Limite remarquable : corrigé

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$.
   a) f est définie sur $I =]-1, +\infty[$, dérivable sur I (car composée de fonctions dérivables) et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.
   b) f est dérivable sur I et $0 \in I$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$.
   c) f étant dérivable en 0, par définition son taux d'accroissement en 0 admet une imite finie en 0 et celle-ci vaut $f'(0)$. Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{L}$$

2) a) $u_n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ car $a^b = e^{b\ln(a)}$.
   b) En réalisant le changement de variable $x = 1/n$ on a bien $x \to 0$ quand $n \to +\infty$. Dès lors :

$$n\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{x}ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \text{ quand } x \to 0.$$

   Donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1,$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp(1) = e.$$