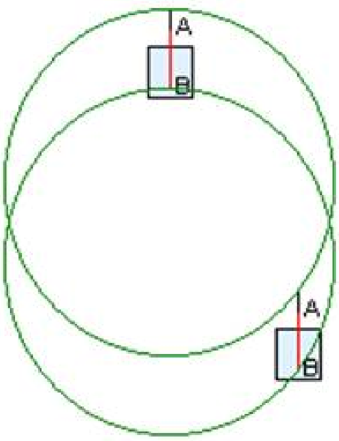
- ✓ Translation rectiligne : les trajectoires des points sont des segments de droite,
- ✓ Translation circulaire : les trajectoires des points sont des arcs de cercle de même rayon
- ✓ Translation curviligne : les trajectoires des points décrivent des courbes

Exemple de translation rectiligne



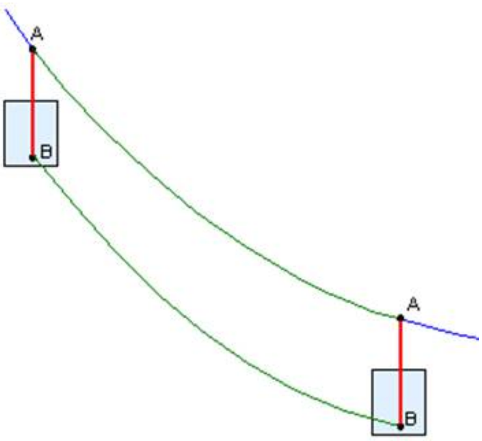
Exemple de translation circulaire :

La grande roue



Exemple de translation curviligne :

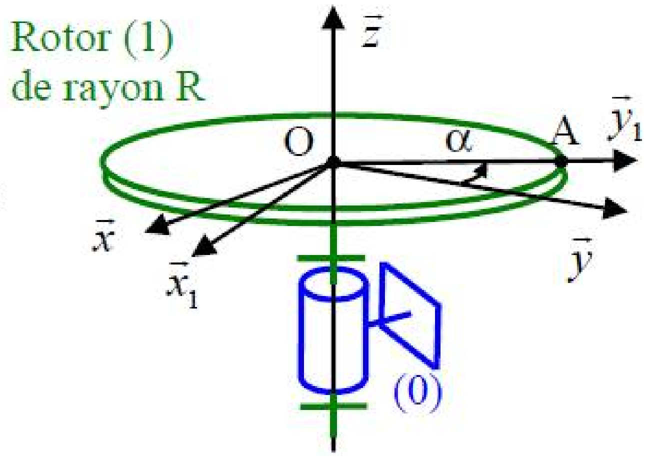
Le téléphérique



Torseur glisseur : $\{V_{S1/R0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$, mouvement de rotation autour d'un axe passant par M, et de direction $\vec{\Omega}(R1/R0)$

Exemple :

Un rotor



Mouvement hélicoïdal :

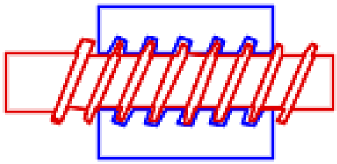
$$\{V_{S1/R0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{Bmatrix}_M \quad \text{avec} \quad \vec{V}(M \in S1/R0) = \frac{p}{2.\pi}.\vec{\Omega}(R1/R0)$$

p : pas de l'hélice, unités utilisées : mètre et radiant par seconde

Exemple : mécanisme vis écrou

La rotation et la translation de la vis sont conjuguées.

Quand la vis tourne d'un tour, elle avance du pas



Point central, axe central du torseur cinématique :

Un point central est un point ou le moment $\vec{V}(M \in S1/R0)$ est soit nul, soit colinéaire à la résultante $\vec{\Omega}(R1/R0)$.

L'axe central est constitué de l'ensemble des points centraux.

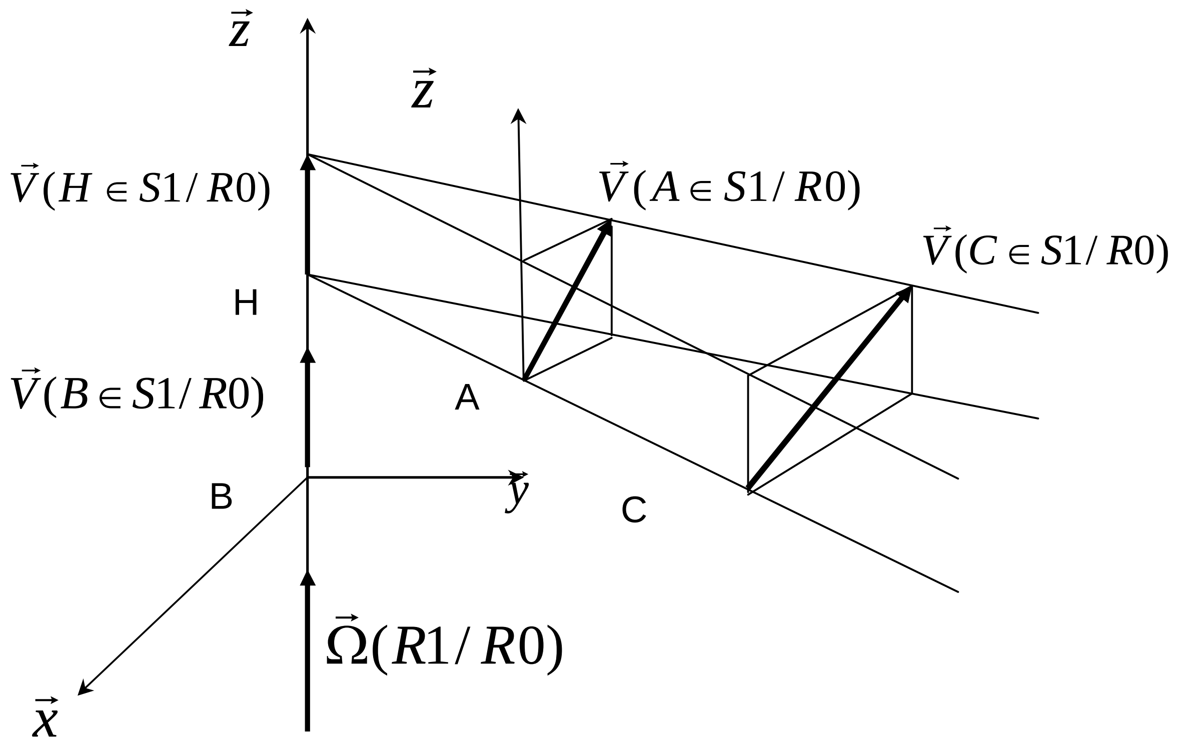
Sur l'axe central, $\vec{V}(M \in S1/R0)$ est minimal et constante.

Lorsque $\vec{V}(M \in S1/R0) = \vec{0}$ sur l'axe central et que $\vec{\Omega}(R1/R0) \neq \vec{0}$ on parle alors d'axe instantanée de rotation.

Illustration : Un mouvement quelconque peut se décomposer en :

- ✓ Un mouvement de translation dans la direction (Δ)
- ✓ Un mouvement de rotation autour de (Δ) (mouvement de « vissage »

Rappels : $\vec{V}(C \in S1/R0) = \vec{V}(H \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{HC}$



III. CHAMP DES ACCELERATIONS D'UN SOLIDE INDEFORMABLE.

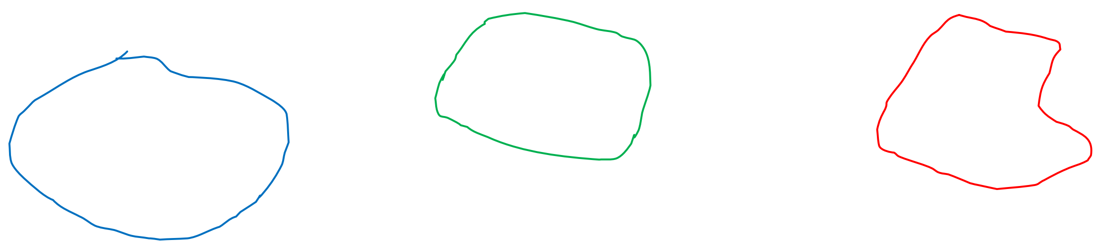
En dérivant la relation de Varignon et après calcul, on trouve :

$$\vec{A}(M \in S1/R0) = \vec{A}(N \in S1/R0) + (\frac{d\vec{\Omega}(R1/R0)}{dt})_{R0} \wedge \overrightarrow{NM} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge [\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{NM}]$$

Remarque : Retenir que la relation entre les accélérations de 2 points d'un même solide n'est pas la même que la relation entre les vitesses de 2 points d'un même solide.

IV. COMPOSITION DE MOUVEMENT.

Soient 3 solides (S0), (S1) et (S2).



(S2) est en mouvement par rapport à (S1) et (S1) est en mouvement par rapport à (S0).

Les repères $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $R_2(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ sont lié aux solides (S0), (S1) et (S2).

- ✓ Mouvement de (S2) par rapport à (S0) : mouvement absolu.
- ✓ Mouvement de (S2) par rapport à (S1) : mouvement relatif.
- ✓ Mouvement de (S1) par rapport à (S0) : mouvement d'entraînement.
- ✓

1. Composition des vecteurs vitesses de rotation.

$$\vec{\Omega}(S2/R0) = \vec{\Omega}(S2/S1) + \vec{\Omega}(S1/R0)$$

2. Composition des vecteurs vitesses.

Démonstration de la relation : Soit M un point appartenant à (S2).

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M})}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R0} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0}$$

Premier vecteur : $\left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R0} = \vec{V}(O_1 \in S1/R0)$

Deuxième vecteur : On utilise la formule de la base mobile

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0} = V(M \in S2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = \vec{V}(O_1 \in S1/R0) + V(M \in S2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = V(M \in S2/R1) + \vec{V}(O_1 \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

On utilise la relation cinématique du solide :

$$\vec{V}(M \in S1/S0) = \vec{V}(O_1 \in S1/S0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M} .$$

Finalement : $\vec{V}(M \in S2/R0) = \vec{V}(M \in S2/S1) + \vec{V}(M \in S1/R0)$

Remarque : $M \in S2$, $M \notin S1$ $\vec{V}(M \in S1/R0)$ est la vitesse du point M supposé appartenir à (S1) à l'instant t, c'est la vitesse de M « bloqué sur (S1) ».

3. Composition des torseurs cinématiques.

$$\{V S2/R0\}_M = \{V S2/S1\}_M + \{V S1/R0\}_M$$

Les torseurs doivent être exprimés au même point.

4. Composition des accélérations.

En dérivant la composition des vitesses et après calcul, on trouve :

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \vec{A}(M \in S2/S1) + \vec{A}(M \in S1/R0) + 2.\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1)$$

$2.\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1)$ est l'accélération de Coriolis.

V. EXEMPLE 1

Soit (S0) un solide de référence auquel est rattaché le repère $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$

Soit (S1) une barre animée d'un mouvement de rotation d'axe $(O,\vec{k}_0)$ par rapport à R0.

$R_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ est lié à (S1). On a $\vec{k}_1 = \vec{k}_0$ et $(\vec{i}_0,\vec{i}_1) = \alpha$

Soit (S2) un solide animé d'un mouvement de translation d'axe $(O,\vec{i}_1)$ par rapport à (S1).

On a $\overrightarrow{OM} = r.\vec{i}_1$

Questions.

1. *Déterminer les vitesses absolue, relative et d'entraînement de M.*
2. *Déterminer les accélérations absolue, relative, d'entraînement et de Coriolis de M.*

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = (\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt})_{R0} = (\frac{d(r.\vec{i}_1)}{dt})_{R0} = \dot{r}.\vec{i}_1 + r.(\frac{d\vec{i}_1}{dt})_{R0} = \dot{r}.\vec{i}_1 + r.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$$

$$\vec{V}(M \in S2/S1) = \dot{r}.\vec{i}_1$$

$$\vec{V}(M \in S1/R0) = r.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$$

Rappel : $\vec{V}(M \in S2/R0) = \dot{r}.\vec{i}_1 + r.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r}.\vec{i}_1 + \dot{r}.(\frac{d\vec{i}_1}{dt})_{R0} + \dot{r}.\dot{\alpha}.\vec{j}_1 + r.\ddot{\alpha}.\vec{j}_1 + r.\dot{\alpha}.(\frac{d\vec{j}_1}{dt})_{R0}$$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r}.\vec{i}_1 + \dot{r}.\dot{\alpha}.\vec{j}_1 + \dot{r}.\dot{\alpha}.\vec{j}_1 + r.\ddot{\alpha}.\vec{j}_1 - r.\dot{\alpha}^2.\vec{i}_1$$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r}.\vec{i}_1 + r.\ddot{\alpha}.\vec{j}_1 - r.\dot{\alpha}^2.\vec{i}_1 + 2.\dot{r}.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$$

$\vec{A}(M \in S2/S1) = \ddot{r}.\vec{i}_1$ Accélération relative

$\vec{A}(M \in S1/R0) = r.\ddot{\alpha}.\vec{j}_1 - r.\dot{\alpha}^2.\vec{i}$ Accélération d'entraînement

$2.\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1) = 2.\dot{r}.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$ Accélération de Coriolis

VI. EXEMPLE 2 : CENTRIFUGEUSE.

Une centrifugeuse crée une accélération permettant par exemple de séparer rapidement 2 liquides initialement mélangées.

Autre exemple, la centrifugeuse du Laboratoire central des ponts et chaussées (LCPC) permet l'étude du comportement d'ouvrages à partir de modèles réduits en corrigeant le facteur d'échelle.

Le bâti (1) est fixe. Le solide (2) est animé d'un mouvement de rotation d'axe $(O_1, \vec{z}_1)$ et d'angle φ par rapport au bâti (1). Ces solides sont liés par une liaison pivot.

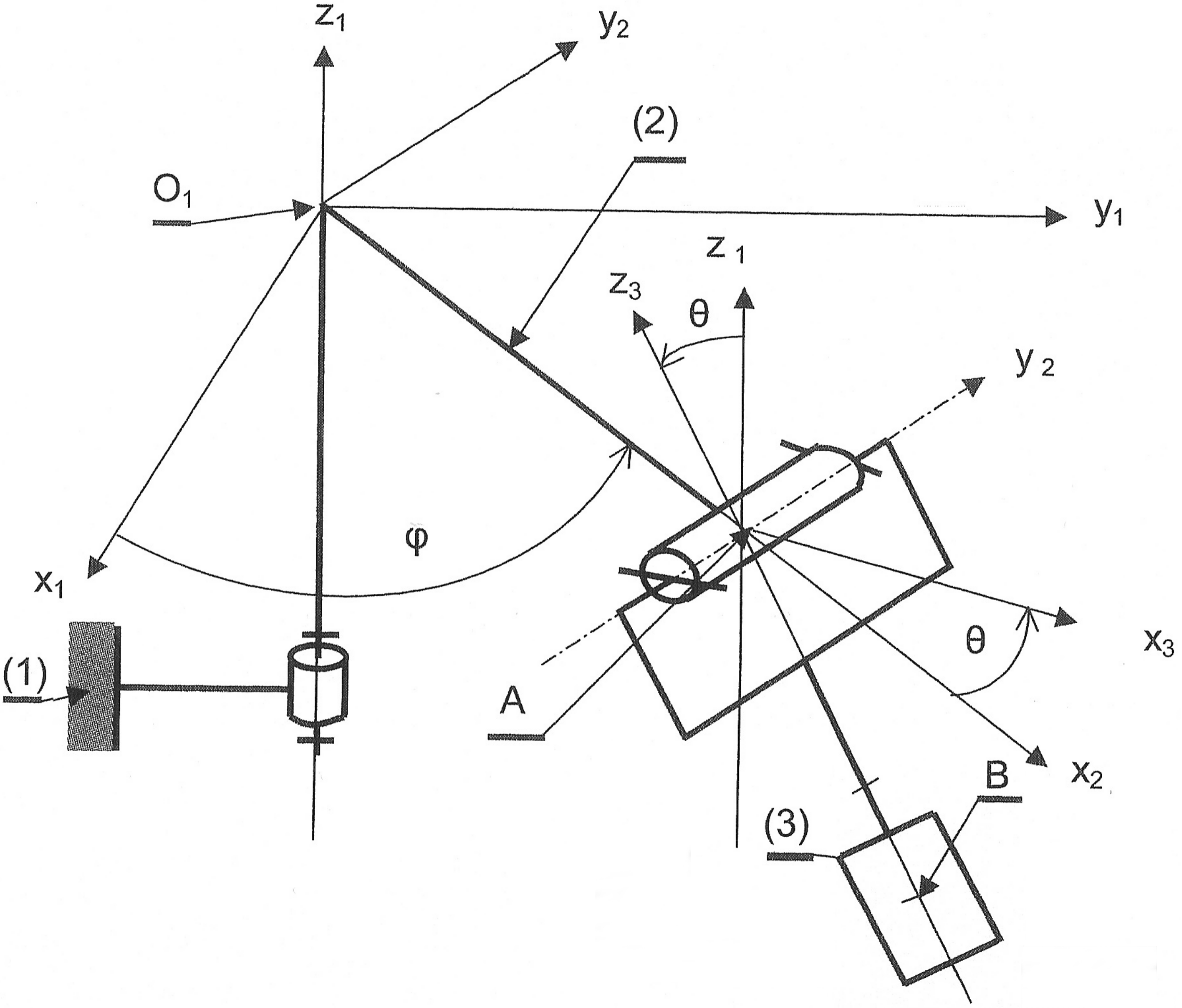
Le solide (3) est animé d'un mouvement de rotation d'axe $(A, \vec{y}_2)$ et d'angle θ par rapport au solide (2). Ces solides sont liés par une liaison pivot.

Les repères $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ sont liées respectivement aux solides (1), (2) et (3).

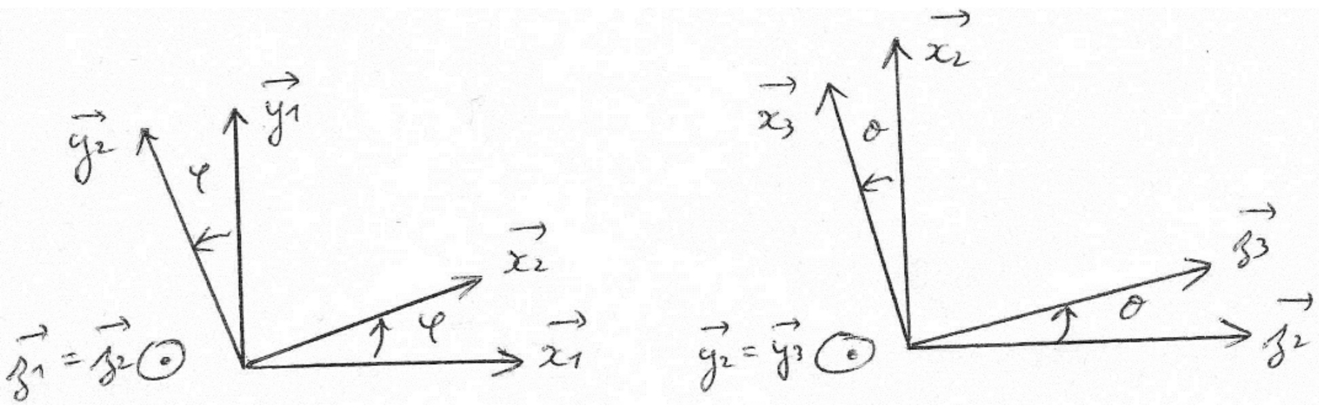
On a $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ et $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ On donne : $\overrightarrow{O_1A} = a.\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{AB} = -b.\vec{z}_3$

Questions

1. *Déterminer au point B le torseur cinématique du mouvement du solide (3) par rapport au solide (1). Calculer la vitesse de B en utilisant la relation de Varignon.*
2. Déterminer les vitesses absolue, relative et d'entraînement de B.



Attention : θ est négatif sur le schéma cinématique donné…



Torseur cinématique : $\left\{V3/R1\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/R1) \\ \vec{V}(B \in 3/R1) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{y}_2 \\ \vec{V}(B \in 3/R1) \end{Bmatrix}_A$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(A \in 3/R1) + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(A \in 2/R1) + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(O_1 \in 2/R1) + \vec{\Omega}(2/R1) \wedge \overrightarrow{O_1A} + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{0} + (\dot{\varphi}.\vec{z}_1) \wedge (a.\vec{x}_2) + (\dot{\varphi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{y}_2) \wedge (-b.\vec{z}_3)$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = a.\dot{\varphi}.\vec{y}_2 - b.\dot{\varphi}.\sin\theta.\vec{y}_2 - b.\dot{\theta}.\vec{x}_3$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = (a - b.\sin\theta).\dot{\varphi}.\vec{y}_2 - b.\dot{\theta}.\vec{x}_3$$

Entrainement : $\vec{V}(B \in 2/R1) = (a - b.\sin\theta).\dot{\varphi}.\vec{y}_2$ $\qquad B \notin 2$

Relative : $\vec{V}(B \in 3/R2) = b.\dot{\theta}.\vec{x}_3$

Accélération du point B dans son mouvement par rapport au repère R_1.

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \dot{\varphi}.(a - b.\sin\theta).\vec{y}_2 - b.\dot{\theta}.\vec{x}_3$$

$$\vec{A}(B \in 3/R1) = \ddot{\varphi}.(a - b.\sin\theta).\vec{y}_2 + \dot{\varphi}.(-b.\dot{\theta}.\cos\theta).\vec{y}_2$$
$$+ \dot{\varphi}.(a - b.\sin\theta).(-\dot{\varphi}.\vec{x}_2) - b.\ddot{\theta}.\vec{x}_3 - b.\dot{\theta}.(\frac{d\vec{x}_3}{dt})_{R1}$$

$$(\frac{d\vec{x}_3}{dt})_{R1} = (\frac{d\vec{x}_3}{dt})_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{x}_3 = -\dot{\theta}.\vec{z}_3 + \dot{\varphi}.\vec{z}_1 \wedge (\cos\theta.\vec{x}_2 - \sin\theta.\vec{z}_1)$$

$$(\frac{d\vec{x}_3}{dt})_{R1} = -\dot{\theta}.\vec{z}_3 + \dot{\varphi}.\cos\theta.\vec{y}_2$$

$$\vec{A}(B \in 3/R1) = [\ddot{\varphi}.(a - b.\sin\theta) - 2.a.b.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)].\vec{y}_2$$
$$- \dot{\varphi}^2.(a - b.\sin\theta).\vec{x}_2 - b.\ddot{\theta}.\vec{x}_3 - b.\dot{\theta}^2.\vec{z}_3$$

Entrainement : $\vec{A}(B \in 2/R1) = \ddot{\varphi}.(a - b.\sin\theta).\vec{y}_2 - \dot{\varphi}^2.(a - b.\sin\theta).\vec{x}_2$

Relative : $\vec{A}(B \in 3/R2) = -b.\ddot{\theta}.\vec{x}_3 - b.\dot{\theta}^2.\vec{z}_3$

De Coriolis : $\vec{A}(B \in 3/R1) = -2.a.b.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{y}_2$