

DS4 MPSI1 mai 2026, durée 1h45

Ce DS comporte :

- ✓ 3 exercices.
- ✓ Un problème, extrait d'un sujet de concours, pages 2, 3, 4, 12 et 13, accompagné d'un document réponses pour les questions 34, 35 et 36.

Exercice 1 Torseur résultant

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct.

Soient 2 actions mécaniques modélisées par 2 forces :

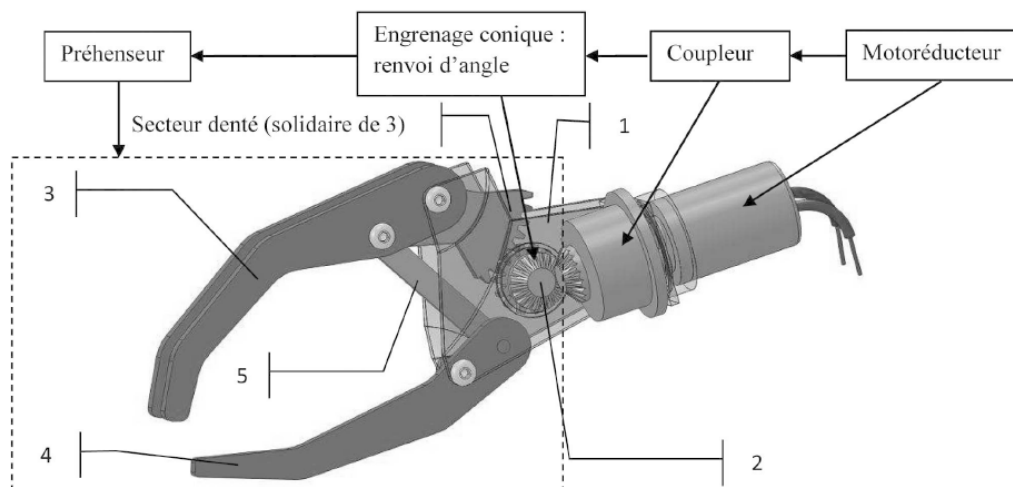
- ✓ Une force $\vec{F}_A = 50 \cdot \vec{x}$ passant par le point $A(0, 2, 0)$.
- ✓ Une force $\vec{F}_B = 50 \cdot \vec{x} + 50 \cdot \vec{y}$ passant par le point $B(-1, -2, 0)$.

Questions

1. Représenter les 2 forces dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .
2. Déterminer le torseur de l'action mécanique résultante en O.
3. Montrer que c'est une force et trouver son support.

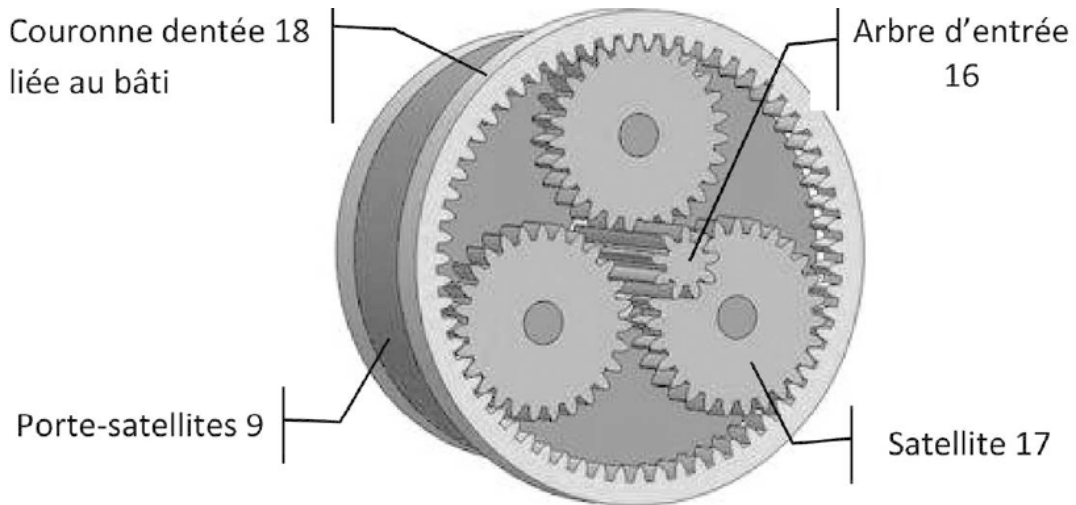
Exercice 2 Train épicycloïdal d'une prothèse de main (CCP PSI 12)

Cette prothèse est constituée d'un motoréducteur à courant continu à double sens de rotation qui transmet son mouvement à un coupleur. Le mouvement est ensuite transmis au préhenseur par un engrenage conique.



Lors des phases d'ouverture et de fermeture rapides, l'axe de sortie du motoréducteur transmet directement son mouvement. Lors du contact avec l'objet, la vitesse est réduite afin d'augmenter le couple transmis pour le serrage. Cette fonction est réalisée à l'aide d'un train épicycloïdal.

Celui-ci est constitué de l'arbre 16 en sortie du motoréducteur (nombre de dents $Z_{16} = 9$), d'une couronne dentée 18 liée au bâti 1 (nombre de dents $Z_{18} = 63$), de 3 satellites 17 (nombre de dents $Z_{17} = 27$) et d'un porte-satellites 9 en forme de cloche qui transmet cette fois le mouvement de sortie au renvoi d'angle.



Question

Déterminer le rapport de réduction : $\rho = \frac{\omega_{9/18}}{\omega_{16/18}}$.

Exercice 3. Robot de peinture

On étudie un robot de peinture de voiture. Ce robot se déplace par rapport à une carrosserie de voiture et projette dessus de la peinture.



L'objectif est de déterminer les lois du mouvement du robot pour lui permettre de vérifier le critère de vitesse de déplacement relatif (entre le robot et la carrosserie de voiture) du cahier des charges.

On donne le schéma cinématique du robot.

Au bâti fixe (0) est lié le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

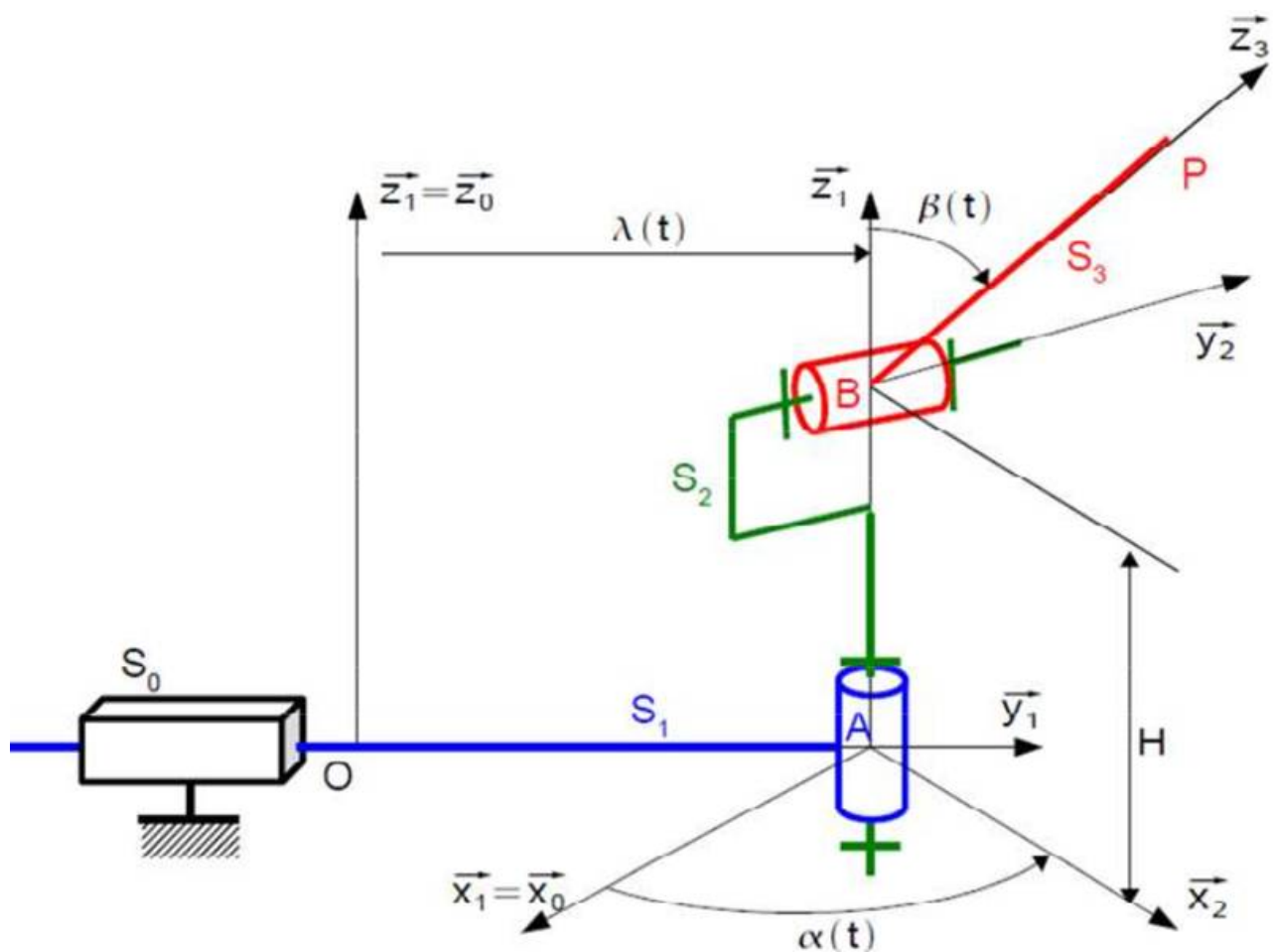
Le chariot (1), en liaison glissière avec le bâti (0), est animé d'un mouvement de translation de direction \vec{y}_1 par rapport au bâti (0).

Au chariot (1) est lié le repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on a $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$, $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$, et $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$. Le corps (2), en liaison pivot avec le chariot (1), est animé d'un mouvement de rotation d'axe (A, \vec{z}_1) et d'angle α par rapport à (1). on a, $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$.

Au corps (2) est lié le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

Le bras (3), en liaison pivot avec le corps (2), est animé d'un mouvement de rotation d'axe (B, \vec{y}_2) et d'angle β par rapport à (2). Au bras (3) est lié le repère $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

On donne : $\vec{OA} = \lambda \cdot \vec{y}_1$ $\vec{AB} = H \cdot \vec{z}_1$ $\vec{BP} = l \cdot \vec{z}_3$



Questions

1. Faire 2 schémas plans pour représenter les repères et les angles α et β .
2. Déterminer la vitesse du point P appartenant au bras (3) dans son mouvement par rapport au bâti (0), $\vec{V}(P \in 3/0)$.
3. Donner les relations que doivent respecter les paramètres pour que le point P décrive à vitesse constante V la droite (D, \vec{z}_0) avec $\vec{OD} = a \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0$.

Bering, le robot de marquage intelligent

Présentation

La société française Conscience Robotics est spécialisée dans le développement d'un moteur d'intelligence artificielle universelle pouvant être intégré à tout type de robot. Elle développe donc également des robots utilisant ce moteur dont le robot Bering fait partie.

Bering (**figure 1**) est un robot de traçage autonome pour les travaux publics, le sport et de nombreux autres domaines. Grâce à ses trois modules de peinture interchangeable (**figure 3**), Bering est capable de tracer sur de nombreux sols. Connecté à l'application Conscience Connect (**figure 2**), il est capable de tracer tout type de motifs.



Figure 1 - Robot Bering en situation



Figure 2 - Interface de programmation des tracés de peinture et de gestion du robot



(a) Système de pré-marquage



(b) Système aérosol



(c) Système haute pression

Figure 3 - Robot Bering équipé de chacun des systèmes de projection de peinture

Structure du robot

Le robot Bering est constitué d'un châssis permettant la mise en place d'un module de peinture. Il est équipé d'une ou deux roues folles à l'avant et de deux roues motrices à l'arrière, toutes deux étant actionnées par un servomoteur permettant leur asservissement en vitesse de rotation.

Il est également équipé d'une antenne GPS associée à un système de correction lui permettant d'avoir une précision centimétrique dans son positionnement. Enfin, une centrale d'inertie est installée sur le robot afin d'assurer un asservissement du mouvement.

Description de l'étude

L'étude porte sur la validation de certaines des exigences référencées dans l'extrait du diagramme des exigences du robot Bering donné **figure 18**. Les parties indépendantes de ce sujet portent ainsi sur l'étude des consignes de vitesse à imposer aux roues motrices, l'étude de la dynamique du robot en virage, la régulation en lacet du robot, l'étude du tracé d'un coin et, enfin, l'étude du choix du parcours.

Partie I - Étude du déplacement de Bering

Objectifs : déterminer les consignes de vitesse à imposer aux moteurs pour un déplacement du robot suivant des trajectoires particulières.

I.1 - Modélisation

Paramétrage

La figure 4 présente le paramétrage retenu pour l'étude.

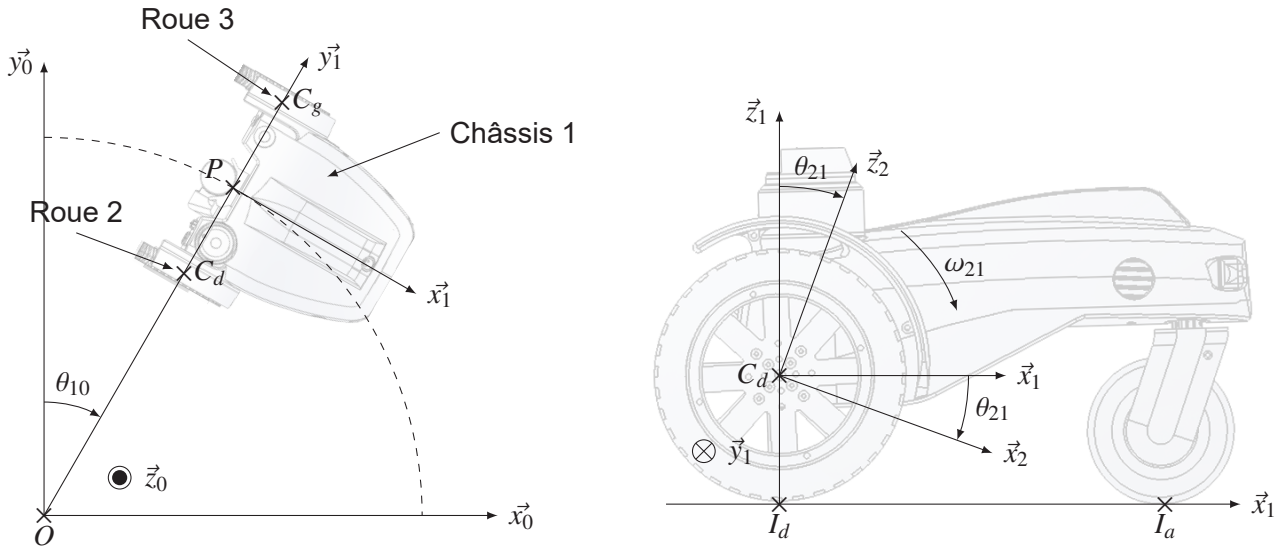


Figure 4 - Paramétrage du Bering en mouvement

Le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$ de base $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est associé au sol et considéré comme étant le référentiel terrestre galiléen.

Le repère $\mathcal{R}_1 = (P, \mathcal{B}_1)$ de base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est associé au châssis 1. Le point P correspond à la position du centre du jet de peinture tel que $\vec{OP} = R\vec{y}_1$ où R est le rayon du virage. Les points C_g et C_d sont respectivement les centres de roues gauche et droite tels que $\vec{PC}_g = a\vec{y}_1$ et $\vec{PC}_d = -a\vec{y}_1$ avec a la demi-voie¹ du robot Bering. Le châssis 1 se déplace à une vitesse V par rapport au sol telle que $\vec{V}_{P \in 1/0} = V\vec{x}_1$. On note $\vec{\Omega}_{10} = \omega_{10}\vec{z}_0 = \dot{\theta}_{10}\vec{z}_0$ le vecteur taux de rotation du châssis 1 par rapport au sol 0 avec $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Les repères $\mathcal{R}_2 = (C_d, \mathcal{B}_2)$ et $\mathcal{R}_3 = (C_g, \mathcal{B}_3)$ sont associés respectivement aux roues 2 (droite) et 3 (gauche) de bases respectives $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ et $\mathcal{B}_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_1, \vec{z}_3)$. Chacune des roues est en liaison pivot d'axe (P, \vec{y}_1) avec le châssis 1 et de paramètres angulaires respectifs $\theta_{21} = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\theta_{31} = (\vec{z}_1, \vec{z}_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$. On notera $\omega_{21} = \dot{\theta}_{21}$ et $\omega_{31} = \dot{\theta}_{31}$ les vitesses de rotation de chacune des roues. I_d et I_g sont les points de contact entre le sol et les roues respectives 2 et 3 tels que $\vec{I}_d\vec{C}_d = \vec{I}_g\vec{C}_g = r\vec{z}_1$ où r est le rayon des roues.

Notations

On note $\{\mathcal{V}_{i/j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{i/j} \\ \vec{V}_{M \in i/j} \end{array} \right\}_M$ le tenseur cinématique du mouvement du solide i par rapport au solide j au point M . Ainsi, $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{10}\vec{z}_0 \\ V\vec{x}_1 \end{array} \right\}_P$.

1. La voie d'un véhicule est la distance entre roues gauche et droite d'un même essieu.

Hypothèses

On considère que les roues 2 et 3 roulent sans glisser sur le sol 0 aux points de contact respectifs I_d et I_g .

I.2 - Consigne de vitesse des moteurs

- Q1.** Préciser l'expression des torseurs cinématiques du mouvement des roues 2 et 3 par rapport au châssis 1 aux points respectifs C_d et C_g .
- Q2.** En déduire l'expression littérale du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{I_d \in 2/0}}$ en fonction de ω_{10} , ω_{21} , V , a et de r .
- Q3.** D'après les conditions d'étude, justifier la valeur à retenir pour $\overrightarrow{V_{I_d \in 2/0}}$ et en déduire la relation
$$\omega_{21} = \frac{V + a\omega_{10}}{r}.$$
- Q4.** De manière analogue, déterminer l'expression de ω_{31} en fonction de V , ω_{10} , a et de r .

I.3 - Trajectoires particulières

Dans l'application de tracés de terrains sportifs ou de tracés de signalisation au sol des routes, les trajectoires à suivre par le robot sont généralement des lignes droites ou des arcs de cercle.

Tracés en ligne droite

- Q5.** Quel est le mouvement suivi par le robot dans le cas d'un tracé de peinture en ligne droite ? Que devient alors le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$?
- Q6.** En déduire l'expression des consignes de vitesse à imposer aux roues, ω_{21} et ω_{31} , en fonction, entre autres, de la vitesse V imposée au robot.

Tracés en arc de cercle

Soit la trajectoire définie sur la **figure 4** par les traits en pointillés. Celle-ci a pour paramètres le centre du virage, le point O et le rayon du virage R tel que $\overrightarrow{OP} = R\vec{y}_1$.

- Q7.** Déterminer la relation entre V et ω_{10} .
- Q8.** À partir du résultat des questions **Q3.** et **Q4.**, déterminer les consignes de vitesse à imposer aux roues, ω_{21} et ω_{31} , en fonction de la vitesse imposée au robot V , du rayon de virage R et du rayon des roues r et de la demi-voie a .

Cas particulier d'un changement de direction, rotation autour du point P

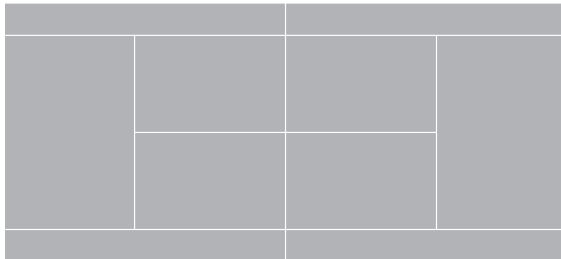
Durant son parcours, le robot sera amené à changer de direction sans changer de place, c'est-à-dire, sans modification de la position du point P , centre du jet de peinture.

- Q9.** Dans ces conditions, déterminer les consignes de vitesse ω_{21} et ω_{31} à imposer aux roues en fonction de ω_{10} et en déduire le rapport $\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}}$.

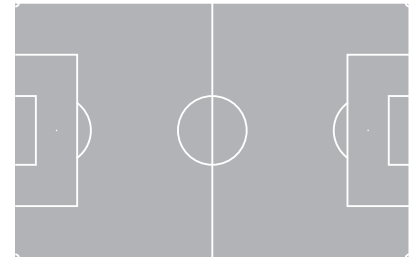
Partie IV - Étude de l'élaboration d'un coin

Objectifs : définir le comportement du robot dans le cas du tracé d'un coin sans recouvrement de peinture conformément aux normes (exigence 1.2.2).

Un cas d'utilisation complexe du robot Bering est le tracé de terrains sportifs (**figure 13**). Ces tracés présentent des singularités comme des angles droits, des recouvrements de peinture, etc.



(a) terrain de tennis



(b) terrain de foot

Figure 13 - Exemples de tracés de terrains sportifs

Pour réaliser des tracés sur un terrain de sport, c'est le module haute-pression (**figures 3c et 14**) qui équipe le robot Bering. La buse envoie, sur demande, de la peinture sur le sol au niveau du point P (voir **figure 4**) sous la forme d'une ligne de largeur L (délimitée par la présence des deux flasques) qui peut être ajustée en fonction des exigences imposées par les normes des fédérations sportives.

Lors de son parcours, le robot devra réaliser plusieurs fonctions : se déplacer en ligne droite, se déplacer en arc de cercle ou changer de direction (voir **Partie I**) avec ou sans dépose de peinture.

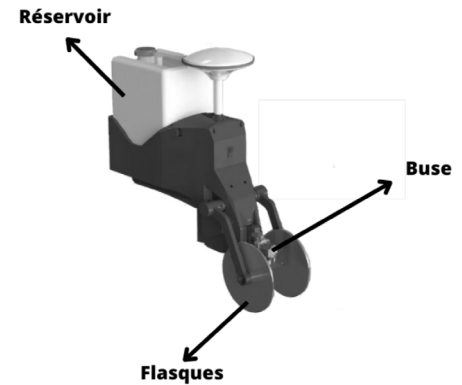


Figure 14 - Module de peinture haute-pression

IV.1 - Réalisation du tracé d'un coin

La réalisation du tracé d'un coin peut présenter des problèmes de recouvrement de peinture. Plusieurs algorithmes de changement de trajectoire ont été réalisés ; le résultat de ceux-ci est présenté sur la **figure 15**, où le niveau de gris est représentatif du nombre de couches de peinture.

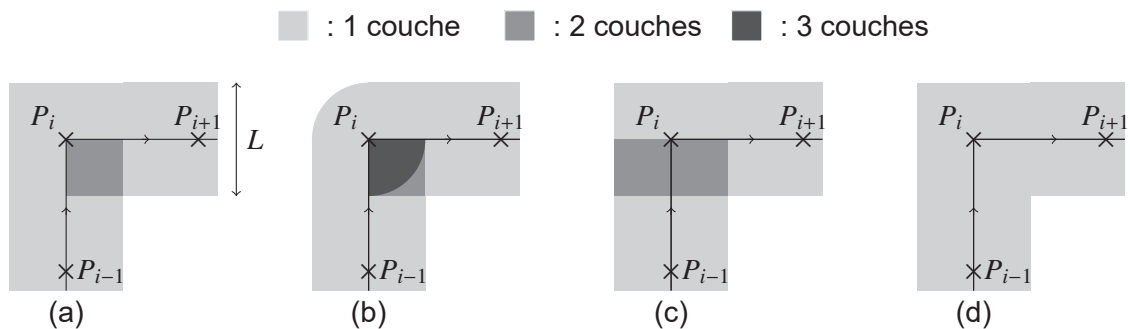


Figure 15 - Traces de peinture lors du tracé d'un coin

Pour représenter ces différents algorithmes, les diagrammes d'états sont utilisés :

- les mouvements de Bering correspondent à des états *Avancer*, *Tourner de 90°*, *Reculer* ayant pour action respective *Avancer le robot*, *Tourner le robot*, *Reculer le robot* ;
- le dépôt de peinture est décrit par l'action *Ouvrir la buse* ; l'arrêt du dépôt de peinture par l'action *Fermer la buse* ;
- les conditions de garde permettant le passage d'un état à un autre peuvent correspondre à l'événement du point P qui atteint un point particulier. Dans cette étude, on ne s'intéresse pas à la façon dont la position du point P est déterminée.

Le diagramme d'états de l'état composite permettant le tracé du coin (a) au niveau du point P_i est donné partiellement sur le **document réponse**. Cet état composite débute lorsque la position du robot, identifiée par le point P (**figure 9**), est au niveau du point P_{i-1} et se termine lorsque celui-ci se trouve au point P_{i+1} .

Q34. Compléter les conditions de garde ① et ② permettant de sortir de l'état *Avancer* et les actions ③ et ④ de l'état *Tourner* permettant la réalisation du coin (a) ou du coin (b). Une cellule du tableau vide sera marquée du signe \times .

Afin de réaliser le coin (c), on propose d'établir un nouveau point P_B dont la position dépend de la largeur l du tracé. Le diagramme d'états de l'état composite permettant le tracé du coin (c) est donné par la **figure 16**.

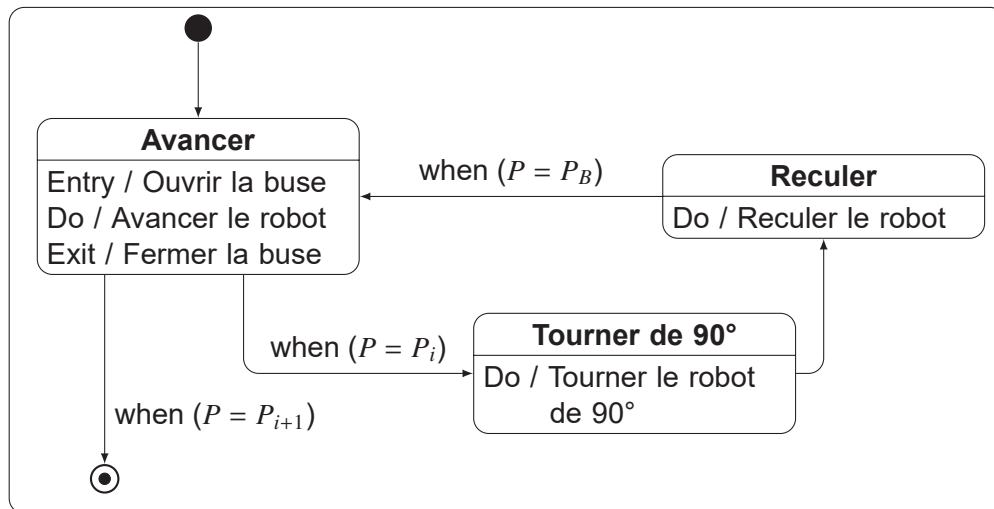


Figure 16 - Diagramme d'états permettant la réalisation du tracé du coin (c)

Q35. Placer rigoureusement le point P_B sur la figure du coin (c) et le reporter sur celle du coin (d).

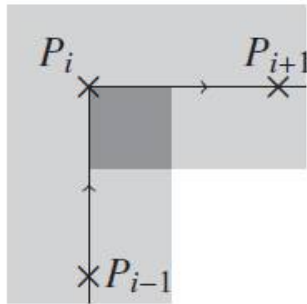
Pour réaliser le coin (d), le document réponse propose une adaptation du diagramme d'état précédent avec l'introduction d'un nouveau point P_A .

Q36. Placer le point P_A sur la figure du coin (d) et compléter le diagramme d'état qui permet la réalisation du coin (d).

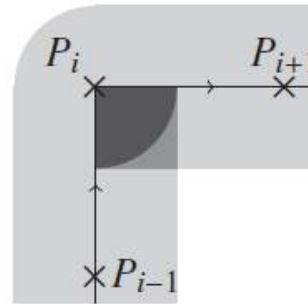
Question 34 Diagramme d'états pour réaliser le coin (a) et le coin (b).

Attention : Il y a une erreur de représentation concernant le coin (a), modifier la figure (a) pour corriger cette erreur.

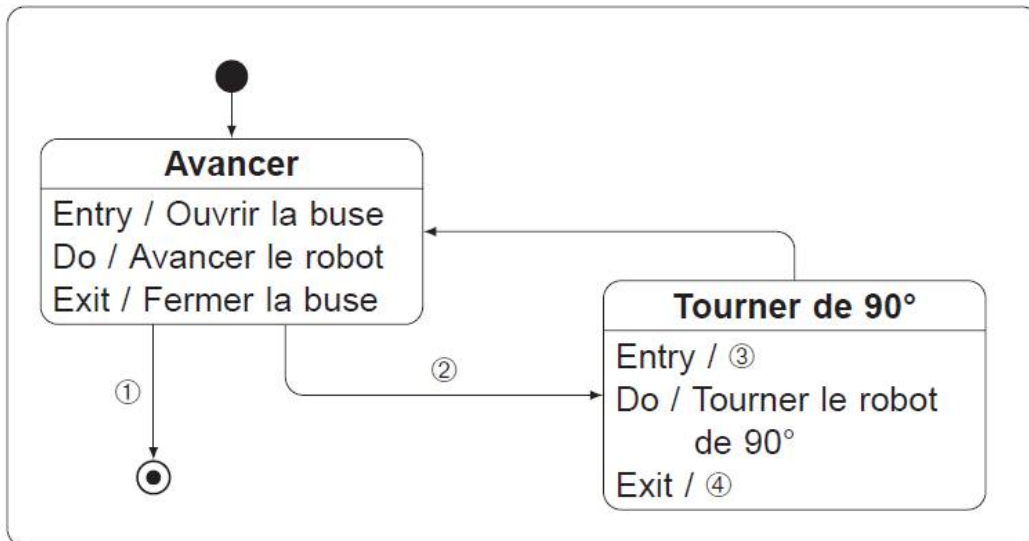
■ : 1 couche ■ : 2 couches ■ : 3 couches



(a)



(b)



Si pas de condition de garde ou pas d'action, mettre x dans le tableau.

	réalisation du coin (a)	réalisation du coin (b)
condition de garde ①		
condition de garde ②		
action ③		
action ④		

Questions 35-36

Position du point P_B pour les coins (c) et (d). Position du point P_A pour le coin (d) et diagramme d'états associé.

■ : 1 couche ■ : 2 couches ■ : 3 couches

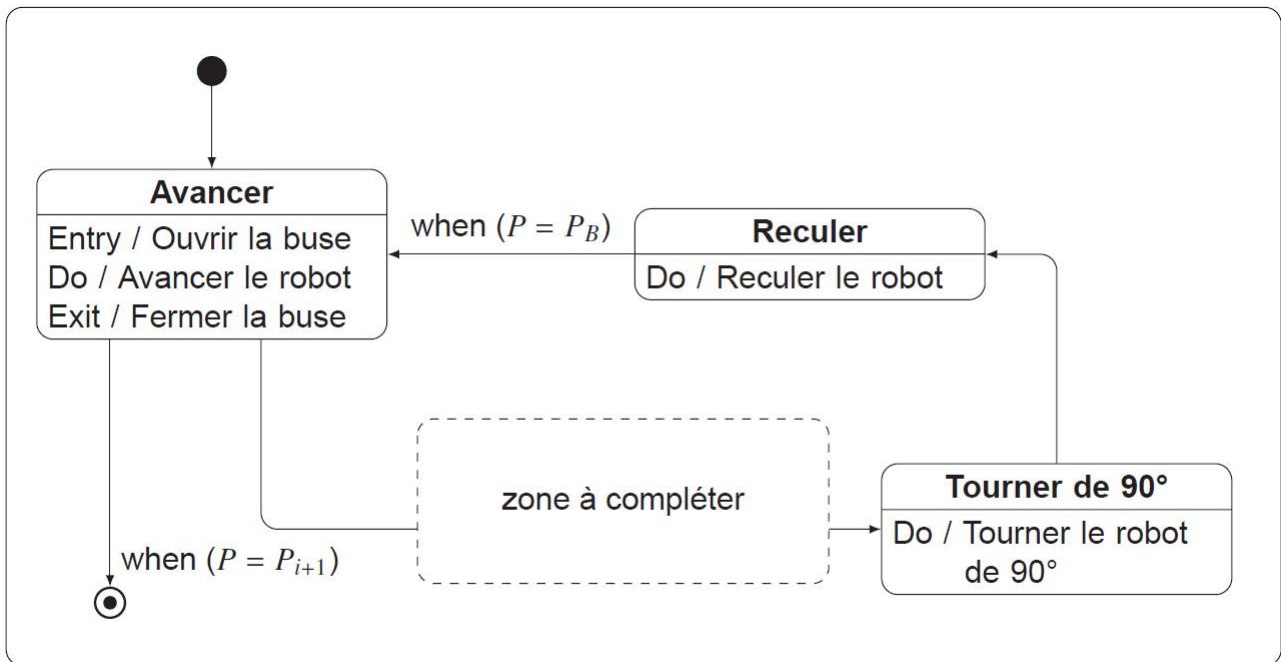
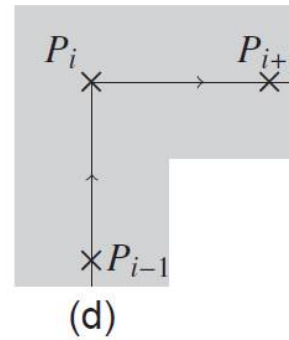
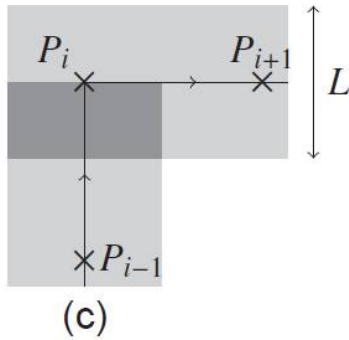


Diagramme d'état permettant la réalisation du coin (d)