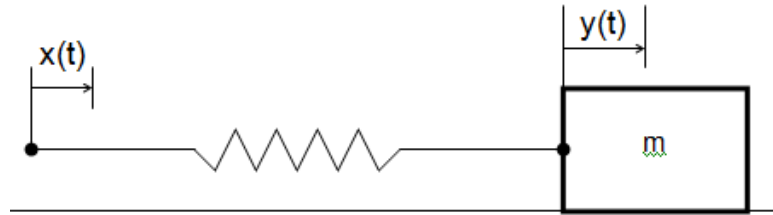


Corrigé du TD Etude des SLCI

Exercice 1.

Etude d'un système masse ressort



Cas sans frottement

Question 1 Calcul de la fonction de transfert

Equation de comportement du système :

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k \cdot (x(t) - y(t))$$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m \cdot p^2 \cdot Y(p) = k \cdot (X(p) - Y(p)) \quad H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{m \cdot p^2 + k}$$

Question 2 Calcul de la réponse à une impulsion

Entrée impulsion : $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(p) = 1$

Sortie : $Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{k}{m \cdot p^2 + k}$

On utilise le tableau des transformées usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$Y(p) = \frac{\frac{k}{m}}{p^2 + \frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2 + \frac{k}{m}} \Rightarrow y(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \cdot u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie.

Question 3 Calcul de la réponse à un échelon unitaire

Entrée échelon unitaire : $x(t) = u(t) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p}$

Sortie : $Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{k}{p \cdot (m \cdot p^2 + k)}$

On décompose en éléments simples :
$$Y(p) \frac{k}{p.(m.p^2 + k)} = \frac{a}{p} + \frac{b.p}{m.p^2 + k}$$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

$$Y(p) = \frac{k}{p.(m.p^2 + k)} = \frac{1}{p} + \frac{-m.p}{m.p^2 + k}$$

On utilise le tableau des transformées usuelles en adaptant Y(p)

Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} . t \right) \right) . u(t)$$

Courbe : Sinusoïdale non amortie décalée.

Question 4 Prise en compte des frottements.

Equation de comportement du système :
$$m . \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k . (x(t) - y(t)) - \lambda . \frac{dy(t)}{dt}$$

On applique la TL à l'équation (les conditions initiales sont nulles)

$$m.p^2 . Y(p) = k . (X(p) - Y(p)) - \lambda . p . Y(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{m.p^2 + \lambda.p + k}$$

Question 4 Prise en compte de frottements faibles

On fait l'application numérique (frottements faibles) :
$$H(p) = \frac{5}{p^2 + 2.p + 5}$$

Entrée impulsion : $x(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(p) = 1$

Sortie :
$$Y(p) = H(p) . X(p) = \frac{5}{p^2 + 2.p + 5}$$

Les racines du dénominateur sont imaginaires, on va mettre $Y(p)$ sous la forme

$$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \text{ afin de passer dans le domaine temporel.}$$

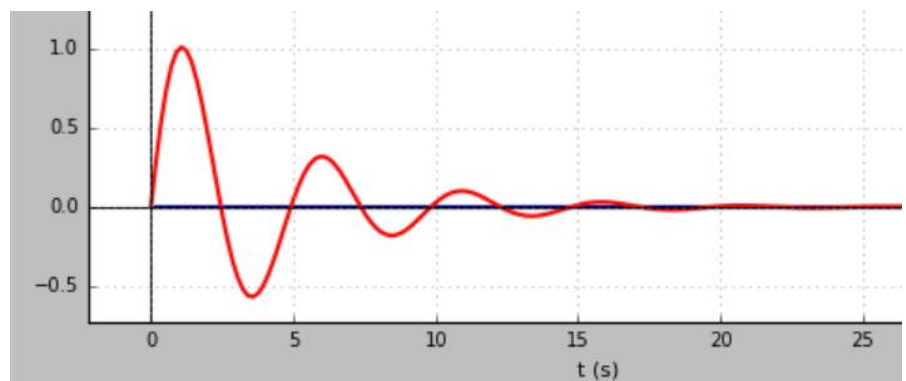
On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement.

Domaine temporel	Domaine de Laplace	Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$e^{-a.t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

$$Y(p) = \frac{\frac{5}{2} * 2}{(p+1)^2 + 2^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{5}{2} e^{-t} \cdot \sin(2t) \cdot u(t)$$

Courbe :

Fonction sinusoïdale
amortie



Cas avec frottements importants

Toujours avec une Entrée impulsion, on fait l'application numérique :

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{5}{p^2 + 6.p + 5}$$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{5}{(p+1).(p+5)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+5}$$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur

$$Y(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+5} = \frac{a.(p+5) + b.(p+1)}{(p+1).(p+5)} = \frac{5.a + b + (a+b).p}{(p+1).(p+5)}$$

$$5.a + b = 5 \quad \text{et} \quad a + b = 0$$

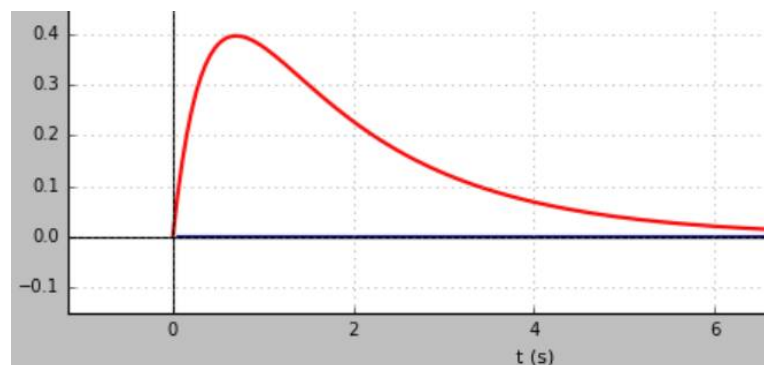
On trouve : $a = \frac{5}{4}$ et $b = -\frac{5}{4}$ $Y(p) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+5} \right)$

On utilise le tableau et le théorème de l'amortissement pour repasser dans le domaine temporel :

K	$\frac{K}{p}$	$K.e^{-a.t}$	$\frac{K}{p+a}$
-----	---------------	--------------	-----------------

On trouve : $y(t) = \frac{5}{4} \cdot (e^{-t} - e^{-5.t}) \cdot u(t)$

Courbe :



Exercice 2.

1. Soit le système dont le comportement est défini par l'équation différentielle :

$$\frac{ds(t)}{dt} + 2.s(t) = 3.e(t),$$

Déterminer la réponse de ce système à un échelon unitaire.

1. On applique la TL à l'équation $\frac{ds(t)}{dt} + 2.s(t) = 3.e(t)$ (CI = 0)

$$H(p) = \frac{4}{p+2}$$

On trouve la fonction de transfert :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

L'entrée est un échelon unitaire :

Sortie :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{3}{p.(p+2)}$$

On décompose $Y(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+2}$$

On trouve a et b en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur (calcul non détaillé ...)

$$S(p) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} \right)$$

On repasse dans le domaine temporel en utilisant le tableau et le théorème de l'amortissement :

Domaine temporel	Domaine de Laplace	Domaine temporel	Domaine de Laplace
K	$\frac{K}{p}$	$K.e^{-a.t}$	$\frac{K}{p+a}$

On trouve :

$$s(t) = \frac{2}{3} \cdot (1 - .e^{-2.t}) u(t)$$

2. Soit le système dont le comportement est défini par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 8 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + 25.s(t) = 2.e(t)$$

Déterminer la réponse de ce système à une impulsion.

2. On applique la TL à l'équation pour déterminer la fonction de transfert (les conditions initiales sont nulles, CI=0) :

On trouve la fonction de transfert (calculs non détaillés) :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 8.p + 25}$$

Entrée impulsion : $e(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = 1$

Sortie dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{2}{p^2 + 8.p + 25}$$

Les racines du dénominateur sont imaginaires, il n'y a pas de racines réelles, on va mettre $S(p)$ sous la forme suivante afin d'utiliser le tableau et le théorème de l'amortissement pour repasser dans le domaine temporel :

Domaine temporel	Domaine de Laplace	Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$e^{-a.t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$

$$S(p) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(p+4)^2 + 9}$$

$$s(t) = \frac{2}{3} e^{-4t} \cdot \sin(4t) \cdot u(t)$$

3. Soit le système défini par la fonction de transfert $H(p) = \frac{3}{p^2 + 12.p + 32}$, déterminer la réponse temporelle de ce système à un échelon unitaire.

$$3. \quad S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{3}{p^2 + 12.p + 32} \cdot \frac{1}{p} = \frac{3}{p \cdot (p^2 + 12.p + 32)}$$

Les racines sont réelles, on peut décomposer en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = \frac{3}{p \cdot (p+4) \cdot (p+8)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+4} + \frac{c}{p+8}$$

Après calcul, on met au même dénominateur et on identifie les numérateurs, on trouve a, b et c (calculs non détaillés).

On trouve : $a = \frac{3}{32} \quad b = -\frac{3}{16} \quad c = \frac{3}{32}$

Donc on peut exprimer :
$$S(p) = \frac{3}{p \cdot (p+4) \cdot (p+8)} = \frac{3}{32} \left[\frac{1}{p} + \frac{2}{p+4} + \frac{1}{p+8} \right]$$

$$s(t) = \frac{3}{32} - \left(1 + 2.e^{-4.t} + e^{-8.t} \right) u(t)$$

4. Soit la fonction $S(p) = \frac{2.p+3}{p^2+6.p+2}$, déterminer $s(0)$, $s(\infty)$ et $s'(0)$ en utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales.

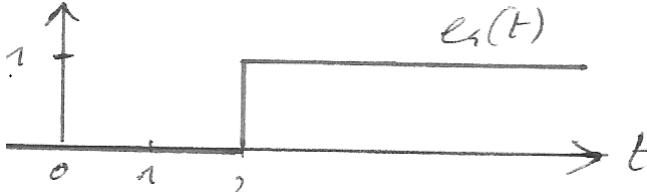
$$p.S(p) = \frac{p.(2.p+3)}{p^2+6.p+2} \quad \square \quad s(0+) = 2 \quad s(\infty) = 0$$

$$s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.[p.S(p) - s(0+)]$$

$$p.[p.S(p) - s(0+)] = p.\left[\frac{p.(2.p+3)}{p^2+6.p+2} - 2\right] = \frac{-p.(9.p+4)}{p^2+6.p+2} \quad \square \quad s'(0) = -9$$

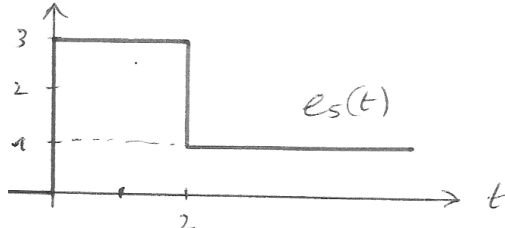
Exercice 3.

$e_4(t) = u(t-2)$



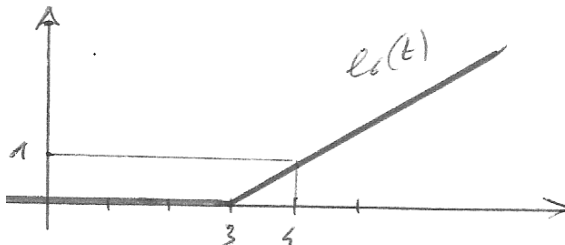
$E_4(p) = \frac{e^{-2.p}}{p}$

$e_5(t) = 3.u(t) - 2.u(t-2)$



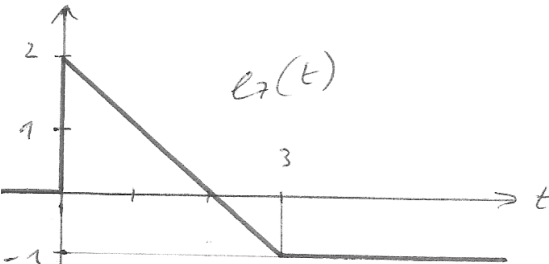
$E_5(p) = \frac{3 - 2.e^{-2.p}}{p}$

$e_6(t) = (t-3).u(t-3)$



$E_6(p) = \frac{e^{-3.p}}{p^2}$

$e_7(t) = 2.u(t) - t.u(t) + (t-3).u(t-3)$



$E_7(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-3.p}}{p^2}$

Exercice 4.

5. On applique la TL à l'équation $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 7 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + 12 \cdot s(t) = 4 \cdot e(t)$ (CI = 0)

On trouve la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{4}{p^2 + 7 \cdot p + 12}$$

L'entrée est un échelon unitaire :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

Sortie :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{4}{p \cdot (p^2 + 7 \cdot p + 12)}$$

Les racines du dénominateur sont réelles, on va décomposer $Y(p)$ en éléments simples :

$$S(p) = \frac{4}{p \cdot (p + 4) \cdot (p + 3)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + 4} + \frac{c}{p + 3}$$

On trouve a, b et c en mettant au même dénominateur et en identifiant le numérateur...

Puis on repasse dans le domaine temporel :

$$s(t) = \frac{1}{3} (1 + 3 \cdot e^{-4 \cdot t} - 4 \cdot e^{-3 \cdot t}) u(t)$$

6. Soit le système défini par la fonction de transfert $H(p) = \frac{p + 5}{p^2 + 6 \cdot p + 13}$,
déterminer la réponse temporelle de ce système à une impulsion.

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{p + 5}{p^2 + 6 \cdot p + 13} \cdot 1 = \frac{p + 3 + 2}{(p + 3)^2 + 4}$$

$$s(t) = (e^{-3 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t) + e^{-3 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)) u(t)$$