Exercice 1 : Vérification de l'homogénéité d'une relation (*)

1.
a) $\left[\frac{R_2\times R_1}{R_1+R_2}\right] = \frac{[R_2\times R_1]}{[R_1+R_2]} = \frac{[R]\times[R]}{[R]} = [R] \neq [U]$: relation non homogène
b) $[R_1\times E_1] = [R]\times[U]$
$[R_1\times(R_1+R_2)\times E_2] = [R]\times[R]\times[E] = [R]^2\times[U] \neq [R]\times[U]$: on ne peut pas additionner deux grandeurs de dimensions différentes.
c) $\left[\frac{R_1\times R_2\times I}{R_1+R_2}\right] = \frac{[R]^2\times[I]}{[R]} = [R]\times[I] = [U]$: le premier terme est homogène à une tension.
$[R_3E] = [R]\times[U] \neq [U]$; deuxième terme non homogène à une tension
d) $\left[\frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\right] = \frac{\frac{[U]}{[R]}}{\frac{1}{[R]}} = \frac{\frac{[U]}{[R]}}{[R]^{-1}} = \frac{[U]}{[R]}\times[R] = [U]$: la relation est homogène.

2. [v] = $L.T^{-1}$
a) $\left[\sqrt{\frac{2g}{h}}\right] = \left[\frac{g}{h}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{[g]}{[h]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L.T^{-2}}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = L^{-1} \neq L.T^{-1} = [v]$; non homogène
b) $\left[\sqrt{2gh}\right] = ([g]\times[h])^{\frac{1}{2}} = (L^2.T^{-2})^{\frac{1}{2}} = L.T^{-1} = [v]$: relation homogène

c) $\left[\sqrt{2mgh}\right] = ([m]\times[g]\times[h])^{\frac{1}{2}} = (M.L^2.T^{-2})^{\frac{1}{2}} = M^{1/2}.L.T^{-1} \neq L.T^{-1} = [v]$: non homogène

3. $[-qvbhn^*] = [q].[v].[b].[h].[n^*]$
On a $I = \frac{q}{\Delta t}$ et, d'après l'énoncé, $[n^*] = \frac{1}{[V]}$ avec V un volume.

$$[-qvbhn^*] = [I].[\Delta t].[v].[b].[h].[V]^{-1}$$

Soit $[-qvbhn^*] = I.T.L.T^{-1}.L.L.L^{-3}$
D'où enfin $[-qvbhn^*] = I = [I]$: la relation est homogène.

Exercice 2 : Dimensions et unités dérivées (1) (*)

1. P = RI² donc $[R] = \frac{[P]}{[I]^2}$; Or, on a vu que $[P] = \frac{[E]}{T}$ et [E] = $M.L^2.T^{-2}$.

D'où [P] = $L^2.M.T^{-3}$ et [R] = $\frac{L^2.M.T^{-3}}{I^2}$ soit [R] = $L^2.M.I^{-2}.T^{-3}$ en $m^2.kg.A^{-2}.s^{-3}$.

2. Interaction gravitationnelle : $F = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^2}$ donc

$$[\mathcal{G}] = \frac{[F].[r]^2}{[m]^2} = \frac{[F]L^2}{M^2} \text{ avec } [F] = M.L.T^{-2}$$

$$[\mathcal{G}] = L^3.M^{-1}.T^{-2} \text{ en } m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}$$

3. F = 6πaηv donc [F] = [6πr.η.v] = [r].[η].[v]

D'où $[\eta] = \frac{[F]}{[a].[v]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L.L.T^{-1}}$ soit [η] = $M.L^{-1}.T^{-1}$ en $kg.m^{-1}.s^{-1}$

Exercice 3 : Dimensions et unités dérivées (2) : électromagnétisme (**)

1.

(a) $\epsilon_0 = \frac{q_1q_2}{4\pi Fr^2}$ donc $[\varepsilon_0] = \frac{[Q]^2}{[F]L^2} = \frac{I^2T^2}{M\cdot L^3\cdot T^{-2}} = T^4I^2M^{-1}L^{-3}$

(b) $\mu_0 = \frac{4\pi Fd}{I_1I_2L}$ donc $[\mu_0] = \frac{[F]L}{I^2L} = MLT^{-2}I^{-2}$

2.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\right] = [\epsilon_0]^{-1/2}[\mu_0]^{-1/2} = LT^{-1} \text{ homogène à une vitesse}$$

AN: $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2,99.10^8\ m.s^{-1}$, cela correspond à la vitesse de la lumière dans le vide.

Exercice 4 : Conversions d'unités (**)

1. On suppose que le trait est un pavé droit d'épaisseur e, de largeur ℓ et de longueur L. Le volume total de ce pavé doit être égal au volume total de l'encre contenu dans la cartouche (hypothèse la plus favorable où l'on néglige les pertes d'encre dans la cartouche, dans le stylo et éventuellement sur les doigts de l'auteur).

$$V = \ell\times e\times L$$

On obtient alors

$$L = \frac{V}{\ell \times e} = \frac{1,5.10^{-3} \times 10^{-3}(\,m^3)}{0,5.10^{-3}(\,m) \times 1000.10^{-9}(\,m)} = 3,0.10^3\ m = 3,0\ km$$

2. 1. $[q] = M \cdot L^{-3}L^2 \cdot T^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

Rappel : $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

La pression dynamique est bien homogène à une pression.

2.2. $q = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d_v}{S}\right)^2$; Passons en unités SI toutes les valeurs:

$$\star\ S = 5,0\ cm^2 = 5,0.10^{-4}\ m^2$$
$$\star\ \rho = \frac{1,0\ g}{cm^3} = \frac{10^{-3}10^6\ kg}{m^3} = \frac{10^3\ kg}{m^3}$$
$$\star\ d_v = \frac{1800\ L}{\text{heure}} = \frac{\frac{1800.10^{-3}}{3600}\ m^3}{s} = \frac{5.10^{-4}\ m^3}{s}$$
$$q = \frac{1}{2}10^3\left(\frac{5.10^{-4}}{5,0.10^{-4}}\right)^2 = 500\ Pa$$

Exercice 5 : Modélisation d'un problème physique (**)

On considère une masse M accrochée à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. La masse va et vient sans frottement sur un plan horizontal. La valeur de la norme de la force de rappel du ressort est donnée par $F = k\Delta l$, où Δl est la variation de longueur du ressort lors du mouvement de la masse M.

1. $F = k\Delta l \Leftrightarrow k = \frac{F}{\Delta l}$ donc $[k] = \frac{[F]}{[\Delta l]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L}$ soit $[k] = M.T^{-2}$.

2. On considère les trois constantes de l'énoncé : m, k et l_0.
On propose la loi d'échelle suivante : $T = K.m^{\alpha}.k^{\beta}.l_0^{\gamma}$ avec K constante réelle sans unité.
Analyse dimensionnelle : $[T] = T$ et $[k.m^{\alpha}.k^{\beta}.l_0^{\gamma}] = M^{\alpha}.M^{\beta}.T^{-2\beta}.L^{\gamma}$
Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ -2\beta & = 1 \\ \gamma & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & \frac{1}{2} \\ \beta & = & -\frac{1}{2} \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \qquad \text{d'où } T = K\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Exercice 6 : Vitesse du son dans un fluide (***)

Loi d'échelle : $c = k\rho^{\alpha}\chi^{\beta}$

Analyse dimensionnelle

$$[c] = L.T^{-1};\ \text{et}\ \left[k\rho^{\alpha}\chi^{\beta}\right] = M^{\alpha}.L^{-3\alpha}M^{-\beta}L^{\beta}T^{2\beta} = M^{\alpha-\beta}L^{\beta-3\alpha}T^{2\beta}$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha - \beta & = 0 \\ -3\alpha + \beta & = 1 \\ 2\beta & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = & -1/2 \\ \beta \quad = & -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow c = k\sqrt{\frac{1}{\rho\chi}}$$

Exercice 7 : Temps de cuisson de la dinde de Noël (***)

1. Loi d'échelle: $\tau = km^{\alpha}\rho^{\beta}D^{\gamma}$.

Analyse dimensionnelle: $[\tau] = T$ et $\left[km^{\alpha}\rho^{\beta}D^{\gamma}\right] = M^{\alpha+\beta}L^{-3\beta+2\gamma}T^{-\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ -3\beta + 2\gamma & = 0 \\ -\gamma & = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2/3 \\ \beta = -2/3 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \tau = k\frac{m^{2/3}}{\rho^{2/3}D}$$

2. En supposant que le coefficient de diffusivité thermique et la masse volumique sont identiques pour toutes les dindes, déduire le temps de cuisson d'une dinde de 3,5 kg.

Solution : Sous l'hypothèse que ρ et D sont identiques pour toutes les dindes, on a

$\frac{\tau_1}{m_1^{2/3}} = \frac{\tau_2}{m_2^{2/3}}$ soit $\tau_2 = \tau_1\left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{2/3}$;

<u>AN</u>: $\tau_2 = 1{,}87h = 1h52\ min$