1. Il s'agit d'un résultat de cours : Toute suite croissante majorée (par M) est convergente (et sa limite est majorée par M).

2 a. Soit n un entier naturel.

$$t_{n+1} - t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$$

Donc la suite t est croissante.
2 b. On pose la propriété

$$\forall n \geq 2 \qquad P_n : \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

On initialise alors la propriété.

D'une part $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

D'autre part $\frac{1}{2^{2-1}} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2!} \leqslant \frac{1}{2^{2-1}}$

Donc P_2

On suppose la propriété vraie au rang n et on établit maintenant l'hérédité

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Car, par hypothèse de récurrence

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

et car

$$2 \leqslant n \leqslant n+1 \implies \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc P_{n+1}

La propriété est donc prouvée pour tout entier superieur ou égal à 2.

2 c. Le terni général de la suite proposée consiste en la somme partielle des termes d'une suite
géométrique. On en calcule donc la valeur :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{\frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Il s'agit du terme général d'une suite positive et croissante car

$$1 - \frac{1}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \geqslant 0$$

et majorée car

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1$$

elle est donc convergente. De plus, il est clair que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1$$

2 d. D'après les questions précédentes, on a

$$n \geqslant 2 \implies \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$t_n \leqslant 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$t_n \leqslant 3$$

La suite et donc majorée et un majorant possible est 3.

2e D'après la question La, la suite et croissante et, d'après la question 2d, elle est majorée. Par suite, il s'agit d'un suite convergente.

3 a.

(s_n) n'est pas définie pour $n = 0$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $s_n = f(n)$ où

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

et $$g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

La fonction feet croissante si et seulement si g l'est car l'exponentielle et une fonction croissante. La faction g et clairement dérivable sur son ensemble de définition. On a donc

Pour $x \geqslant 1$, $$g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

On peut alors dériver à nouveau

Pour $x \geq 1$, $g''(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$$

Donc g' est décroissante et

x	1		$+\infty$
g'	$\ln(2)-\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Dès lors, $g' \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ et par suite g, donc f est croissante. Ainsi $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

3. b. En utilisant la formule du binome de Newton

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k}$$

Or $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} = \frac{n^k}{k!} \times 1 \times \left(1-\frac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

d'où

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \times \left(1-\frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \times \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \left(1-\frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

3 c. Sous les hypothèses de l'énoncé,

$$\forall s \in [\![1, n]\!] \quad 0 \leq \frac{s-1}{n} \leq 1$$

d'où $\quad 0 \leq 1 - \frac{s-1}{n} \leq 1$

ainsi,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq 1$$

Comme produit de nombres inférieurs ou égaux à 1. Par suite,

$$\forall k \in [\![0, n]\!]$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1-k-1}{n}\right) \times \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

et en sommant les inégalités obtenues, on en déduit

$$\forall n \geq 1 \qquad s_n \leq t_n$$

La suite de droite étant majorée, ou en déduit que s l'est.

3 d. La suite s était croissante et majorée elle converge et par passage à la limite dans une inégalité, on a

$$\forall n \geq 1 \quad s_n \leq t_n \implies s \leq t$$

4. Connu la suite (s) n ut croissante, il est clair que

$$s_m \leq s_n$$