Formule du binôme de Newton : corrigé

1) Pour $n = 1$:

$$\sum_{p=0}^{1} \binom{1}{p} a^p b^{1-p} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a = (a+b)^1.$$

2)

$$\binom{2}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{2}{1} = 2 \quad ; \quad \binom{2}{2} = 1.$$

3) Au rang $n = 2$:

$$\sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p} a^p b^{2-p} = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 = b^2 + 2ab + a^2 = (a+b)^2.$$

4) a) En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient donc :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \\ &= a \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} + b \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}.\end{aligned}$$

Dans la première somme on réalise le changement d'indice $q = p + 1$. Quand p varie de 0 à n, q varie de 1 à $n + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} a^q b^{n-(q-1)} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p} \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n-(p-1)} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}\end{aligned}$$

car l'indice de sommation est muet et q peut donc être remplacé par p.

b) De là :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^p b^{n-(p-1)} &+ \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\ &+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p} \\ = \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right) a^p b^{n+1-p} &+ a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1}.\end{aligned}$$

c) D'après la formule de Pascal,

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

On obtient donc :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^p b^{n+1-p} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{0} a^p b^{n+1-p},$$

car les deux derniers termes sont absorbés sous le symbole somme par les indices $p = 0$ et $p = n + 1$.

d) On a ainsi dans les questions précédentes prouvé que (B_1) est vraie (B_0) aussi d'ailleurs, ce qui est très facile à vérifier), ce qui constitue l'initiatlisation. D'autre part, en supposant que (B_n) est vraie, on vient de démontrer que (B_{n+1}) est vraie aussi. On en déduit donc par récurrence que pour tout entier naturel n, (B_n) est vraie.

5) En appliquant cette formule pour $a = b = 1$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n+1-p} = (1+1)^n = 2^n.$$