MODELISATION CINEMATIQUE ET GEOMETRIQUE DES LIAISONS 1

I. INTRODUCTION.

But de la modélisation.

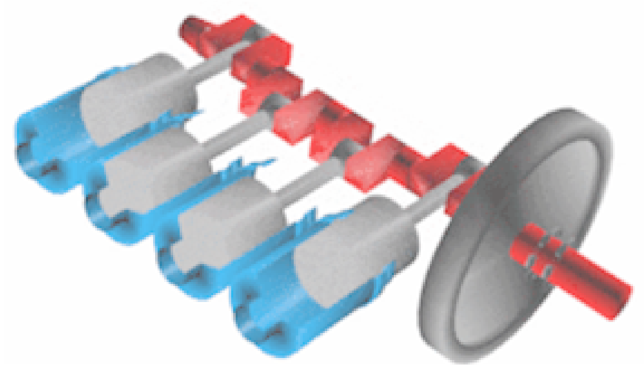
On modélise un mécanisme afin de mettre en évidence :

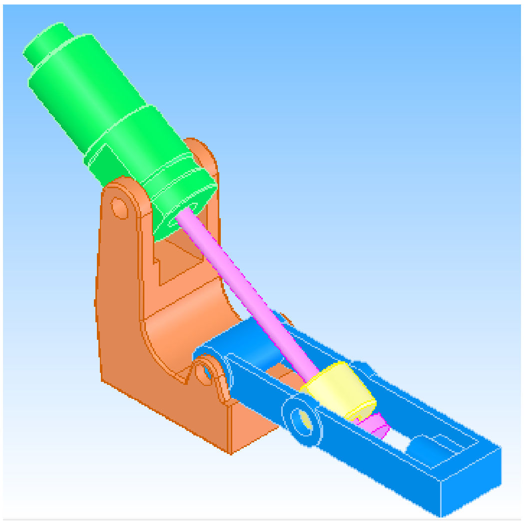
- ✓ Les mouvements relatifs de ses composants, c'est le domaine de la cinématique.
- ✓ Les efforts mis en jeu, c'est le domaine de la statique et de la dynamique.
- ✓ Les puissances transmises, c'est le domaine de la dynamique.

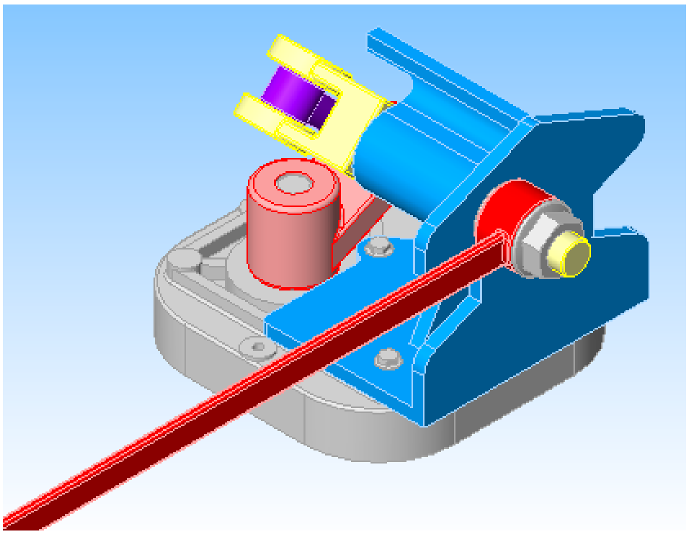
Modèle de liaison.

Un mécanisme est constitué de solides en mouvement les uns par rapport aux autres.

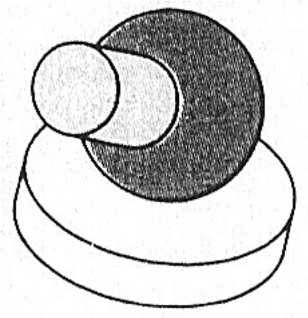
Ces solides sont en contact les uns par rapport aux autres.

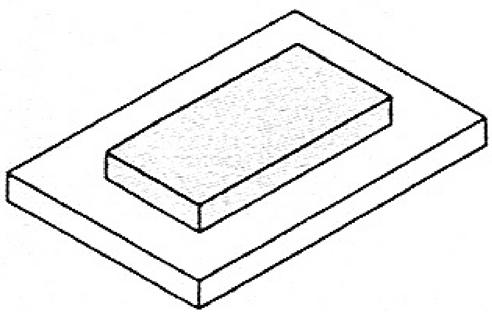






Ces contacts bloquent certains mouvements.





Afin d'en rendre compte et d'étudier le fonctionnement du mécanisme, on utilise un modèle de représentation des mouvements sous le forme de liaisons.

Des symboles normalisés sont associés à ces liaisons.

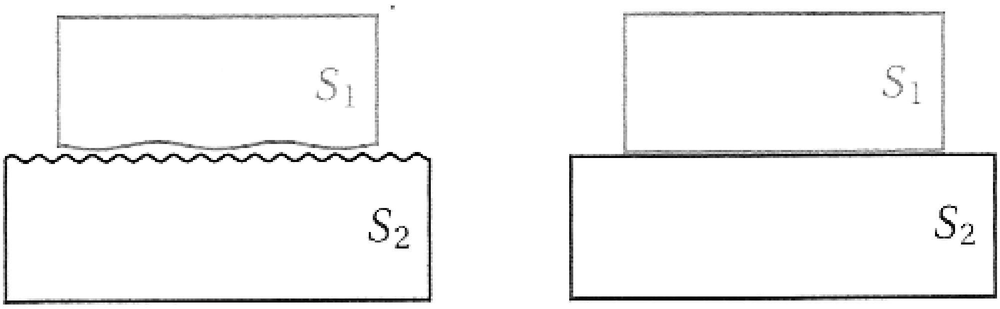
Hypothèses.

Définir une liaison revient à choisir un modèle caractérisant les mouvements laissées libres par les surfaces de contact entre les deux solides.

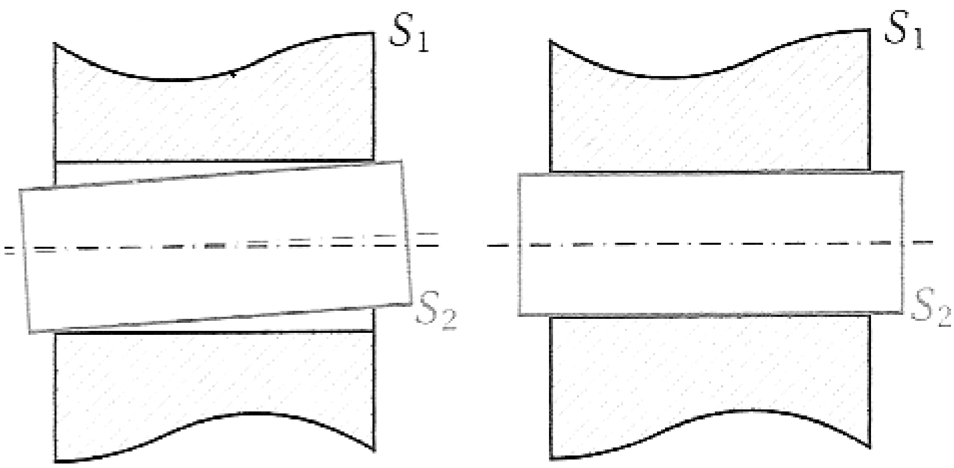
Pour cela, il faut étudier la zone de contact entre les deux solides, en faisant les hypothèses suivantes :

- ✓ Les solides en contact sont indéformables.
- ✓ La zone en contact est géométriquement parfaite (les zones de contact sont des points, des lignes ou des plans).
- ✓ Les jeux sont nuls (les jeux sont les petits espaces laissés libre au niveau de la zone de contact entre les deux solides).
- ✓ Le contact est maintenu et considéré bilatéral.

Surface réelle (défauts amplifiés) et modèle associé.



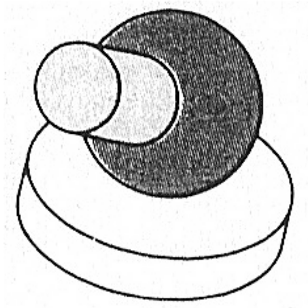
Guidage réel avec jeux (défauts amplifiés) et modèle associé.

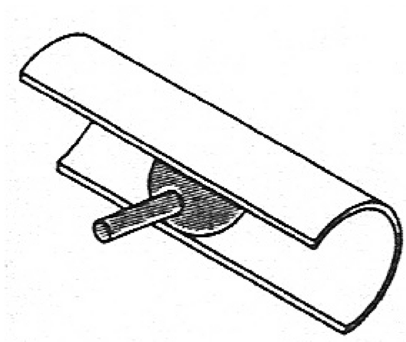


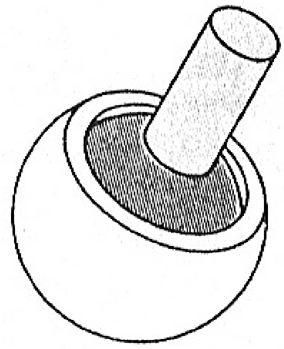
Géométrie du contact entre 2 solides.

La zone de contact entre 2 solides peut être de 3 types :

- ✓ Ponctuelle (un point).
- ✓ Linéique (une ligne droite ou courbe).
- ✓ Surfacique (un plan, un cylindre ou une sphère).

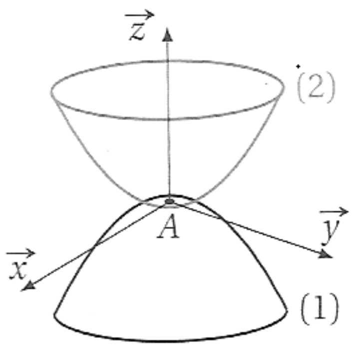


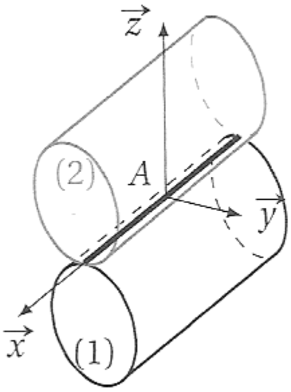


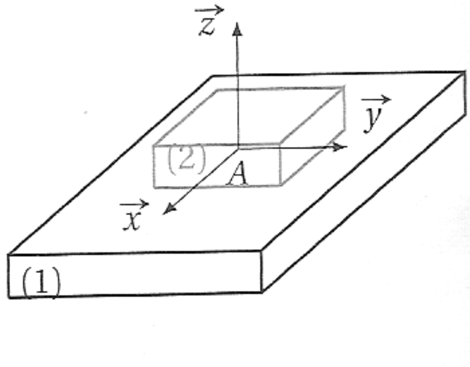


Remarque : Dans la réalité, les contacts ponctuel et linéique n’existent pas, car il y a toujours une déformation au niveau du contact. Cependant, elle reste faible.

Afin de définir les mouvements possibles, on associe un repère à partir des caractéristiques de la zone de contact.





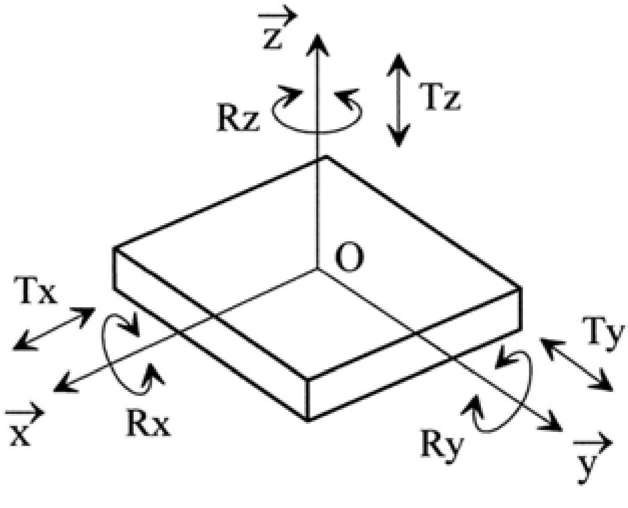


Degré de liberté :

Une pièce libre dans tous ses déplacements est une pièce qui n'a aucune liaison avec une autre pièce. Elle peut alors se déplacer en translation et en rotation suivant trois axes (6 degrés de liberté).

Définir la liaison entre deux pièces revient à préciser le nombre de degrés de liberté possibles entre ces deux pièces. A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison.

Dans tous les cas, dans une liaison entre deux pièces : Nbre de degrés de liberté + Nbre degrés de liaison = 6.

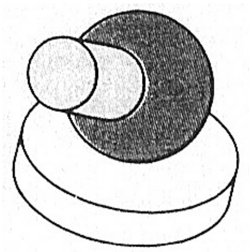
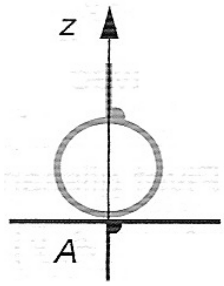
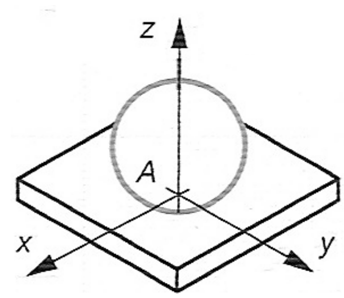


On peut distinguer :

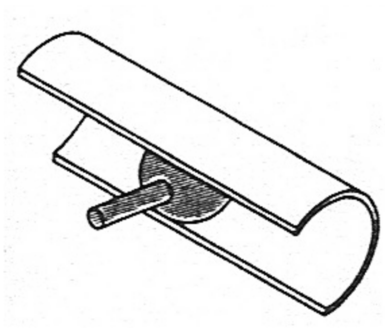
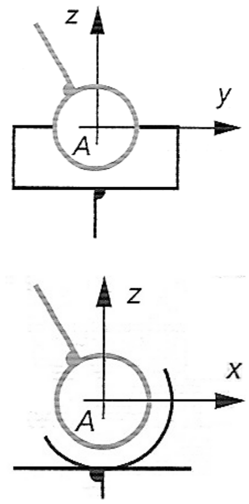
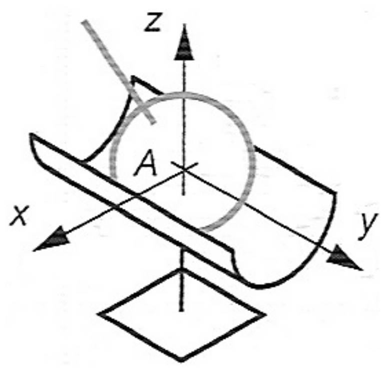
- ✓ Les liaisons élémentaires : obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant aux deux pièces.
- ✓ Les liaisons composées : réalisées par une association de 2 liaisons élémentaires.

II. LES LIAISONS ELEMENTAIRES.

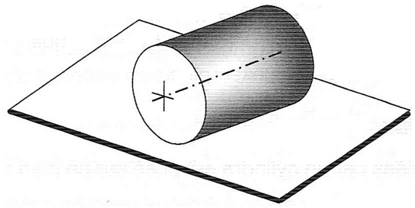
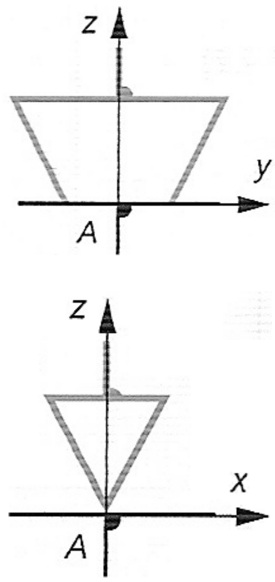
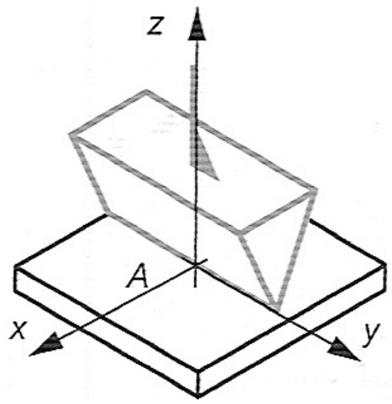
2.1. Liaison sphère plan (ponctuelle).

Réalisation : contact sphère/plan	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 5 Rotation : 3 Translation : 2	Caractéristiques géométriques : Normale $(A,\vec{z})$ A : point de contact	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}\omega_x & v_x\\ \omega_y & v_y\\ \omega_z & 0\end{Bmatrix}_A$ Ce torseur a cette forme uniquement au point A

2.2. Liaison sphère cylindre (linéaire annulaire).

Réalisation : contact sphère/cylindre	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 4 Rotation : 3 Translation : 1	Caractéristiques géométriques : Centre A, direction $\vec{y}$	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}\omega_x & 0\\ \omega_y & v_y\\ \omega_z & 0\end{Bmatrix}_A$ Ce torseur a cette forme uniquement au point A

2.3. Liaison cylindre plan (linéaire rectiligne).

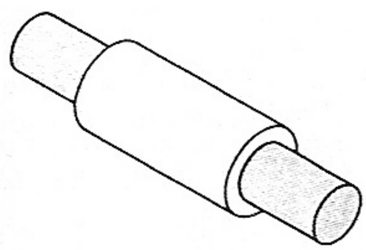
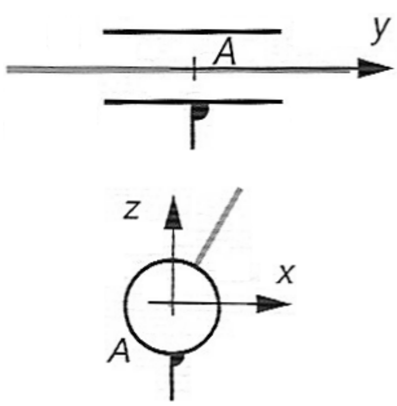
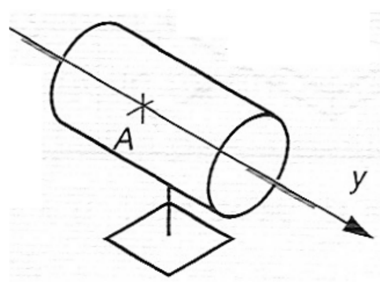
<table>
<tr>
<td>Réalisation :
contact cylindre/plan
</td>
<td>Schématisation dans le plan

</td>
<td>Schématisation dans l'espace

</td>
</tr>
<tr>
<td>Degré de liberté : 4

Rotation : 2

Translation : 2</td>
<td>Caractéristiques géométriques :

Ligne de contact $(A,\vec{y})$,
direction normale $\vec{z}$</td>
<td>Torseur cinématique :
$\{V2/1\}=\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$
Ce torseur a cette forme en tout point de la ligne de contact</td>
</tr>
</table>

2.4. Liaison pivot glissant.

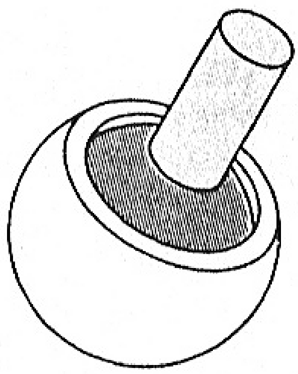
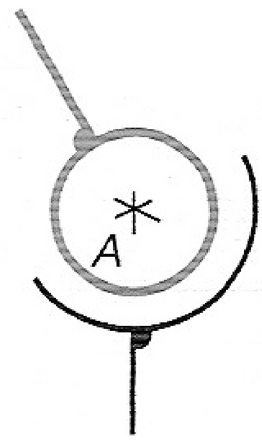
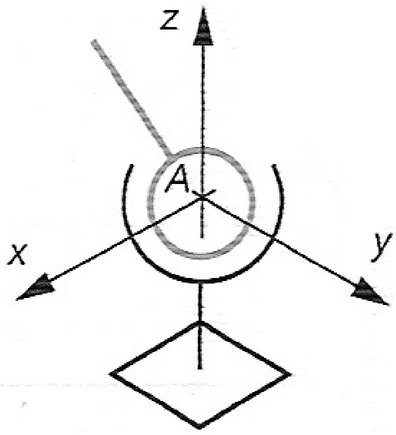
<table>
<tr>
<td>Réalisation :
contact cylindre /cylindre
</td>
<td>Schématisation dans le plan

</td>
<td>Schématisation dans l'espace

</td>
</tr>
<tr>
<td>Degré de liberté : 2

Rotation : 1

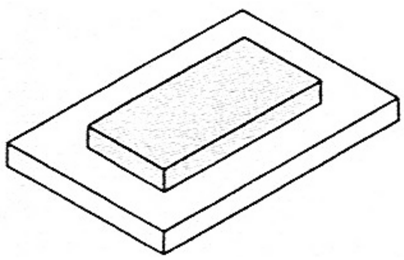
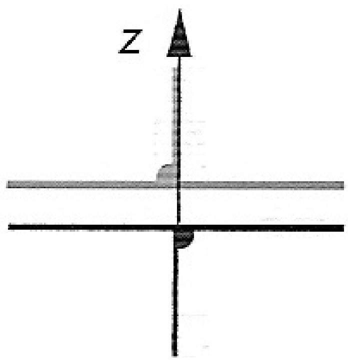
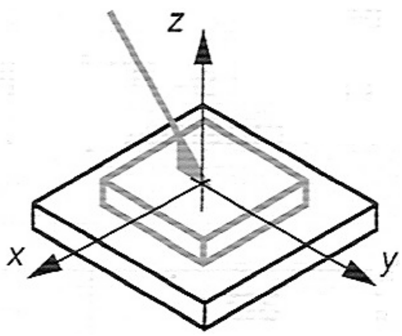
Translation : 1</td>
<td>Caractéristiques géométriques :

Axe $(A,\vec{y})$</td>
<td>Torseur cinématique :
$\{V2/1\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$
Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation</td>
</tr>
</table>

2.5. Liaison rotule (sphérique).

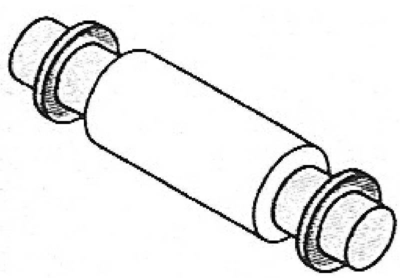
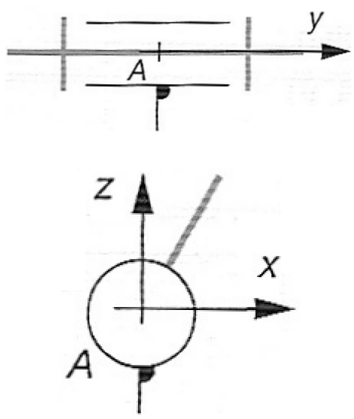
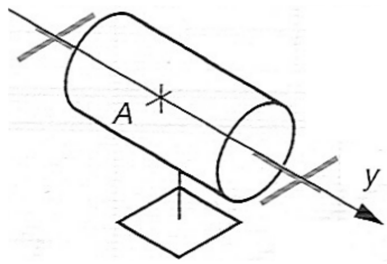
Réalisation : contact sphère/ sphère	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 3 Rotation : 3 Translation : 0	Caractéristiques géométriques : Centre A	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}\omega_x & 0\\ \omega_y & 0\\ \omega_z & 0\end{Bmatrix}_A$ Ce torseur a cette forme uniquement au point A

2.5. Liaison appui plan.

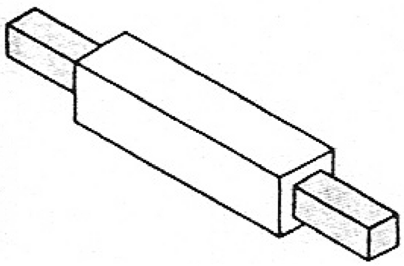
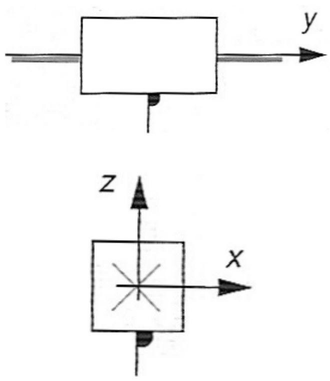
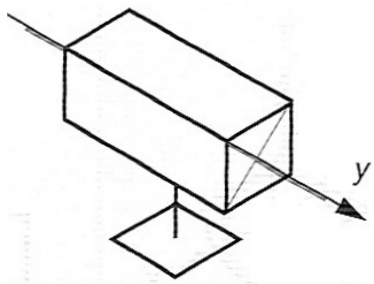
Réalisation : contact plan/plan	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 3 Rotation : 1 Translation : 2	Caractéristiques géométriques : Normale $\vec{Z}$	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}0 & v_x\\ 0 & v_y\\ \omega_z & 0\end{Bmatrix}_M$ Ce torseur a cette forme en tout point

III. LES LIAISONS COMPOSEES.

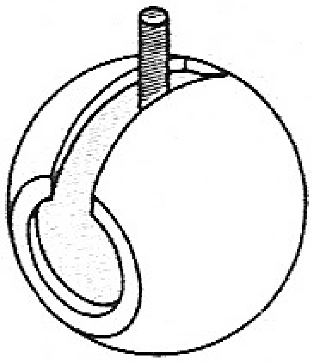
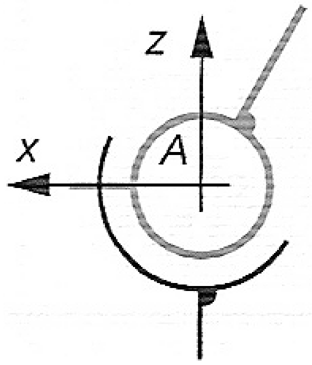
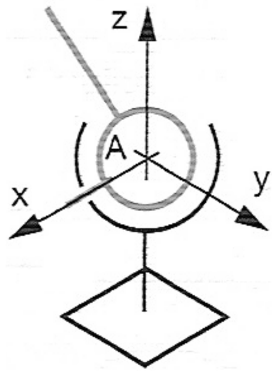
3.1. Liaison pivot.

Réalisation :	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 1 Rotation : 1 Translation : 0	Caractéristiques géométriques : Axe $(A, \vec{y})$	Torseur cinématique : $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation

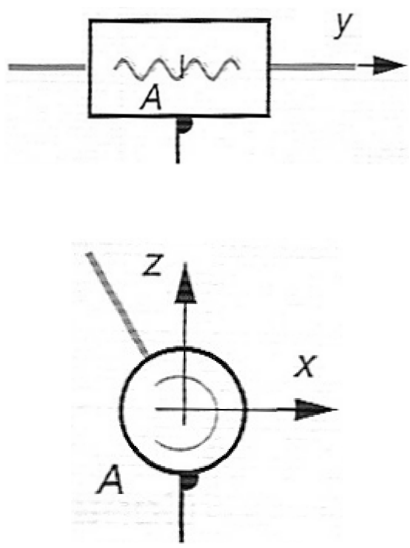
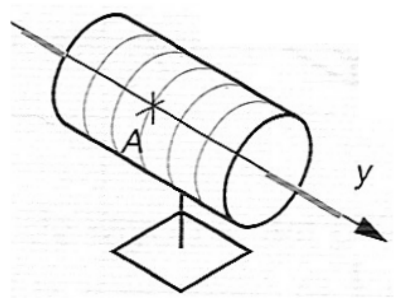
3.2. Liaison glissière.

Réalisation :	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 1 Rotation : 0 Translation : 1	Caractéristiques géométriques : Direction $\vec{y}$	Torseur cinématique : $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point

3.3. Rotule à doigt (sphérique à doigt).

Réalisation :	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
		
Degré de liberté : 2 Rotation : 2 Translation : 0	Caractéristiques géométriques : Centre A, rotation $(A,\vec{z})$ interdite	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}\omega_x & 0\\ \omega_y & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A$ Ce torseur a cette forme uniquement au point A

3.4. Liaison hélicoïdale.

Réalisation :	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace
Exemple : une vis et un écrou		
Degré de liberté : 1 Rotation : 1 Translation : 1 (conjuguées)	Caractéristiques géométriques : Axe $(A,\vec{y})$, pas p	Torseur cinématique : $\{V2/1\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \omega_y & v_y\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_A$ Quand on tourne d'un tour, on avance du pas p Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation

IV. GRAPHE ET SCHEMA.

4.1. Exemples.

Schéma cinématique dans l'espace

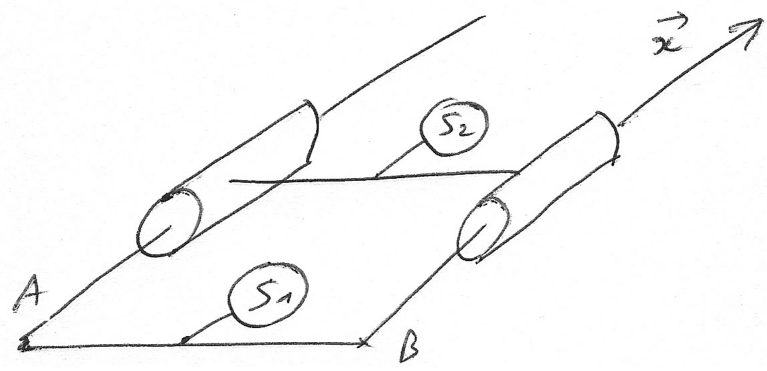
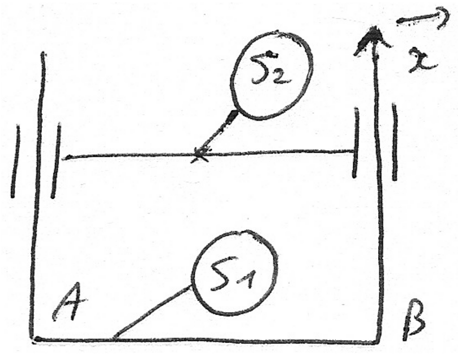
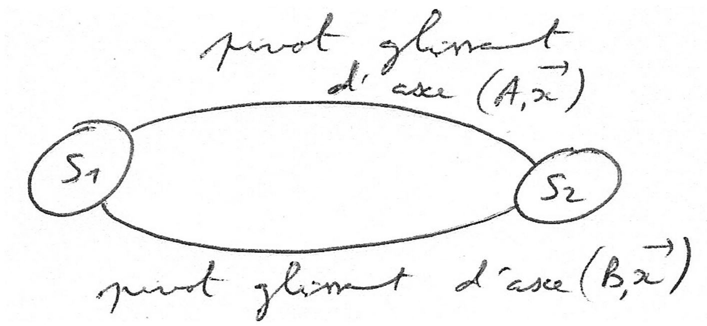


Schéma cinématique dans le plan



Graphe des liaisons :



4.2. Graphe des liaisons.

Le graphe de liaisons permet de recenser les solides et les liaisons composant le système.
Les solides sont représentés par des cercles.
Les liaisons sont représentées par des arcs entre les solides.
On indique le nom de la liaison et ses caractéristiques géométriques.

4.3. Schéma cinématique.

Le schéma cinématique permet de comprendre les mouvements du mécanisme.
Il représente, dans le plan ou dans l'espace, la disposition des solides et des liaisons.
Les solides sont représentés par des traits.
Les liaisons sont représentées par leurs représentations normalisées.
Le schéma cinématique peut faire apparaitre le paramétrage afin de conduire l'étude du mécanisme.

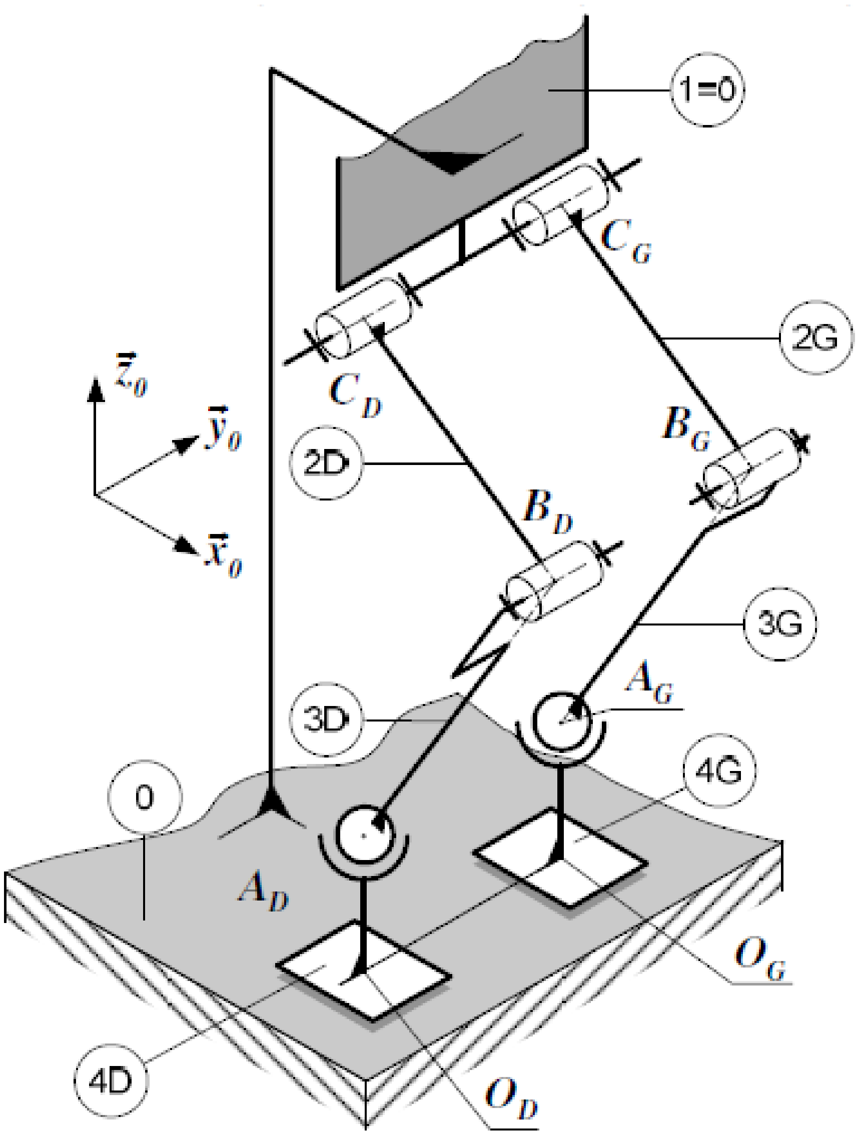
4.4. Exemple : Robot « Roméo ».

Roméo est un projet de développement d'un robot humanoïde destiné à devenir un véritable assistant des personnes en perte d'autonomie.

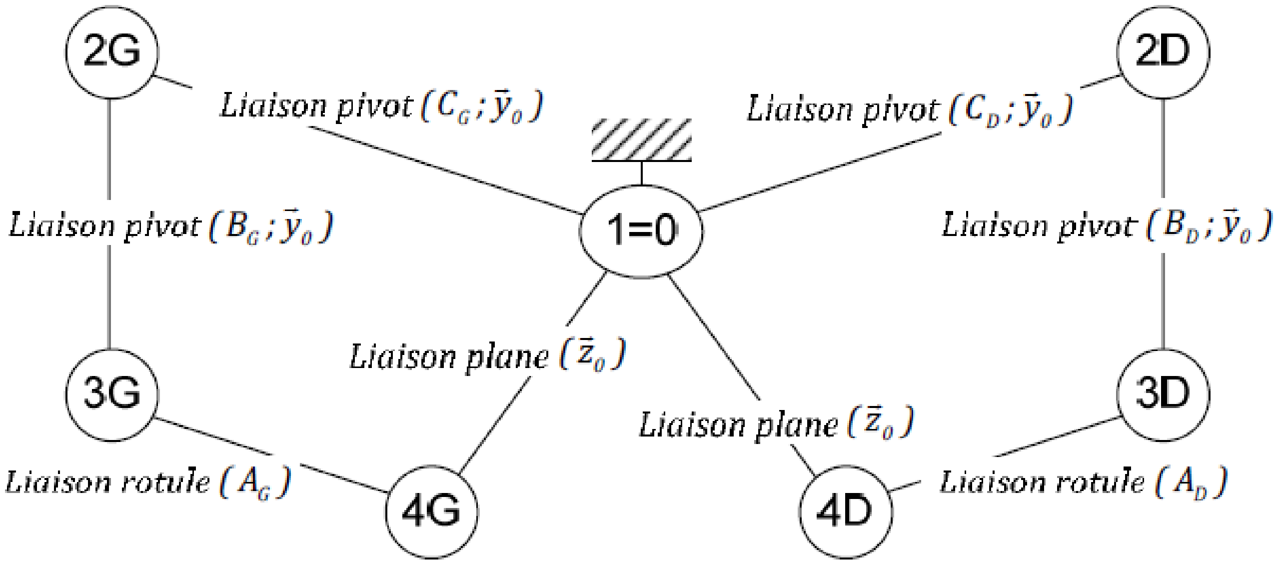
Pour cela, il doit être capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés…).

Mais il doit également aider une personne à se déplacer à domicile, et même, lui porter secours en cas de chute.

Schéma cinématique des jambes du robot.



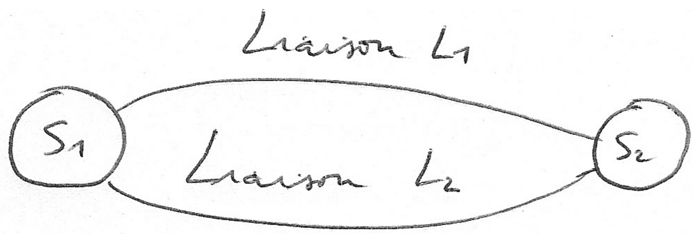
Graphe des liaisons des jambes du robot.



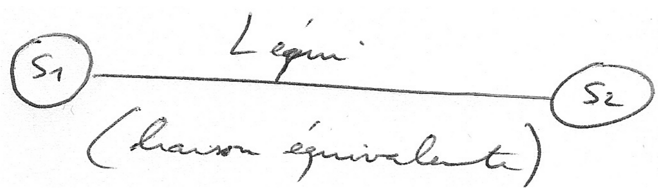
V. COMPOSITION DE LIAISONS.

5.1. Liaisons en parallèle.

Deux solides sont en liaisons parallèles si la chaîne de solide est de la forme :



Liaison équivalente :



Le torseur cinématique de la liaison équivalente doit être compatible avec les torseurs cinématiques des liaisons L1 et L2.

$$\{VL\acute{e}qui\}_M = \{VL_1\}_M = \{VL_2\}_M$$

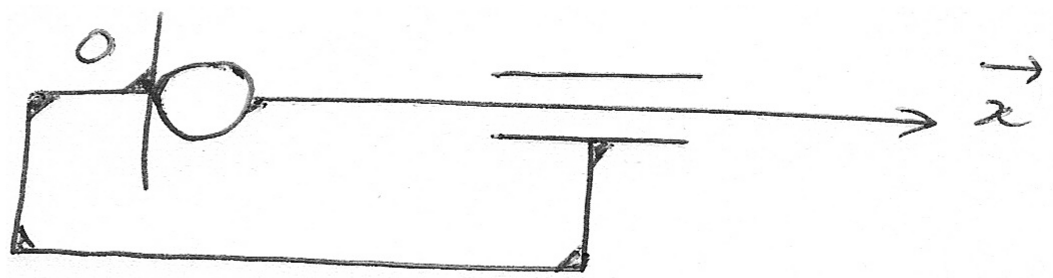
Remarques :

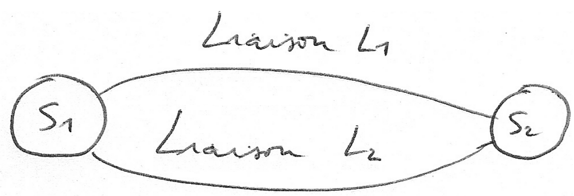
- ✓ Les mobilités s'annulent (si une liaison interdit le mouvement, la liaison équivalente interdit le mouvement).
- ✓ Il faut exprimer les torseurs aux mêmes points.
- ✓ Pour simplifier l'écriture, on utilise des notations particulières :

$$\{VL1\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S2/S1) \\ V(M \in S2/S1) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ \beta_1 & v_1 \\ \gamma_1 & w_1 \end{Bmatrix}_M$$

(Les composantes traduisent des mobilités).

Exemple :





L1 : ponctuelle en O de normale $\vec{x}$

L2 : pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$

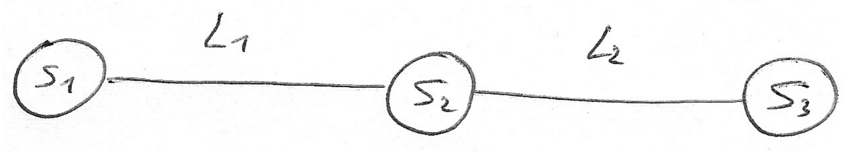
$$\{VL1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & v_1 \\ \gamma_1 & w_1 \end{Bmatrix}_O \qquad \{VL2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & v_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad \{VL\acute{e}qui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O$$

$$\{VL\acute{e}qui\}_O = \{VL_1\}_O = \{VL_2\}_O \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 = 0 \\ \gamma = \gamma_1 = 0 \\ u = 0 = u_2 \\ v = v_1 = 0 \\ w = w_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \{VL\acute{e}qui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

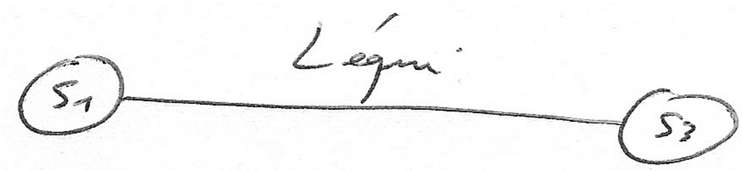
$L_{\acute{e}qui}$: pivot d'axe $(O,\vec{x})$

5.2. Liaisons en séries.

Trois solides sont en liaisons séries si la chaîne de solide est de la forme :



Liaison équivalente :

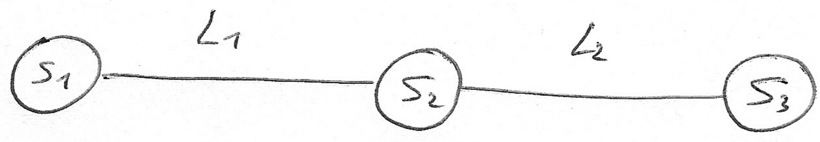


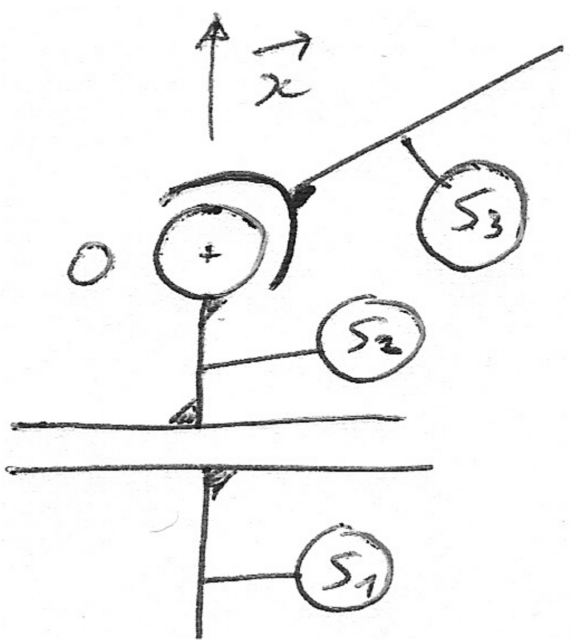
La composition des torseurs cinématiques permet d'écrire :

$$\{VLéqui\}_M = \{VL_1\}_M + \{VL_2\}_M$$

Remarque : Les mobilités s'ajoutent (si une liaison autorise le mouvement, la liaison équivalente autorise le mouvement).

Exemple :

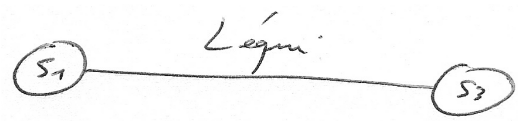




L1 : appui plan de normale $\vec{x}$

L2 : rotule de centre O.

On cherche :

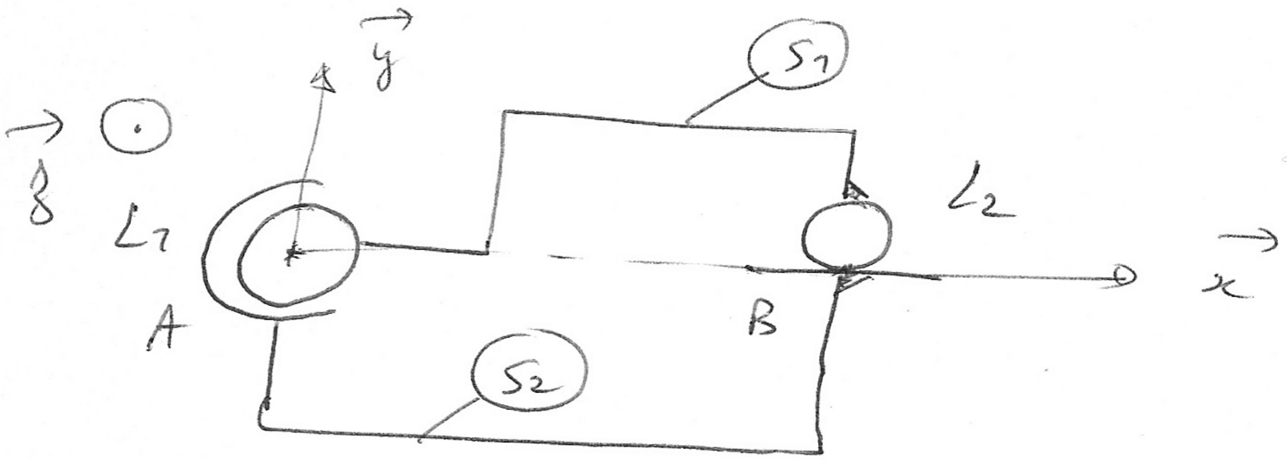


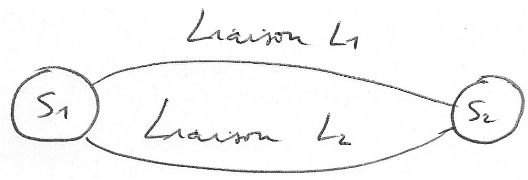
$$\{VL1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & v_1 \\ 0 & w_1 \end{Bmatrix}_O \qquad \{VL2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \end{Bmatrix}_O \qquad \{VLéqui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O$$

$$\{VLéqui\}_O = \{VL_1\}_O + \{VL_2\}_O \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta = 0 + \beta_2 \\ \gamma = 0 + \gamma_2 \\ u = 0 + 0 \\ v = v_1 + 0 \\ w = w_1 + 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \{VLéqui\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha & 0 \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_O$$

$L_{équi}$: ponctuelle en O de normale $\vec{x}$

5.3. Exemple de composition de liaisons avec changement de point.





$$\{VL1\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{matrix} \right\}_A \qquad \{VL2\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 & u_2 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & w_2 \end{matrix} \right\}_B$$

On cherche le torseur de la liaison équivalente au point A. Il faut exprimer les torseurs en A.

$\{VL2\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(B) \end{matrix} \right\}_B$ on veut $\{VL2\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(A) \end{matrix} \right\}_A$ $\qquad \vec{V}(A) = \vec{V}(B) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA}$

$$\vec{V}(A) = \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -l.\gamma_2 \\ w_2 + l.\beta_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{VL2\} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 & u_2 \\ \beta_2 & -l.\gamma_2 \\ \gamma_2 & w_2 + l.\beta_2 \end{matrix} \right\}_A$$

$$\{VL\acute{e}qui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_A \qquad \{VL\acute{e}qui\}_A = \{VL_1\}_A = \{VL_2\}_A \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 = \beta_2 \\ \gamma = \gamma_1 = \gamma_2 \\ u = 0 = u_2 \\ v = 0 = -l.\gamma_2 \\ w = 0 = w_2 + l.\beta_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{VL\acute{e}qui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$\Rightarrow$ Rotule à doigt de centre A, rotation $(A, \vec{z})$ interdite

5.4. Remarque.

Une approche intuitive basée sur l’analyse des mouvements relatifs possibles permet généralement de déterminer la liaison équivalente.

VI. SCHEMA CINEMATIQUE..

Utilité du schéma cinématique en ingénierie.

- ✓ Comprendre le fonctionnement d’un mécanisme (cas de mécanismes existants).

  La lecture des plans d’ensemble n’est pas toujours aisée et il est utile d’en simplifier la représentation.

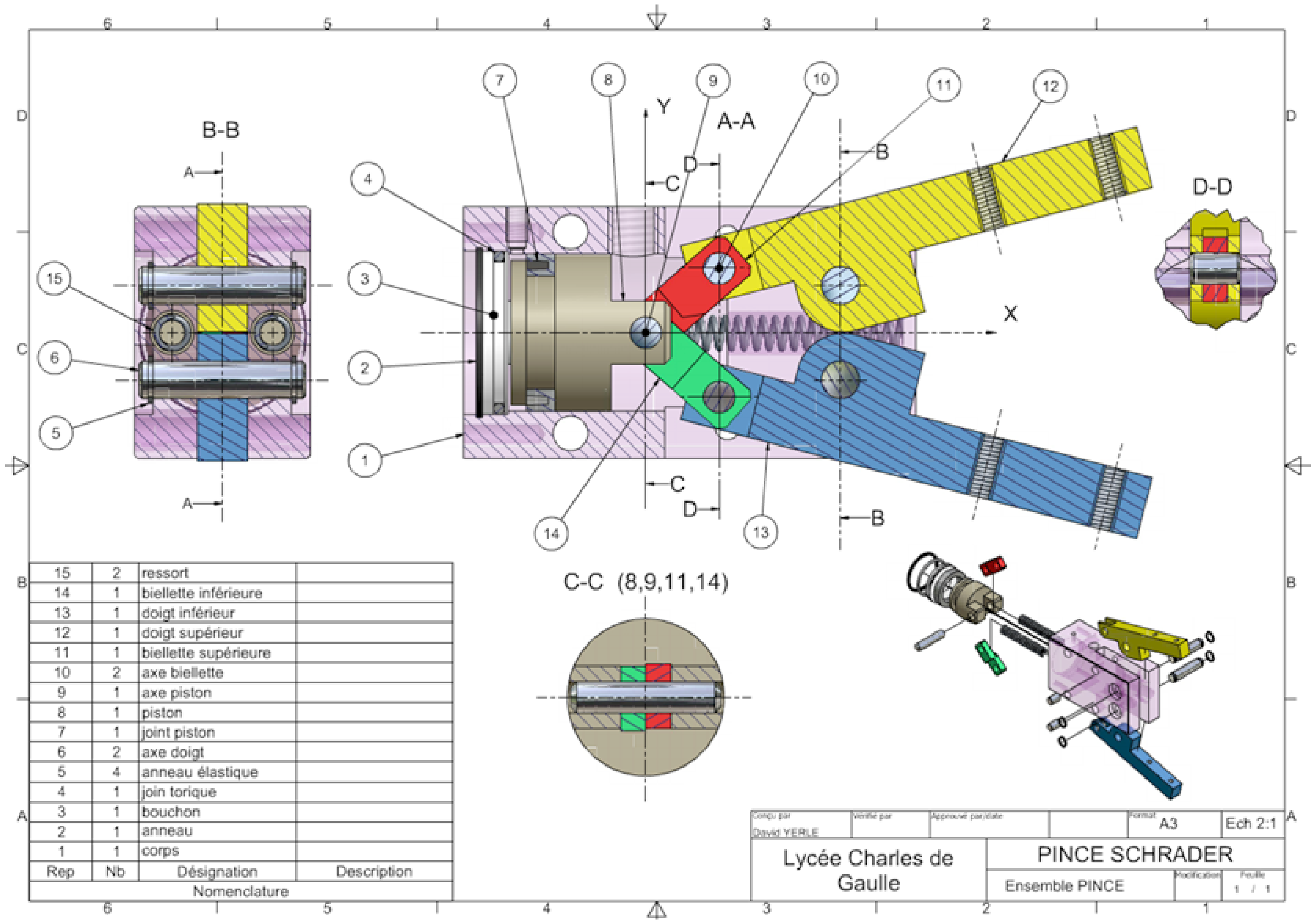
- ✓ Lorsque le mécanisme n’existe pas (phase de conception), on a besoin d’un schéma illustrant le fonctionnement attendu sans toutefois limiter le concepteur dans les formes et dimensions à concevoir.

  Le schéma cinématique minimal est la schématisation préliminaire de toute conception d’un mécanisme.

  Seules les liaisons entre solides et les positions relatives des liaisons vont influencer les mouvements du mécanisme. La forme des pièces et la réalisation des liaisons ne sont pas prises en compte.

  Le schéma cinématique minimal rend compte uniquement des mouvements possibles entre les différents sous-ensembles qui constituent le mécanisme.

Réalisation d'un schéma cinématique minimal à partir d'un dessin de définition : exemple d'une pince de robot.



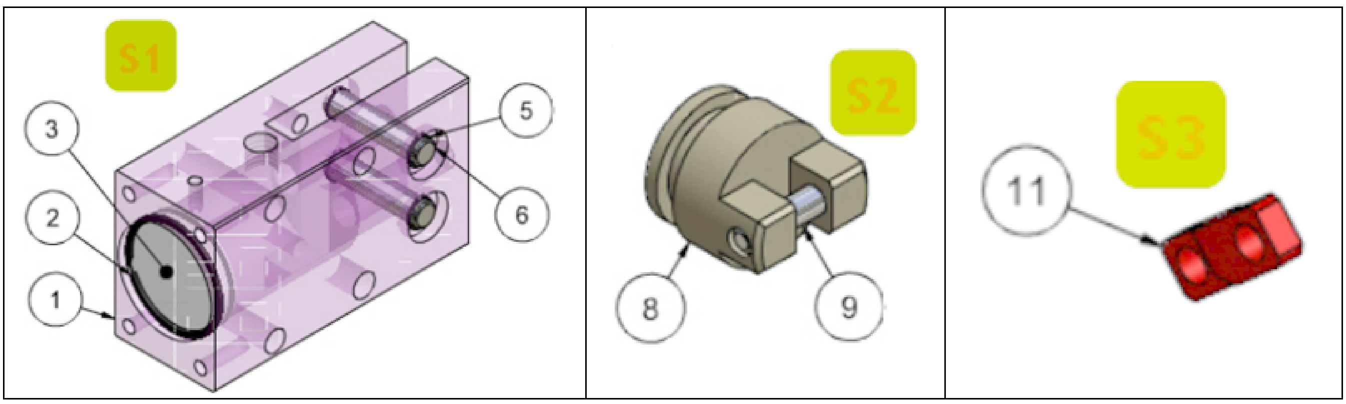
Rep	Nb	Désignation	Description
15	2	ressort	
14	1	biellette inférieure	
13	1	doigt inférieur	
12	1	doigt supérieur	
11	1	biellette supérieure	
10	2	axe biellette	
9	1	axe piston	
8	1	piston	
7	1	joint piston	
6	2	axe doigt	
5	4	anneau élastique	
4	1	join torique	
3	1	bouchon	
2	1	anneau	
1	1	corps	

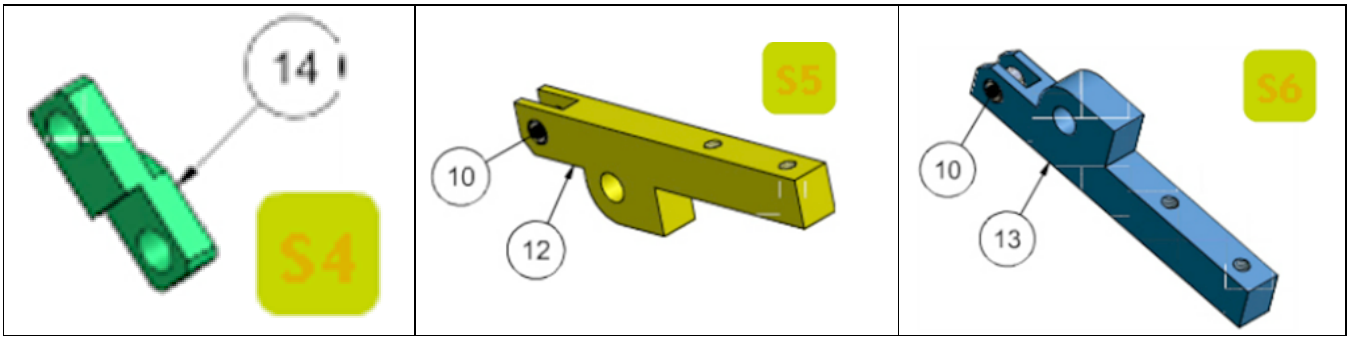
Nomenclature

⇨ Etape 1: définition des classes d'équivalence cinématiques.

Il s'agit de regrouper les pièces n'ayant aucun mouvement relatif les unes par rapport aux autres en sous-ensemble « cinématiquement lié », appelé classes d'équivalences cinématiques.

Chaque sous-ensemble est désigné par le repère de la pièce la plus importante. On obtient ainsi pour la pince de préhension étudiée :

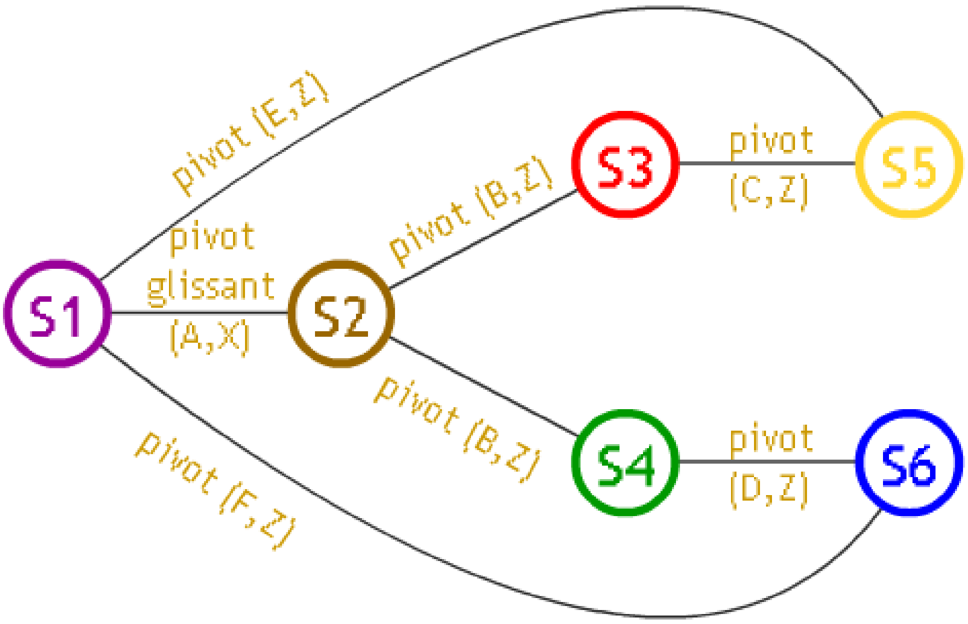




S1 : corps {1,2,3,4,5,6}	S2 : piston {8,9}
S3 : biellette supérieure {11}	S4 : biellette inférieure {14}
S5 : doigt supérieur {10,12}	S6 : doigt inférieur {10,13}

⇨ Etape 2: définition des liaisons et élaboration du graphe de structure

Il s'agit d'analyser la géométrie des surfaces de contact et les mouvements relatifs associés entre les sous-ensembles « cinématiquement liés» afin d'en déduire une modélisation des liaisons.
On peut alors établir le graphe de structure du mécanisme.



<u>Remarques :</u>

- ✓ Lorsqu'on étudie la liaison entre deux classes, il faut imaginer le reste du mécanisme retiré et analyser uniquement les mouvements relatifs entre les deux classes par l'intermédiaire de la liaison étudiée.
- ✓ On étudie les mouvements relatifs autorisés dans le repère local de la liaison.
- ✓ Une modélisation est toujours imparfaite et sujet à discussions. On pourra selon l'étude et la finalité du schéma négliger les jeux et petits mouvements autorisés par une liaison ou au contraire les considérer pour une étude plus complexe et précise. Il faut donc pouvoir justifier le modèle.

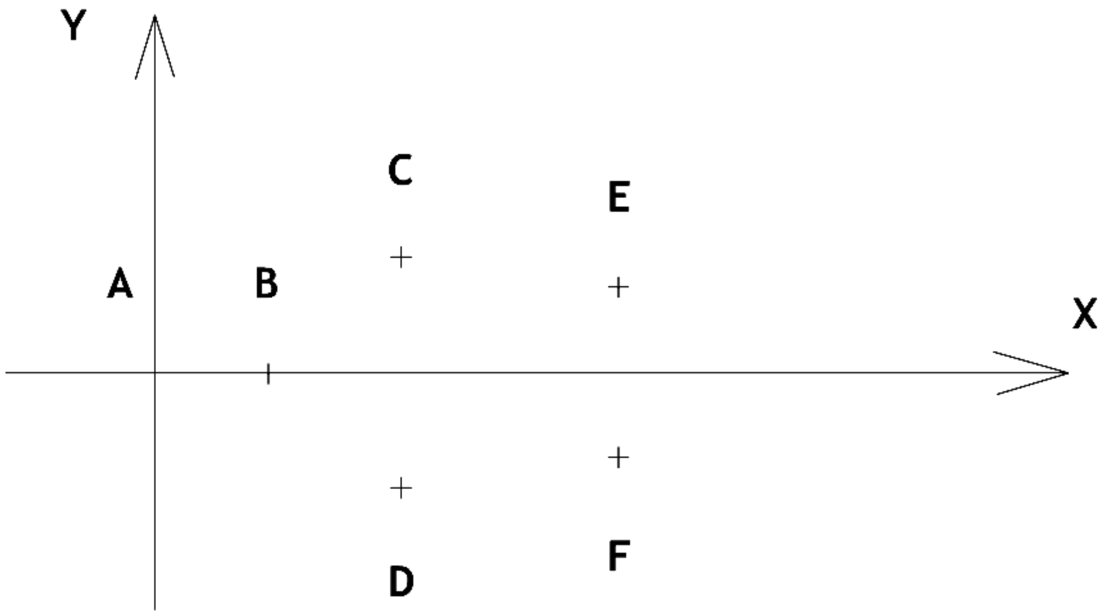
⇨ Etape 3: définition des liaisons et élaboration du graphe de structure.

La dernière étape consiste à tracer le schéma cinématique minimal dans le plan ou dans l'espace.

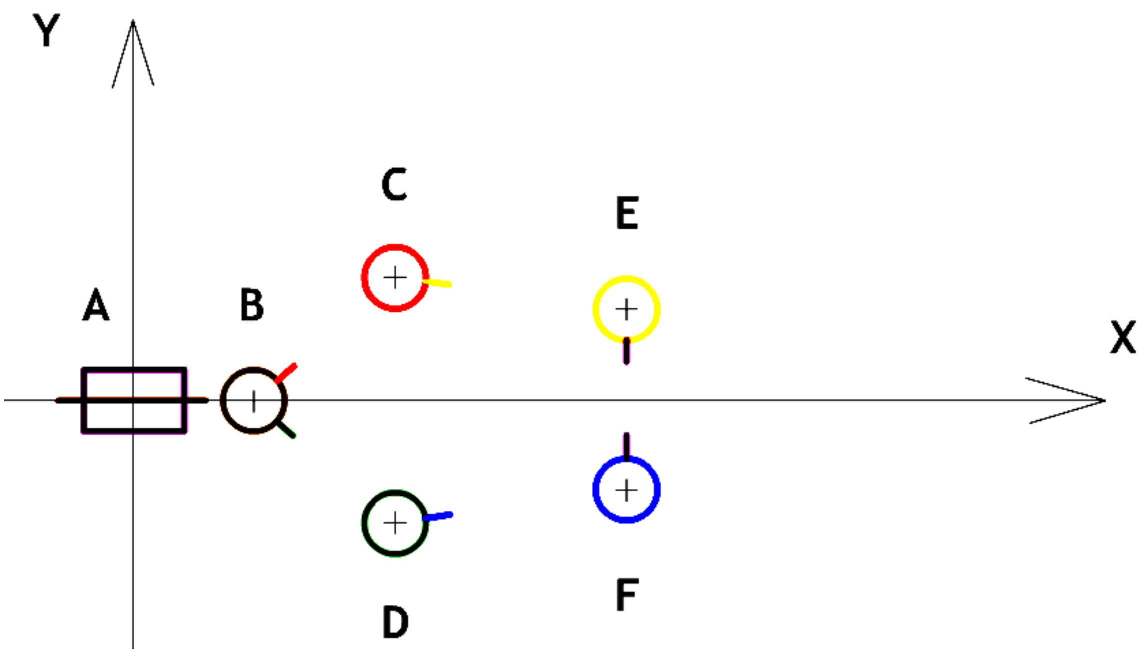
Il faut de positionner un à un les symboles de chaque liaison en respectant leur position et orientation relative. Puis on relie les liaisons entre elles en respectant les classes d'équivalence.

Pour la représentation du schéma cinématique, trois étapes sont conseillés :

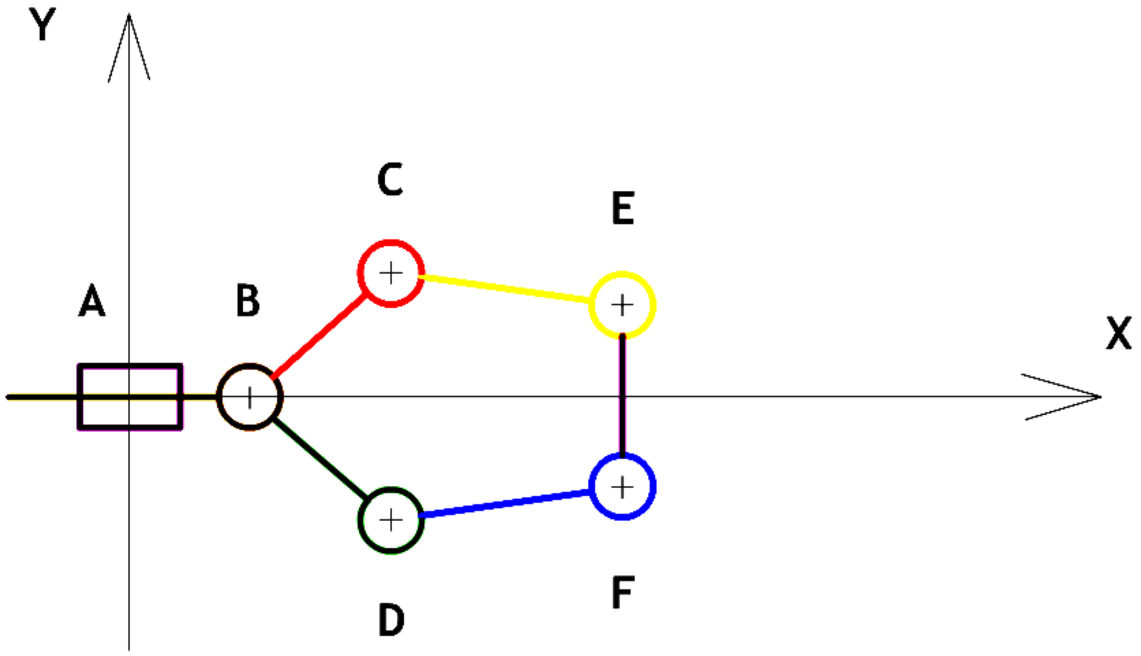
1. Positionner, en respectant les proportions, les centres ou les axes des liaisons.



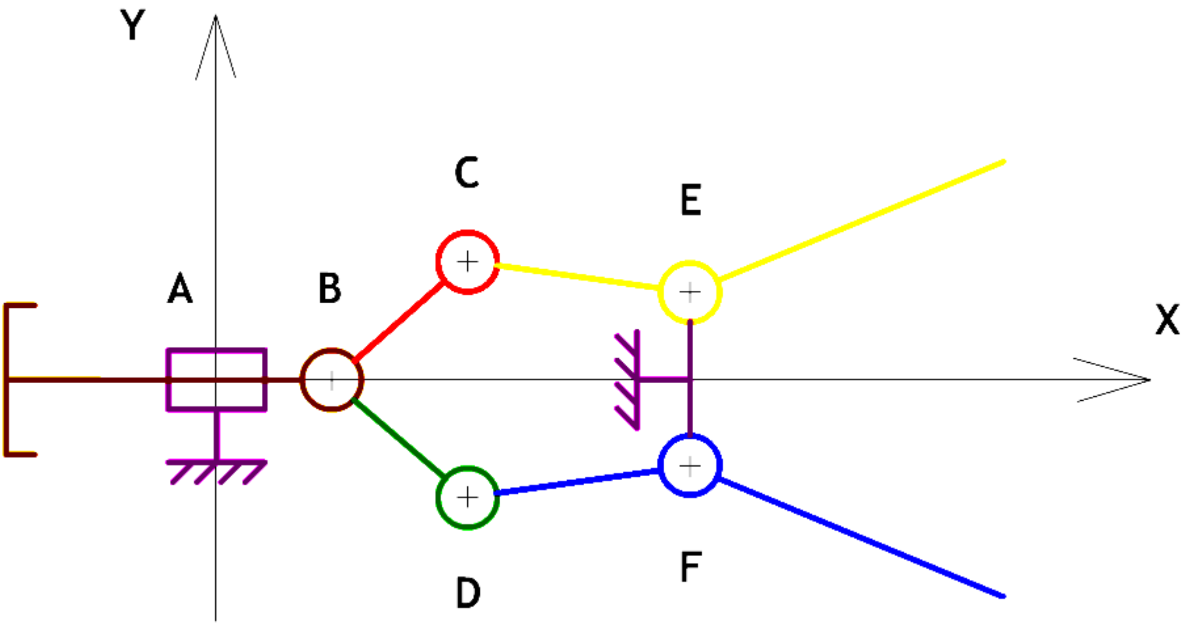
2. Mettre en place les représentations des liaisons entre les classes d'équivalence en respectant l'orientation de chaque liaison.



Représenter les sous-ensembles par des traits en les connectant aux symboles des liaisons.



On peut améliorer la lisibilité en schématisant la forme de classes d'équivalences associés à des pièces importantes (piston, pinces ...)



<u>Remarques :</u>

- ✓ Le sous-ensemble qui fait office de référence (souvent le bâti ou le corps du mécanisme) est identifié dans le schéma par un trait bordé de hachures.
- ✓ L'utilisation de couleurs dans le schéma est un facteur important de lisibilité.

VII. Exemple de réalisation d'une liaison pivot avec des roulements à billes.

Dessin de définition.

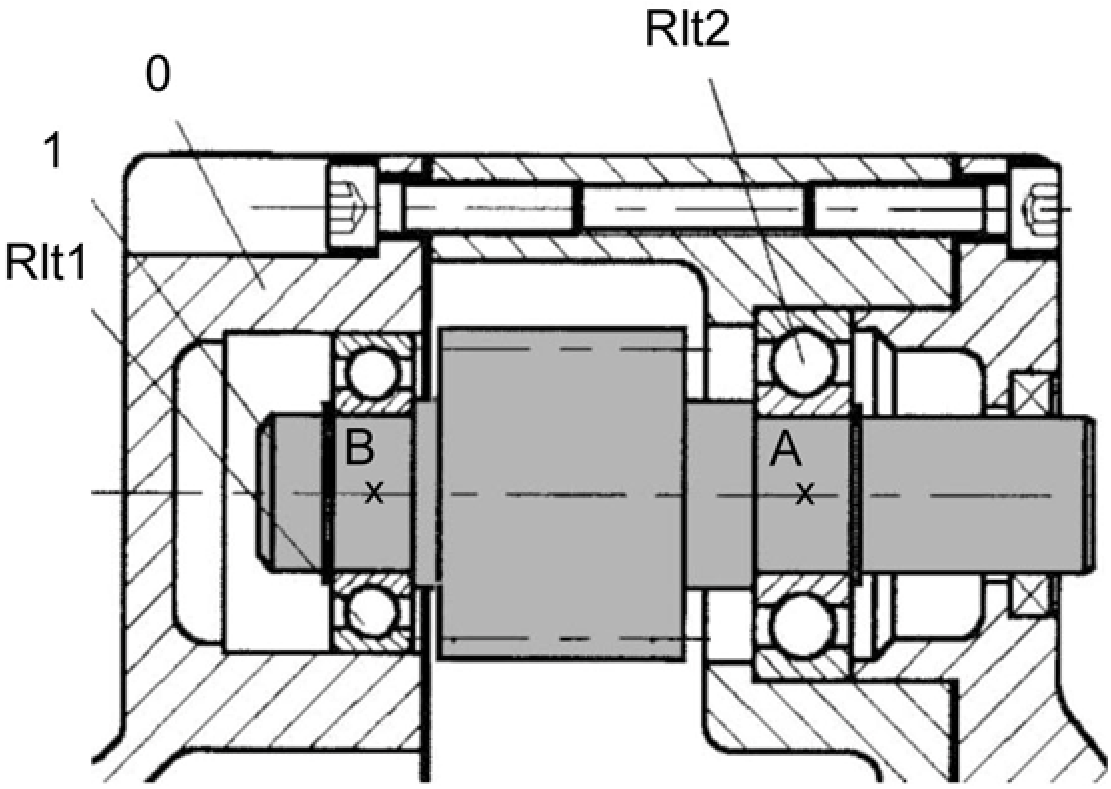
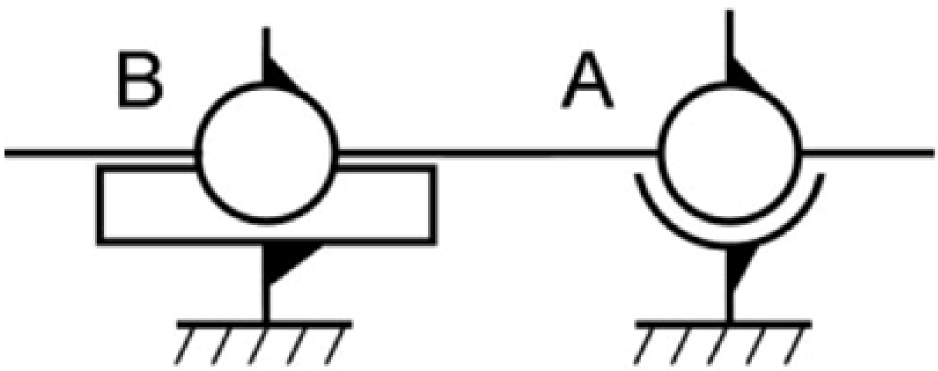


Schéma cinématique



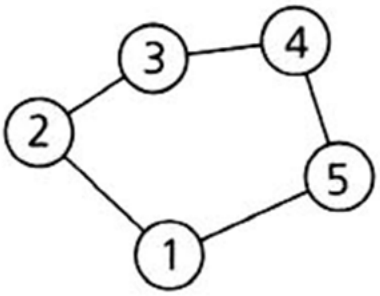
LIAISONS 2 : ETUDE DES CHAINES DE SOLIDES

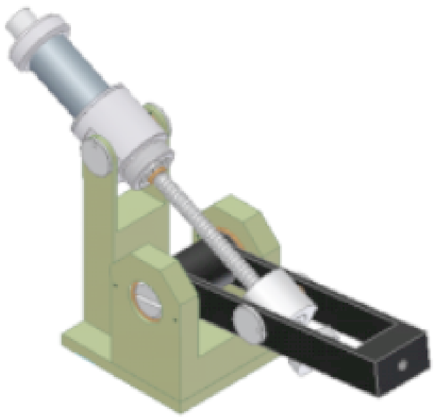
ETUDE DES CHAINES DE SOLIDES.

1. Les différentes chaines de solides.

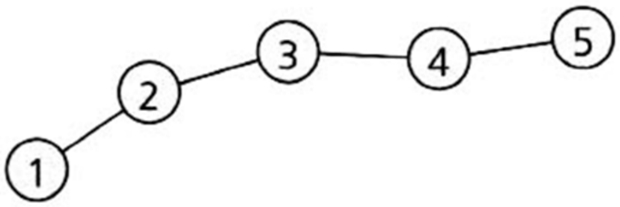
Selon la forme du graphe de structure d'un mécanisme, on parle de chaîne de liaisons fermée, complexe ou ouverte.

Chaîne fermée.

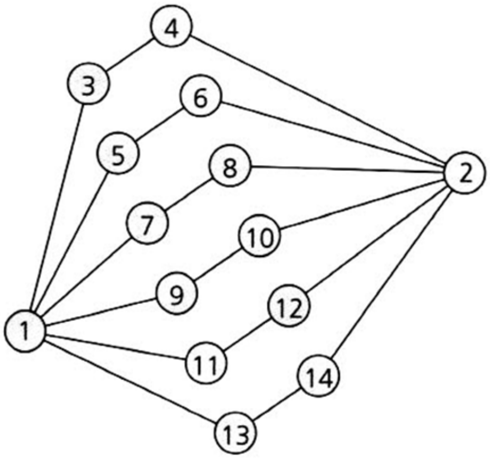


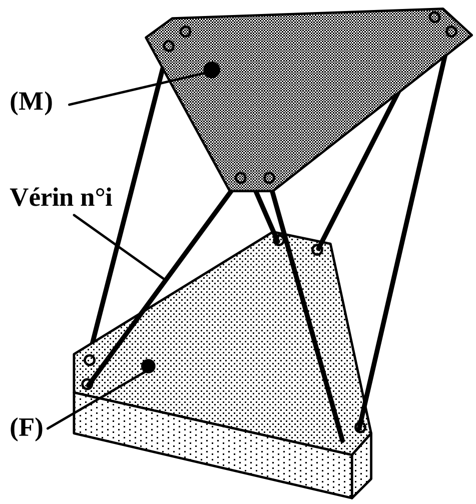


Chaîne ouverte.



Chaîne complexe.





2. Loi entrée/sortie.

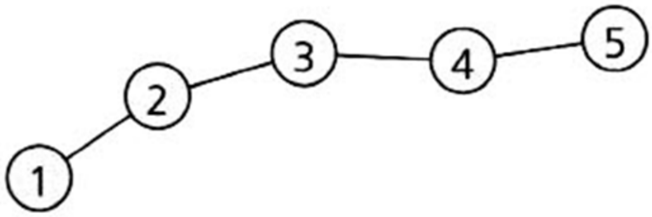
On appelle « loi entrée/sortie » d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position et d'orientation du « solide d'entrée » et ceux du « solide de sortie ».

Le « solide d'entrée » est entrainé par un actionneur (moteur, vérin…).

Le « solide de sortie » est le solide que l'on souhaite positionner ou mettre en mouvement.

La manière dont on obtient cette loi entrée-sortie dépend de la configuration de la chaine cinématique.

3. Loi entrée/sortie d'une chaîne ouverte.



Dans ce type de mécanisme les paramètres cinématiques sont tous indépendants, il faut donc piloter chaque paramètre cinématique.

Il est difficile d'implanter plus d'un actionneur pour piloter le mouvement d'une liaison, ce qui conduit le plus souvent à construire ces mécanismes sur la base de liaisons à un degré de liberté. On utilise principalement des liaisons pivots et glissières. Chaque liaison ainsi pilotée peut s'appeler un axe et on parle alors de robots trois axes, quatre axes, etc.…

Pour ce type de système, on s'intéresse donc généralement à l'effecteur (une pince, une caméra, un pistolet de peinture…) placé en bout de chaine cinématique ouverte c'est le solide de sortie).

Notion de modèle géométrique

La loi entrée-sortie concerne la relation entre les coordonnées articulaires (c'est-à-dire les paramètres pilotant les actionneurs) et les coordonnées opérationnelles (ou généralisées) (c'est-à-dire les coordonnées d'un point de l'effecteur en bout de chaine).

Entrée : coordonnées articulaires (pilotées par des actionneurs).

Sortie : coordonnées opérationnelles ou généralisées (position et orientation de l'effecteur : x, y, z, α, β, γ y).

On distingue le modèle géométrique direct et le modèle géométrique indirect:

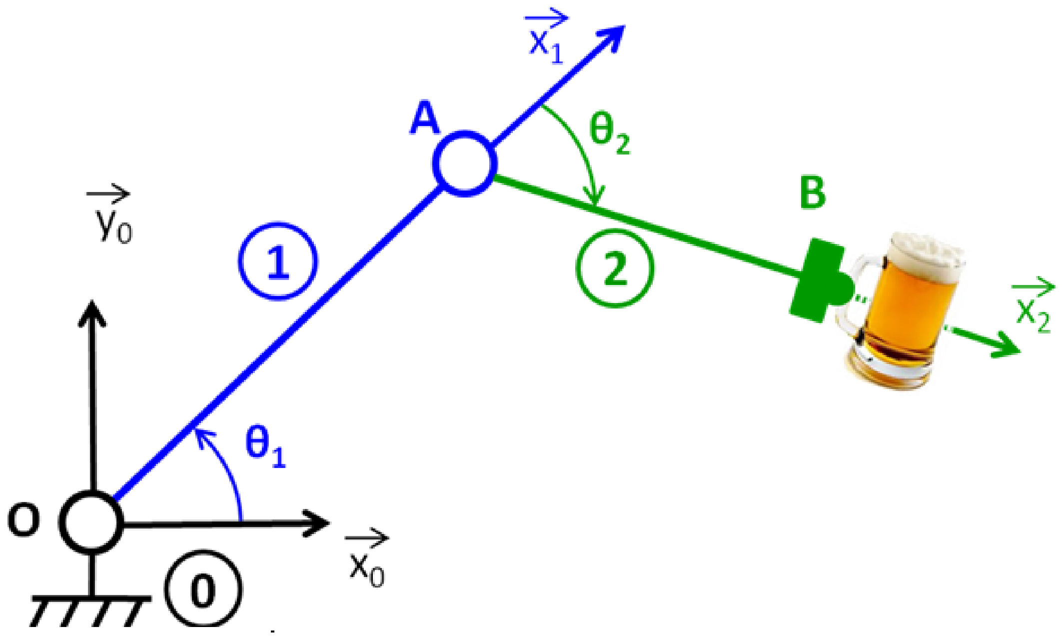
- ✓ Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles (ou généralisées) aux coordonnées articulaires.
- ✓ Le modèle géométrique indirect (ou inverse) permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles (ou généralisées).

Méthode : calcul de modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires.

Il s'obtient généralement à partir d'une relation de Chasles dont l'expression est ensuite projetée dans la base dans laquelle sont exprimées les coordonnées opérationnelles.

Exemple : robot manipulateur 2 axes.



Objectif : Trouver les coordonnées de l'effecteur caractérisant la position de la pince $\overrightarrow{OB} = x_B.\vec{x}_0 + y_B.\vec{y}_0$ en fonction des paramètres d'entrée θ_1 et θ_2 qui sont pilotées par des moteurs.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2 .$$

On projette dans la base de référence.

$$\vec{x}_1 = \cos\theta_1.\vec{x}_0 + \sin\theta_1.\vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2).\vec{x}_0 + \sin(\theta_1 + \theta_2).\vec{y}_0$$

□ $$\overrightarrow{OB} = \left(a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1 + \theta_2)\right).\vec{x}_0 + \left(a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1 + \theta_2)\right).\vec{y}_0$$

Calcul de modèle géométrique indirect (= inverse)

Le modèle géométrique indirect permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles (ou généralisées).

Ce modèle est indispensable pour définir les consignes de position articulaires à émettre vers les actionneurs (moteurs par exemple).

Le modèle géométrique indirect se construit en inversant le modèle géométrique direct.

Exemple : robot manipulateur 2 axes

Objectif : Trouver des paramètres d'entrée θ_1 et θ_2 en fonction des coordonnées de l'effecteur x_B et y_B .

Il faut inverser le modèle géométrique direct :

$x_B = a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1 + \theta_2)$ et $y_B = a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1 + \theta_2)$

Exemple de calcul :

$$(x_B)^2 + (y_B)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.(\cos\theta_1.\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

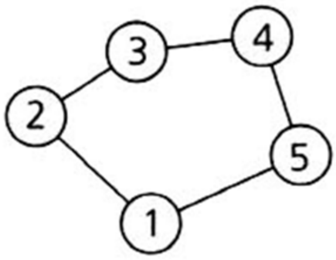
$$(x_B)^2 + (y_B)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta_2$$

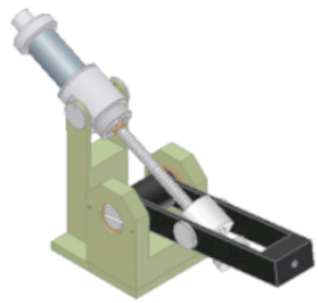
□ $$\theta_2 = \arccos\left(\frac{(x_B)^2 + (y_B)^2 - a^2 - b^2}{2.a.b}\right)$$

De même il faut chercher θ_1 en fonction de x_B et y_B et des constantes...

Remarque : L'orientation de la pince est donnée par l'angle : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_1 + \theta_2$

4. Loi entrée/sortie d'une chaîne fermée.





Certaines caractéristiques géométriques (longueur de bielles…) du système sont invariantes et sont supposées connues.

D'autres paramètres (angle de rotation d'un arbre…) permettent de caractériser les mouvements des solides les uns par rapport aux autres.

La loi entrée-sortie est une loi exprimant le(s) paramètre(s) de sortie du système uniquement en fonction du(des) paramètre(s) d'entrée et des caractéristiques géométriques invariantes du système.

Entrée/Sortie d'une chaîne de solide fermée par fermeture géométrique

La méthode consiste à écrire une relation vectorielle (relation de Chasles) en passant par les points caractéristiques des différentes liaisons en parcourant la chaîne fermée.

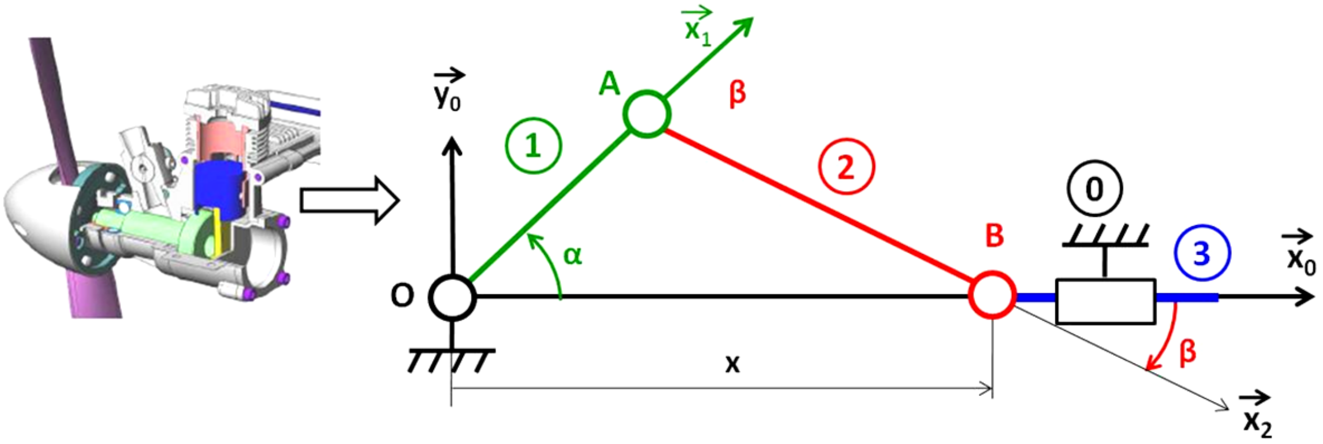
On projette ensuite la relation obtenue dans une base judicieusement choisie, on obtient alors des équations scalaires (2 dans le plan ou 3 dans l'espace).

On choisit en général la base de référence ou une base intermédiaire entre toutes les bases définies pour limiter les projections.

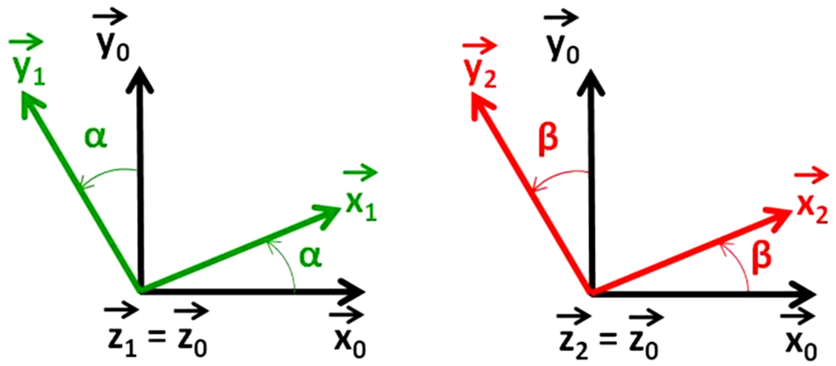
On élimine enfin les paramètres intermédiaires en combinant les équations afin d'obtenir une relation exprimant la sortie en fonction de l'entrée et des constantes du mécanisme.

Exemple: loi entrée-sortie d'un système bielle-manivelle (micromoteur 2T)

Schéma cinématique du moteur :



Figures planes de changement de Base :



La longueur de la manivelle 1 (OA=r) et de la bielle 2 (AB=l) sont des caractéristiques géométriques connues et invariantes.

Les paramètres α , β et x sont des paramètres de position caractérisant les mouvements du mécanisme.

Le paramètre d'entrée est α , il traduit la rotation de la manivelle 1 par rapport à 0.

Le paramètre de sortie est x , il traduit la translation du piston 3 par rapport à 0.

Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle 2 par rapport à 0.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ⇨ $x.\vec{x}_0 = r.\vec{x}_1 + l.\vec{x}_2$

Projection dans la Base B0 :

$$\vec{x}_1 = \cos\alpha.\vec{x}_0 + \sin\alpha.\vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos\beta.\vec{x}_0 + \sin\beta.\vec{y}_0$$

Obtient 2 équations scalaires :

$$x = r.\cos\alpha + l.\cos\beta$$

$$r.\sin\alpha + l.\sin\beta = 0$$

On retrouve donc un système avec 3 paramètres et 2 équations, soit un système à un degré de liberté.

On cherche une équation qui correspond à la loi entrée-sortie du système, x en fonction de α et des constantes du mécanisme.

Il faut utiliser les 2 relations et faire « disparaitre » le paramètre intermédiaire β .

Avec la deuxième équation : $\sin\beta = \dfrac{-r.\sin\alpha}{l}$

On utilise : $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$ □ $\cos\beta = \sqrt{1-(\sin\beta)^2}$

Avec la première équation : $x = r.\cos\alpha + l.\sqrt{1-(\dfrac{r.\sin\alpha}{l})^2}$

5. Fermeture cinématique

Dans le cas d'un mécanisme à chaine fermée, on peut aussi écrire la fermeture cinématique.

Exemple: loi entrée-sortie géométrique d'un système bielle-manivelle (micromoteur 2T)

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{V3/0\}_M = \{V3/2\}_M + \{V2/1\}_M + \{V1/0\}_M$$

Remarques :

- ✓ Les équations obtenues par fermeture de chaîne cinématique correspondent aux dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique.
- ✓ Les torseurs doivent être exprimés au même point.

6. Cas particulier.

Calcul d'une loi d'entrée/sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante.

La loi entrée sortie dans le cas de chaines fermées peut parfois se faire en tenant compte de la particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).

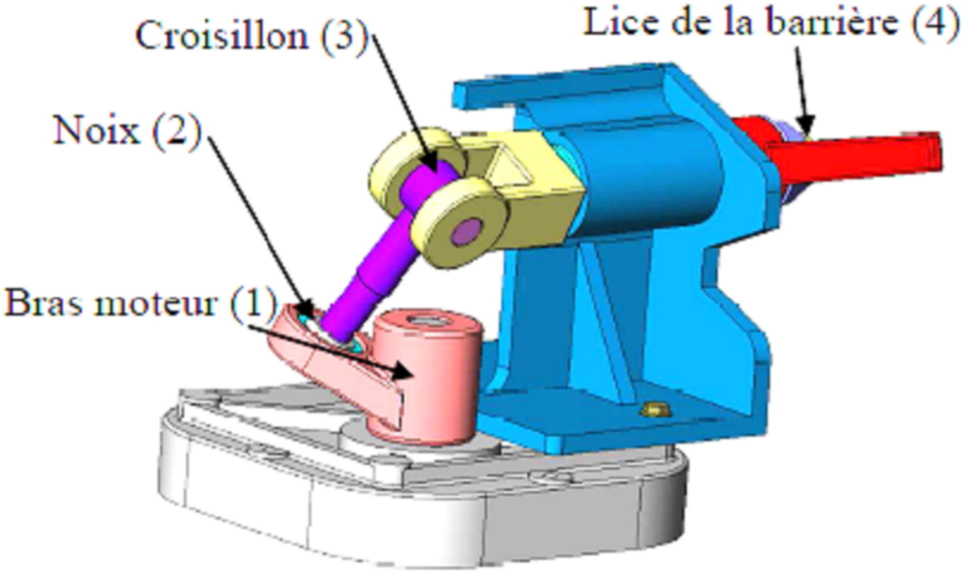
Exemple: mécanisme de barrière de péage « sinusmatic ».

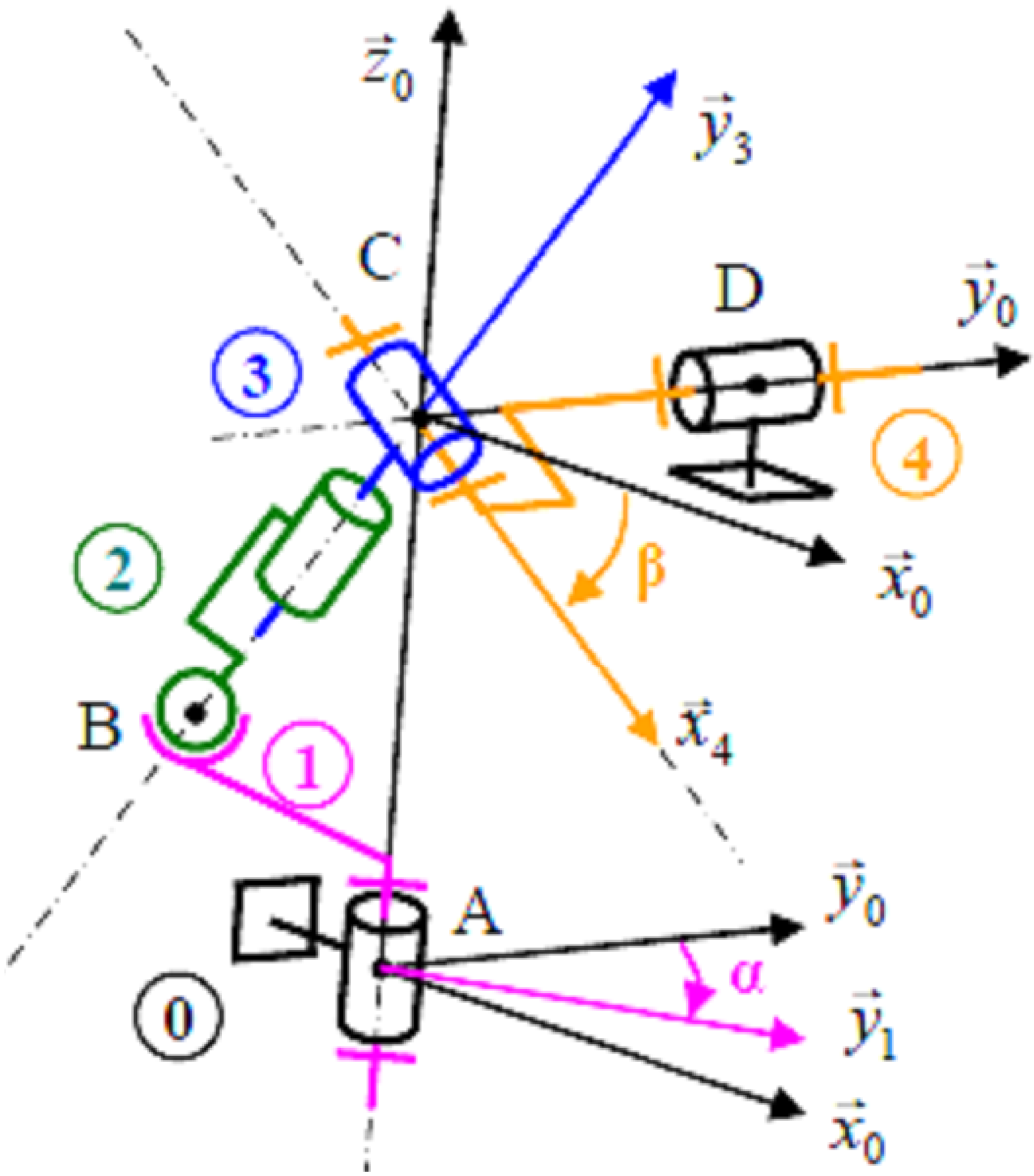
Le mécanisme « Sinusmatic » est un système de transformation de mouvement qui s'adapte sur un motoréducteur.

Il permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative d'amplitude 90° de la barrière.

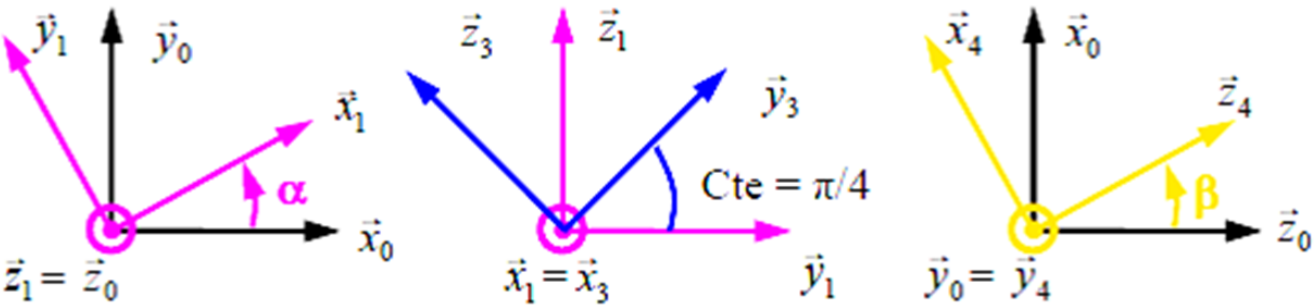
Le système est constitué :

- ✓ D'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0.
- ✓ D'une noix 2 en liaison rotule en B avec le bras moteur 1.
- ✓ D'un croisillon 3 en liaison pivot glissant avec la noix 2.
- ✓ D'une barrière 4 en liaison pivot suivant l'axe avec le croisillon 3 et en liaison pivot suivant l'axe avec le bâti 0.


Croisillon (3)
Lice de la barrière (4)
Noix (2)
Bras moteur (1)


$\vec{z}_0$
$\vec{y}_3$
C
D
$\vec{y}_0$
3
4
2
β
$\vec{x}_0$
B
1
$\vec{x}_4$
A
$\vec{y}_0$
α
0
$\vec{y}_1$
$\vec{x}_0$

Figures de changement de bases



Le paramètre d'entrée est α .
Le paramètre de sortie est β .

La particularité angulaire de ce système est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal avec l'axe $\vec{x}_4$. On a donc le produit scalaire $\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$.

$$\vec{x}_4 = \cos\beta.\vec{x}_0 - \sin\beta.\vec{z}_0$$

$$\vec{y}_3 = \cos\frac{\pi}{4}.\vec{y}_1 + \sin\frac{\pi}{4}.\vec{z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\vec{y}_1 + \vec{z}_1)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_1 = -\sin\alpha.\vec{x}_0 + \cos\alpha.\vec{y}_0$$

$$\vec{y}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.(-\sin\alpha.\vec{x}_0 + \cos\alpha.\vec{y}_0 + \vec{z}_0)$$

$$\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = -\sin\alpha$$

Soit la loi entrée-sortie : $\tan\beta = \arctan(-\sin\alpha)$