TP0 : Incertitudes - Partie 1

Objectif : Se familiariser avec la détermination d'incertitudes

Lors des séances de travaux pratiques, la plupart du temps il sera nécessaire de vérifier la compatibilité d'une mesure avec une valeur attendue et d'invalider un modèle le cas échéant. Les méthodes que nous allons voir s'inscrivent dans le cadre de la **métrologie**, qui est la science de la mesure. Quelques définitions avant de commencer :

- **Notion de mesure** : procédure expérimentale, qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur physique, accompagnée d'une unité.
- **Variabilité d'une mesure** : On dit que la mesure est **variable** et l'on parle de **variabilité** d'une mesure lorsque si l'on effectue successivement plusieurs mesures d'une même grandeur physique, on trouve souvent une valeur différente. Différentes origines sont possibles (instrument de mesure utilisé, choix de la méthode de mesure, perception de l'utilisateur, facteurs extérieurs).

  Remarque : la variabilité de la mesure permet de trancher quant au type d'incertitude à utiliser.
- **L'incertitude-type $u(x)$** : d'une mesure x d'une grandeur physique permet de quantifier la variabilité de la mesure. L'incertitude-type possède la même unité que x. Une incertitude-type s'écrit avec **2 chiffres significatifs**.
- **Écriture du résultat d'une mesure** : $x = (x_{\text{mes}} \pm u(x))$ unité.

I Incertitude-type de type A

1 Présentation

C'est une approche statistique que l'on peut utiliser lorsque l'on observe une variabilité de la mesure (plusieurs fois la même mesure donne un résultat qui varie plus que la précision de la mesure par exemple).

La méthode consiste à réaliser une série de N mesures de valeurs mesurées x_i et de déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type de la moyenne, donnés par :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i \qquad \text{et} \qquad s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

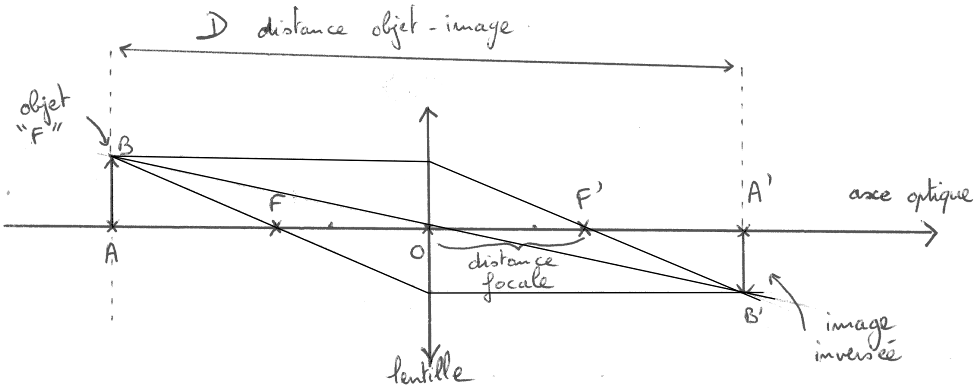
La meilleure estimation de la valeur mesurée est obtenue à partir de la valeur moyenne et dans ce cas, l'incertitude-type sera déterminée à partir de l'écart-type de la moyenne et du nombre N de mesures :

$$\boxed{x_{\text{mes}} = \overline{x} \qquad \text{et} \qquad u(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}}$$

Remarque : comparée à une mesure unique (où $u(x) = s(x)$), l'incertitude-type de la moyenne est réduite d'un facteur $\sqrt{N}$.

2 Illustration - Détermination d'une distance focale d'une lentille mince

On rappelle ici la relation de conjugaison suivante $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ permettant d'exprimer le lien entre la position d'un objet et la position de son image créée par une lentille de focale f' (voir schéma ci dessous) :



Protocole

Matériel : un banc d'optique, une source lumineuse, un objet (une lettre), un écran, une lentille de focale inconnue.

- Placer l'objet AB sur le banc d'optique. **Sa position sera gardée fixe** tout au long de l'expérience.
- Placer la lentille à 15,0 cm à droite de l'objet ($\overline{OA} = -15\ cm$).
- Placer l'écran de manière à former l'image $A'B'$.
- Mesurer $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ (à inscrire dans le tableau ci-dessous).
- Refaire la mesure avec d'autres valeurs de position de lentille ($\overline{OA}$) entre 15,0 cm et 80,0 cm de l'objet.

Mesures :

$\overline{OA}$							
$\overline{OA'}$							
Valeur calculée de f'							

D'après les mesures, on peut en déduire :

$$f'_{\text{mes}} = \overline{f} = \qquad u(f') = s(f') = \qquad \Rightarrow \boxed{f' = (\quad \pm \quad)\ mm}$$

II Incertitude-type de type B

1 Présentation

Lorsqu'une seule mesure est possible ou alors lorsque l'on n'observe pas de variabilité notable lors de la mesure, on utilise alors une méthode dite de « **type B** » qui permettra de déterminer la variabilité, qui existe bien qu'elle ne soit pas observée.

Exemple : dans le cas d'une mesure d'une distance à la règle, il est fort probable qu'on lise la même valeur à chaque mesure. L'estimation de l'incertitude-type se fait alors avec une évaluation de type B.

On recherche alors un intervalle de valeurs mesurées raisonnablement acceptables qui a pour demi-largeur la précision Δ de la mesure qui dépend de l'instrument utilisé. On en déduit ensuite l'incertitude-type avec :

$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

Remarque : le facteur $1/\sqrt{3}$ est obtenu lorsque l'on considère une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle de largeur 2Δ (très grande majorité des cas).

2 Demi-largeur et incertitude-type dans le cas d'un instrument gradué

Dans le cas d'un instrument gradué, on considère que la précision correspond à une demi-graduation.

Exemple : avec une règle graduée au mm, $\Delta = 0,5$ mm.

Mesure de la largeur et de la longueur d'une feuille

A l'aide d'une règle, mesurer la largeur l et la longueur L d'une feuille A4 (mesure et incertitudes) puis compléter :

$$\boxed{l = (\qquad \pm \qquad)\ cm} \qquad \boxed{L = (\qquad \pm \qquad)\ cm}$$

3 Demi-largeur et incertitude-type dans le cas d'un instrument numérique

Pour déterminer l'incertitude-type lors d'une mesure effectuée à l'aide d'un d'instrument de mesure numérique, il faut utiliser la « précision » donnée dans la notice de l'appareil, par le constructeur.

La plupart du temps, il n'est pas spécifié si cette précision correspond à la demi-largeur Δ ou à l'incertitude $u(x)$. On considérera alors qu'il s'agit de Δ et l'on déterminera ensuite l'incertitude-type à partir de la formule $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$.

Exemple : Pour un multimètre, souvent $\Delta = \%$ valeur lue $+\, n$ digit(s).

Mesure de la résistance d'un résistor

A l'aide d'un multimètre fonctionnant en mode Ohmmètre et de sa documentation, déterminer la résistance d'un résistor fourni.

$$\boxed{\Delta = \qquad \Omega} \qquad \boxed{R = (\qquad \pm \qquad)\ \Omega}$$

4 Demi-largeur et incertitude-type si la perception de l'utilisateur est prédominante

Lorsque c'est l'opérateur qui détermine que la mesure paraît correcte entre deux valeurs x_{min} et x_{max}, on pourra alors choisir :

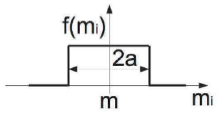
$$x_{\text{mes}} = \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2} \qquad \text{avec} \qquad u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Mesure de la position d'une image

En reprenant le montage optique de la partie 2, pour une position objet-lentille-écran donnée, en déplaçant l'écran déterminer la demi-largeur de l'intervalle où l'image vous paraît nette.

$\Delta = \quad cm$ $\qquad\qquad$ $u(\overline{OA'}) = \quad cm$

5 Résumé



	précision	*incertitude-type*
Donnée constructeur	p et $\Delta = p$	$u(x) = \frac{p}{\sqrt{3}}$
	graduation	*incertitude-type*
Instrument gradué	g et $\Delta = \frac{g}{2}$	$u(x) = \frac{g}{2\sqrt{3}}$
	précision	*incertitude-type*
Instrument numérique	$p = x\% + n$ digits	$u(x) = \frac{p}{\sqrt{3}}$
	intervalle	*incertitude-type*
Perception utilisateur	$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$	$u(x) = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2\sqrt{3}}$

III Incertitudes composées

1 Présentation

Lorsque l'on cherche à effectuer la mesure d'une grandeur physique de manière indirecte, c'est-à-dire lorsqu'il est nécessaire d'effectuer des opérations mathématiques pour déterminer le résultat final, il est nécessaire de déterminer l'**incertitude-type composée** associée à la mesure. Dans le cadre du programme, seuls les cas d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient sont à connaître :

- si $x = x_1 \pm x_2$: $\boxed{u(x) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$
- si $x = x_1^{\alpha} \times x_2^{\beta}$ ou $x = x_1^{\alpha}/x_2^{\beta}$: $\boxed{u(x) = x \times \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$

2 Application

Détermination de la surface d'une feuille

On cherche à déterminer la surface S d'une feuille A4 grâce aux mesures effectuées précédemment en mesurant sa largeur l et sa longueur L.

Déterminer le résultat de la mesure de la surface S à partir de la longueur et de la largeur de la feuille :

3 Capacité numérique - simuler la variabilité d'une grandeur composée

Lorsque l'expression de la grandeur que l'on cherche à mesurer est plus complexe qu'une simple somme, différence, produit ou quotient (donc hors programme), on utilisera une simulation informatique comportant une part d'aléatoire qui nous permettra de calculer l'incertitude-type composée. Il s'agira d'un algorithme dit de type **Monte-Carlo** écrit en *Python* et dont on explicite le principe ci-dessous.

On suppose que la grandeur x que l'on cherche à mesurer indirectement est une fonction des valeurs mesurées $\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N\}$, autrement dit que $x = f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N)$. Ensuite :

1. On fixe un nombre N de simulations à réaliser (par exemple 10 000).
2. Pour chacune des x_i, on suppose une loi de probabilité uniforme dans l'intervalle $[x_i - \Delta_i, x_i + \Delta_i]$.

   Remarque : la méthode suppose que l'on connaisse les incertitudes-types associées aux $\{x_i\}$.

3. Grâce à une boucle non conditionnelle, pour chacune des x_i, on génère une liste de N valeurs aléatoires réparties dans l'intervalle $[x_i - \Delta_i, x_i + \Delta_i]$.
4. A partir des N valeurs obtenues pour l'ensemble des $\{x_i\}$, on calcule la valeur de x. On obtient ainsi une liste de N valeurs de x.
5. On calcule alors l'incertitude-type à partir de l'écart-type ($u(x) = s(x)$).

Détermination de la surface d'une feuille (Suite)

Réaliser la simulation de l'algorithme Monte-Carlo en complétant/exécutant le code `Python` de la page suivante (sur CDP également.

```
# Importation des bibliothèques nécessaires
import numpy as np
import numpy.random as rd

# Paramètres l et L
l =             #en cm
L =             #en cm
Surface = l*L
Deltal =        #en cm
DeltaL =        #en cm



# Nombre d'échantillons simulés
N = 100000

# Liste générées avec l, L et la surface
largeur  = np.random.uniform(l-Deltal,l+Deltal,N)
longueur = np.random.uniform(L-DeltaL,L+DeltaL,N)
surface  = largeur*longueur

# Calcul de l'incertitude type
u_s = np.std(surface,ddof=1)

# Affichage du résultat de la mesure
print("Surface=",Surface,"incertitude-type =",u_s)
```

Détermination de la surface d'une feuille (Suite)

Comparer les deux incertitudes-types obtenues.

Remarque : S'il vous reste du temps, vous pouvez vous lancer dans le TD.