TD

Dimensions et unités

1 Conversions élémentaires

La notice d'un marteau perforateur nous indique les caractéristiques suivantes :

Vitesse angulaire 3000 tours/min. **Fréquence de frappe** : 45 000 impacts/min

Convertir la vitesse angulaire en rad/s et la fréquence de frappe en Hz.

2 Dimensions de quelques grandeurs

On rappelle les relations suivantes :

- $F = m \times a$ où m est une masse et a une accélération,
- $P = F \times v$ où v est une vitesse,
- $P = R \times I^2$ où I est une intensité électrique .

Déterminer en fonction des dimensions fondamentales, les dimensions d'une force F, d'une puissance P et d'une résistance électrique R.

3 Énergie d'un solide

1. En utilisant l'expression de l'énergie cinétique d'un point, retrouver la dimension d'une énergie à l'aide des dimensions fondamentales.
2. L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide en rad.s^{-1} et J est le moment d'inertie. En déduire la dimension du moment d'inertie J.
3. Un élève propose pour formule du moment d'inertie d'une sphère $J = mR$ avec m la masse du solide et R son rayon. Est-ce homogène ? Si non, proposer une expression possible.

4 Homogénéité d'une expression

En analysant les dimensions, vérifier si les expressions suivantes sont homogènes. Si non, précisez où pourrait se situer l'erreur et proposer une correction. (On pourra s'aider des exercices précédents).

Remarque : Cet exercice peut paraître déroutant au premier abord. Prenez le temps de bien analyser chaque formule avant de mener d'éventuels calculs. Utilisez éventuellement les indices proposés.

1. $x = \frac{(l^2 - d)}{d}$ où les trois grandeurs x, l et d sont des distances,
2. $x = x_0 \exp(-t\tau)$ où t et τ sont des temps, x et x_0 sont des longueurs.
3. $\frac{1}{2}mv^2 = F \times L$ où m est une masse, v une vitesse, F une force et L une longueur,
4. $v = \sqrt{gL}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ où L est une longueur, v une vitesse, g une accélération, t un temps et ω une pulsation (en rad/s).

5 Frottements mécaniques

Une bille de rayon R se déplaçant à la vitesse v dans un fluide visqueux subit une force de frottement (dite de Stokes) F telle que $F = 6\pi\eta R v$ où η est la viscosité du fluide.

1. Déterminer la dimension de η.
2. Si on lâche la bille dans une colonne de fluide visqueux, sa vitesse v vérifie l'équation suivante : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = g$ où g est l'accélération de la pesanteur et $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ représente la dérivée de v par rapport au temps. Déterminer la dimension de τ.

6 Recherche d'une formule inconnue

1. **Période d'un pendule**

   L'expérience montre que la période d'un pendule ne dépend que de la longueur L, et de l'accélération de la pesanteur g.

   Par une analyse dimensionnelle, déterminer une expression possible de la période T_0 des oscillations libres du pendule.
2. **Hauteur d'un tir**

   Un jongleur lance verticalement une balle de masse m avec une vitesse initiale v dans le champ de pesanteur g.

   Par une analyse dimensionnelle, déterminer une expression possible de la hauteur h atteinte par la balle.

Indications

Ex 4 : 1. Pour sommer et/ou égaliser deux grandeurs, elles doivent avoir la même dimension.

2. Les fonctions mathématiques opèrent sur des nombres sans dimension.

Ex 5 : 2. Si $a + b = c$, alors a, b et c ont la même dimension.