

Chapitre 4 Systèmes linéaires en régime forcé

Table des matières

I –	Introduction	2
II –	Développement en série de Fourier	2
A –	Caractéristiques des signaux sinusoïdaux	3
B –	Spectre d'un signal	4
C –	Poids des harmoniques	4
D –	Répartition de puissance	5
III –	Fondements de la méthode complexe	6
A –	Représentation dans le plan complexe	7
B –	Fonction particulière complexe de l'équation différentielle	7
C –	Impédances complexes	8
1)	Association de deux impédances	9
IV –	Application : Résonance	9
A –	Résonance en tension du circuit RLC	10
B –	Résonance en intensité du circuit RLC	13
V –	Application : Filtrage linéaire d'un signal	15
A –	Filtre passe-bas du premier ordre	17
B –	Filtre passe-haut du premier ordre	19
C –	Filtre passe-bas du deuxième ordre	23
D –	Filtre passe-bande du deuxième ordre	26
E –	Mise en cascade de filtres	31

I – Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le régime transitoire. Nous nous intéressons maintenant au **régime permanent**, car en pratique, les systèmes linéaires sont souvent sollicités avec une fonction d'entrée $g(t)$ et l'on cherche à obtenir une sortie spécifique (filtrage, résonance, transmission ou transformation de signal). Lorsque $g(t)$ n'est pas constante, on parle de **régime forcé**.

Pour chaque entrée $g(t)$, il faudrait en principe déterminer une solution particulière, ce qui peut rapidement devenir complexe.

Pour simplifier cette démarche, nous utiliserons le développement en série de Fourier, étudié plus en détail dans ce chapitre. La propriété essentielle des systèmes linéaires — la linéarité — permet de se limiter à l'étude des fonctions sinusoïdales. En effet, toute entrée peut s'exprimer comme une somme de sinusoïdes, et la sortie correspond alors à la somme des réponses associées à chacune d'elles.

II – Développement en série de Fourier

Nous allons maintenant utiliser la **linéarité** des équations différentielles pour simplifier la recherche d'une solution particulière (et donc du régime permanent). En effet, si l'on peut écrire :

$$g(t) = e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_n(t) = \sum_{i=0}^n e_i(t)$$

alors la solution particulière de l'équation différentielle $\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) + a \frac{df}{dt} + bf(t) = g(t)$, donc avec $g(t)$ comme second membre s'obtient en sommant les solutions particulières $f_{i,p}(t)$ des équations associées à chaque $e_i(t)$:

$$f_p(t) = f_{1,p}(t) + f_{2,p}(t) + \dots + f_{n,p}(t) = \sum_{i=0}^n f_{i,p}(t)$$

où les $f_{i,p}(t)$ sont les solutions particulières des équations différentielles $\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) + a \frac{df}{dt} + bf(t) = e_i(t)$:

$$\left(\frac{d^2 f_{i,p}(t)}{dt^2}\right) + a \frac{df_{i,p}(t)}{dt} + bf_{i,p}(t) = e_i(t), \forall i \in 1; n$$

À première vue, cette méthode semble plus lourde puisqu'elle conduit à résoudre plusieurs équations. Mais si les $e_i(t)$ sont bien choisis, la résolution devient beaucoup plus simple. Le choix le plus courant consiste à utiliser la décomposition en **série de Fourier**.

Tout signal périodique $s(t)$ de fréquence f_1 , de forme quelconque, peut être développer en la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_1 et s'écrit :

Ainsi, pour déterminer la solution particulière — et donc le régime permanent — d'un système soumis à une entrée quelconque $g(t)$, il suffit de décomposer $g(t)$ en série de Fourier et de

connaître la réponse du système à une entrée sinusoïdale de la forme $e_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. On parle alors de **régime sinusoïdal forcé** (R.S.F.).

A – Caractéristiques des signaux sinusoïdaux

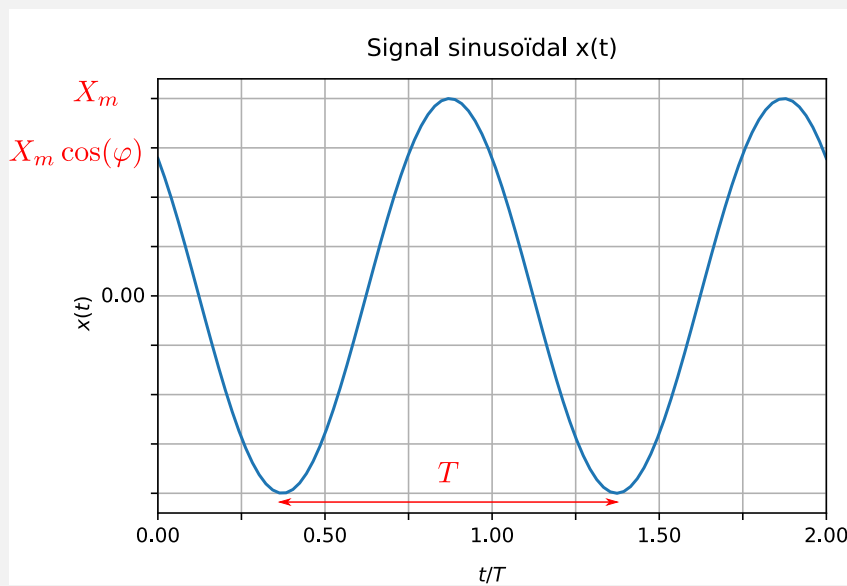
Au lieu d'analyser directement les fonctions sinusoïdales dans son ensemble, nous allons examiner certaines de ses caractéristiques. Celles-ci permettront d'anticiper qualitativement le comportement de la sinusoïde, en les comparant aux caractéristiques de l'équation différentielle exprimée sous sa forme canonique.

Un signal sinusoïdal $x(t)$ est une fonction de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec

- X_m son **amplitude**
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ sa **pulsation**, où
 - T est sa **période**
 - f est sa **fréquence**
- $\omega t + \varphi$ sa **phase instantanée**
- φ sa **phase à l'origine**

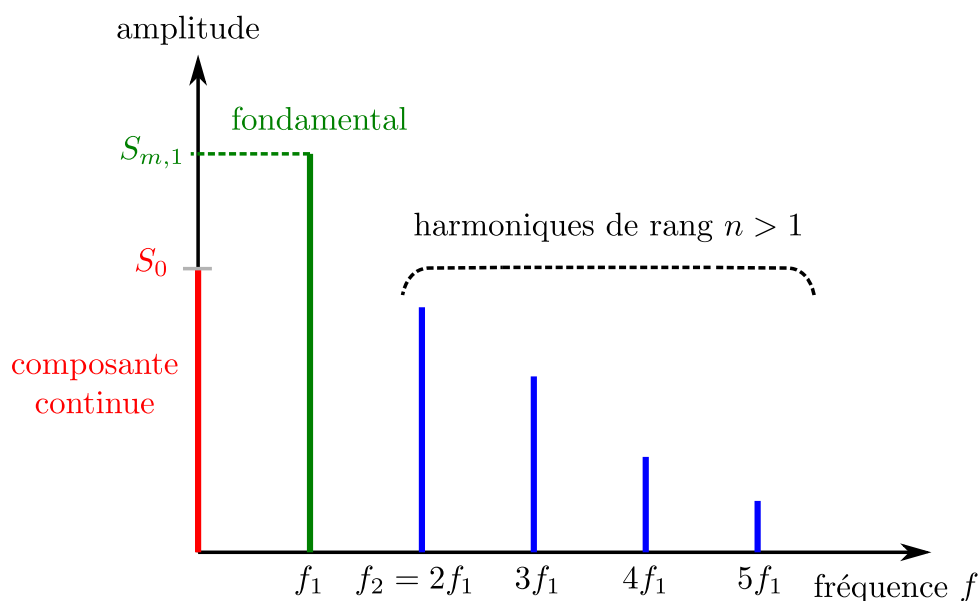


On rencontrera plus souvent les termes de

- de **fréquence fondamentale** f_1 : fréquence de la composante fondamentale $A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$;
- d'**harmoniques** que l'on confondra volontairement comme étant la composante $A_n \cos(2\pi n f_1 t + \phi_n)$ ou sa fréquence $f_n = n \times f_1$.

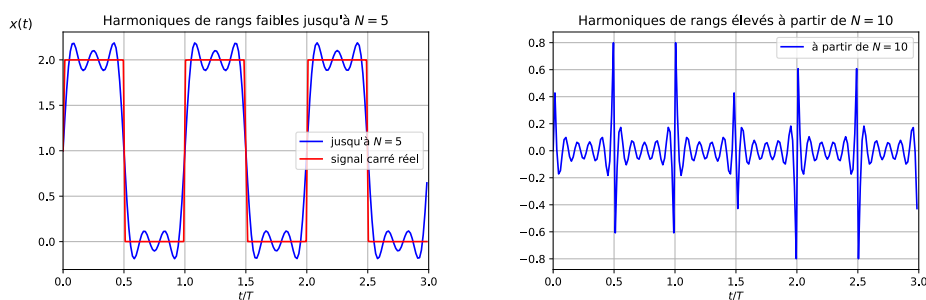
B – Spectre d'un signal

Il est possible de représenter l'amplitude de chacune de ces composantes sinusoïdale, en fonction de la fréquence : c'est le **spectre** du signal. Ces composantes sont qualifiées de raies ou de pics, dont l'abscisse correspond à sa fréquence et la hauteur son amplitude.

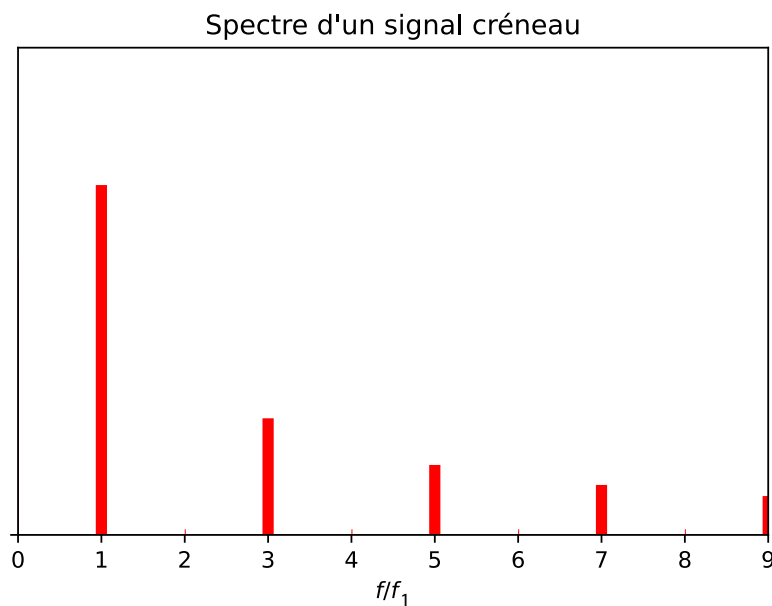


C – Poids des harmoniques

Pour comprendre l'importance de ces harmoniques, nous pouvons regarder la décomposition d'un signal carré réel : à gauche les 5 premières harmonique, à droite des harmoniques au dessus de 10



Nous pouvons aussi regarder le spectre de ce signal : nous voyons que la hauteur des pics, c'est-à-dire les A_n , diminuent quand n augmente.



Remarques :

- Les basses fréquences (valeur moyenne, fondamental et premières harmoniques) contiennent la forme générale du signal.
- Les hautes fréquences contiennent les détails fins et les éventuelles discontinuités du signal.

D – Répartition de puissance

Il peut être intéressant de raisonner en terme de puissance portée par chaque composante sinusoïdale du signal. Pour cela, nous utiliserons la valeur efficace et la formule de Parseval.

Pour un signal quelconque $s(t)$ périodique de période T , on peut calculer

- Sa **valeur moyenne** :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

- Sa **valeur efficace** :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

- **Formule de Parseval** :

$$S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,\text{eff}}^2$$

Démontrer que pour un signal sinusoïdal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$,

1. $\langle x \rangle = 0$

2. $X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$
3. Retrouver que pour un signal quelconque $s(t)$, $\langle s \rangle = S_0$ la composante continue

— **Correction**

1. Par définition

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{X_m}{T} [\sin(\omega t + \varphi)]_0^T = 0$$

2. Par définition

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = X_m \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T 1 + \cos(2\omega t) dt} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

On peut interpréter la formule de Parseval à partir de l'étude de la puissance moyenne d'un signal périodique. Supposons, par exemple, que l'on cherche à déterminer la puissance moyenne dissipée dans un résistor de résistance R , alimenté par un générateur de f.é.m. $e(t)$:

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle e(t)i(t) \rangle = \frac{\langle e^2(t) \rangle}{R} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{E_0^2}{R} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{E_{k,\text{eff}}^2}{R}$$

La puissance moyenne absorbée puis dissipée par le résistor aux bornes du générateur de tension $e(t)$ est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de $e(t)$.

III – Fondements de la méthode complexe

Revenons maintenant à notre objectif principal : déterminer la solution particulière. La méthode des nombres complexes permet de simplifier les calculs en utilisant l'identité d'Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ et les propriétés pratiques de la fonction exponentielle. Il ne faut toutefois pas oublier que les signaux physiques que nous manipulons restent bien réels.

Au signal réel $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le signal complexe

où $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe.

Par linéarité, si $\underline{s}(t)$ est réponse de $\underline{e}(t)$, $s(t) = \Re(\underline{s}(t))$ est réponse de $e(t) = \Re(\underline{e}(t))$.

- Pour retourner au signal réel, il suffit de prendre la partie réelle de $\underline{x}(t)$.

$$x(t) = \Re(\underline{x}(t))$$

- Pour retrouver l'amplitude, il suffit de prendre le module de $\underline{x}(t)$.

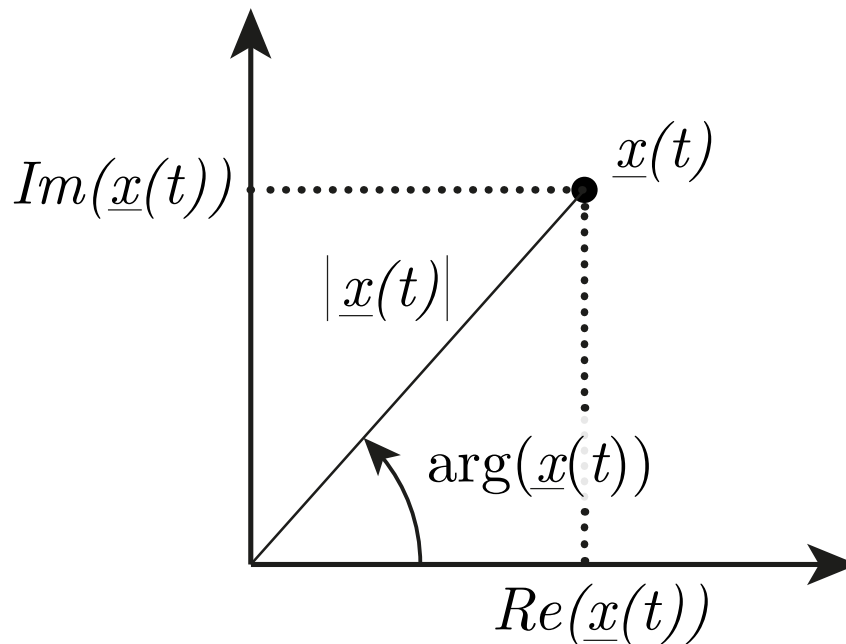
$$X_m = |\underline{x}(t)|$$

- Pour retrouver la phase initiale, il suffit de prendre l'argument de $\underline{X}_m$.

$$\varphi = \arg(\underline{X}_m)$$

A – Représentation dans le plan complexe

Parfois il sera pratique de regarder les signaux dans le plan complexe, notamment pour déterminer l'argument :



On en déduit que

— Pour $\cos \varphi > 0$,

$$\arg(\underline{x}(t)) = \arctan\left(\frac{\Im(\underline{x}(t))}{\Re(\underline{x}(t))}\right)$$

— Pour $\cos \varphi < 0$,

$$\arg(\underline{x}(t)) = \pi + \arctan\left(\frac{\Im(\underline{x}(t))}{\Re(\underline{x}(t))}\right)$$

B – Fonction particulière complexe de l'équation différentielle

— Pour dériver, il suffit de multiplier par $j\omega$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \times \underline{x}(t)$$

— Pour intégrer, il suffit de diviser par $j\omega$

$$\int \underline{x}(t) dt = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$$

1. Que devient l'équation canonique du premier ordre avec $g(t) = E_0 \cos \omega t$ en complexe ? En déduire la fonction particulière.
2. Que devient l'équation canonique du deuxième ordre avec $g(t) = E_0 \cos \omega t$ en complexe ? En déduire la fonction particulière.
3. Que devient la caractéristique $\underline{u}_C(t) = f(\underline{i}(t))$ pour un condensateur ?
4. Que devient la caractéristique $\underline{u}_L(t) = f(\underline{i}(t))$ pour une bobine ?

— Correction

1. L'équation se simplifie grâce aux dérivées :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f = g \iff j\omega f + \frac{1}{\tau} f = g \iff \boxed{f \left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = g}$$

2. L'équation se simplifie grâce aux dérivées :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = g \iff (j\omega)^2 f + j\omega \frac{\omega_0}{Q} f + \omega_0^2 f = g \iff \boxed{f \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \right) = g}$$

3. On a $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$, donc, en complexe,

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = C j\omega \underline{u}_C \iff \boxed{\underline{u}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}}$$

4. On a $u_L = L \frac{di}{dt}$, donc, en complexe,

$$\underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} = \boxed{L j\omega \underline{i} = \underline{u}_L}$$

C – Impédances complexes

Grâce à la méthode complexe, on peut généraliser la loi d'Ohm : à la place de la résistance réelle R , nous utiliserons l'impédance complexe $\underline{Z}$ pour relier la tension complexe $\underline{u}(t)$ à l'intensité complexe $\underline{i}(t)$:

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} \times \underline{i}(t)$$

— L'impédance d'une résistance est $\underline{Z}_R = R \in \mathbb{R}$

— L'impédance d'un condensateur est

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

— L'impédance d'une bobine est

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

Remarques

- Par analyse dimensionnelle, l'impédance complexe s'exprime aussi en Ω
- L'impédance du condensateur et de la bobine dépende de la fréquence du signal. Ils ont donc un comportement différent à basse fréquence ou à haute fréquence :

— Pour un **condensateur**

- A **basse fréquence**, le condensateur se comporte comme un **interrupteur ouvert**

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty$$

- A **haute fréquence**, le condensateur se comporte comme un **fil**

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

— Pour la **bobine**

- A **basse fréquence**, la bobine se comporte comme un **fil**

$$\underline{Z}_L = jL\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

- A **haute fréquence**, la bobine se comporte comme un **interrupteur ouvert**

$$\underline{Z}_L = jL\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$$

1) Association de deux impédances

Comme les caractéristiques ont été transformées pour ressembler à des résistances, on peut aussi déduire des impédances équivalents lorsque deux dipôles sont en série ou en dérivation

- Pour deux dipôles d'impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ associés **en série**,

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

- Pour deux dipôles d'impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ associés **en parallèle**,

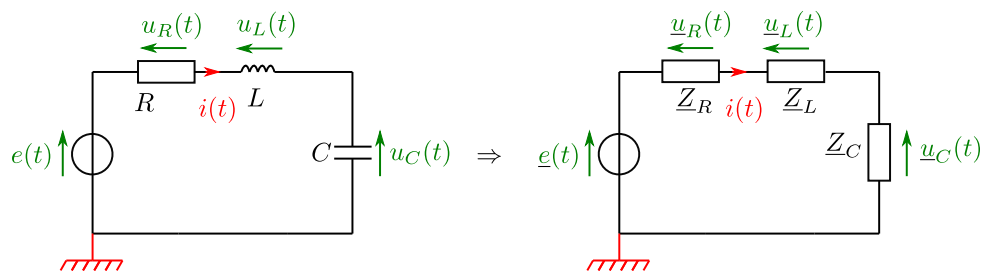
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

IV – Application : Résonance

Définition de la **résonance** :

Situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence ω proche de la fréquence propre ω_0 provoque une réponse de très forte amplitude.

A – Résonance en tension du circuit RLC



1. Retrouver l'équation différentielle pour $u_C(t)$ lorsque $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$
2. En déduire l'expression de la solution particulière complexe $\underline{u}_C(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$ à déterminer.
3. Retrouver cette expression avec un raisonnement sur les impédances.
4. Faire les schémas équivalents pour les basses fréquences et les hautes fréquences.
5. Déduire l'expression de l'amplitude $U_{C,m}$ en fonction de ω . Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basse et haute fréquence ?
6. Trouver la pulsation ω_r pour laquelle cette amplitude atteint son maximum en étudiant le minimum de son dénominateur. On peut poser $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$
7. Que se passe-t-il pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$?

— Correction

1. La loi des mailles donne :

$$e(t) = u_R + u_L + u_C \Leftrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = e(t)$$

$$\Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = e(t)$$

2. On remplace $E_0 \cos(\omega t)$ par la partie réelle de $E_0 e^{j\omega t}$, et on cherche une solution particulière complexe de la forme

$$\underline{u}_C(t) = \underline{U}_C e^{j\omega t}, \quad \underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$LC(-\omega^2)\underline{u}_C + RC(j\omega)\underline{u}_C + \underline{u}_C = E_0$$

$$\Leftrightarrow \underline{u}_C(1 + j\omega RC - LC\omega^2) = E_0$$

Donc

3. Comme les impédances sont en série,

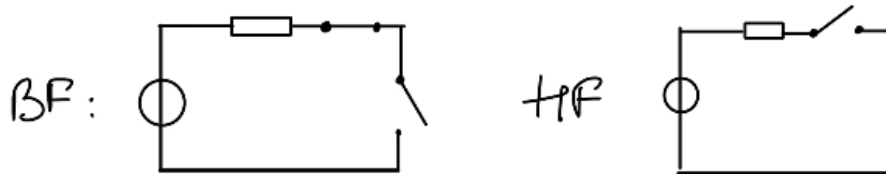
$$\underline{e}(t) = (\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R) \underline{i}$$

et $\underline{Z}_C \underline{i} = \underline{u}_C$. Donc

$$\underline{u_C}(1 + j\omega RC - LC\omega^2) = E_0$$

(un pont diviseur de tension aurait marché aussi)

4. D'après le cours on peut remplacer les bobines et condensateurs par un fil ou un interrupteur ouvert selon qu'on est en basses ou hautes fréquences :



5. L'amplitude de la tension u_C est

$$U_{C,m}(\omega) = E_0 |H(j\omega)| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

L'amplitude tend bien vers 0 pour $\omega \rightarrow \infty$ et vers E_0 pour $\omega \rightarrow 0$

6. On pose $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2$. et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Le dénominateur au carré de $U_{C,m}(\omega)$ est $D^2(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$

On cherche le minimum de $D^2(X)$:

$$\frac{dD^2}{dX} = -2(1 - X) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow 2X = 2 - \frac{1}{Q^2}$$

d'où $X_r = 1 - \frac{1}{2Q^2}$. Donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

- (a) L'amplitude de la tension u_C est

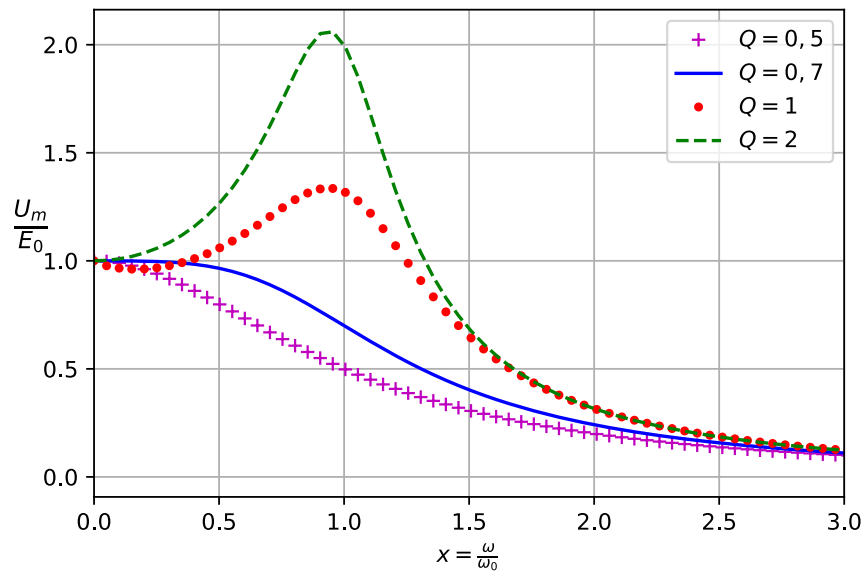
$$U_{C,m}(\omega) = E_0 |H(j\omega)| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

L'amplitude tend bien vers 0 pour $\omega \rightarrow \infty$ et vers E_0 pour $\omega \rightarrow 0$

7. Il n'y a peak de résonance réel que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, autrement dit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

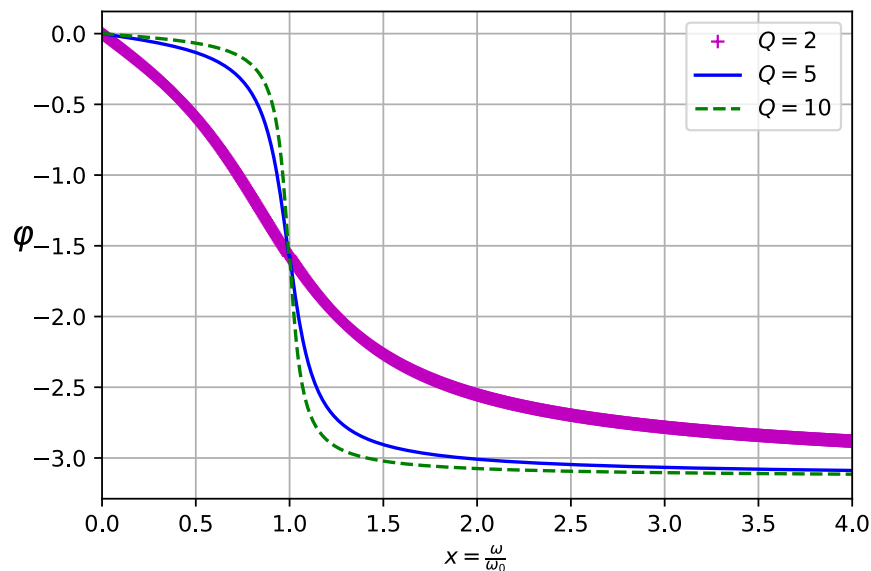
8.

Graphiques finaux :



Remarques :

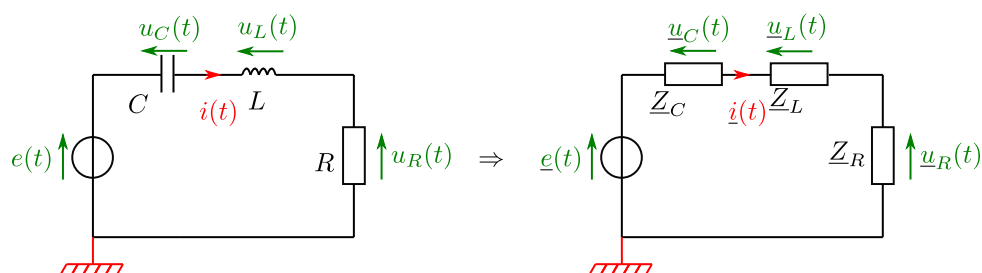
- plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est aiguë.
- La résonance n'a lieu que pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$
- la pulsation à résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ est différente de ω_0 , mais s'en rapproche plus Q est grand.



Remarque :

- Contrairement à l'amplitude, on peut retrouver directement ω_0 sur le graphique de la phase en regardant l'abscisse de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

B – Résonance en intensité du circuit RLC



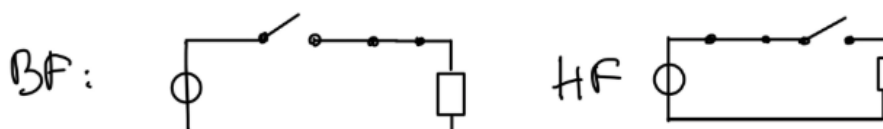
1. A l'aide d'un raisonnement sur les impédances, trouver l'expression de $\underline{i}(t)$ en fonction de ω , E_0 , L , C et R .
2. Faire les schémas équivalents pour les basses fréquences et les hautes fréquences.
3. Dédurre l'expression de l'amplitude I_m en fonction de ω . Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basse et haute fréquence ?
4. Trouver la pulsation ω_r pour laquelle cette amplitude atteint son maximum en étudiant le minimum de son dénominateur.
5. Quelle est la valeur de cette amplitude maximum ? Que pouvez vous en conclure ?
6. Trouver l'expression la phase à l'origine $\varphi_i(\omega_r)$ pour ce maximum.

— Correction

1. Expression de $\underline{u}_C(t)$ puis de $\underline{i}(t)$ Le courant complexe est :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{Z_{\text{tot}}} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \underline{i}$$

2. Les schémas équivalents deviennent



3. Il suffit de prendre le module de l'expression de la question 1 :

$$I_m = |\underline{i}| = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

L'amplitude s'annule bien pour les hautes et les basse fréquences.

4. On minimise le dénominateur :

$$D^2(\omega) = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

Le minimum est atteint lorsque la partie entre parenthèse est nulle, c'est-à-dire

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

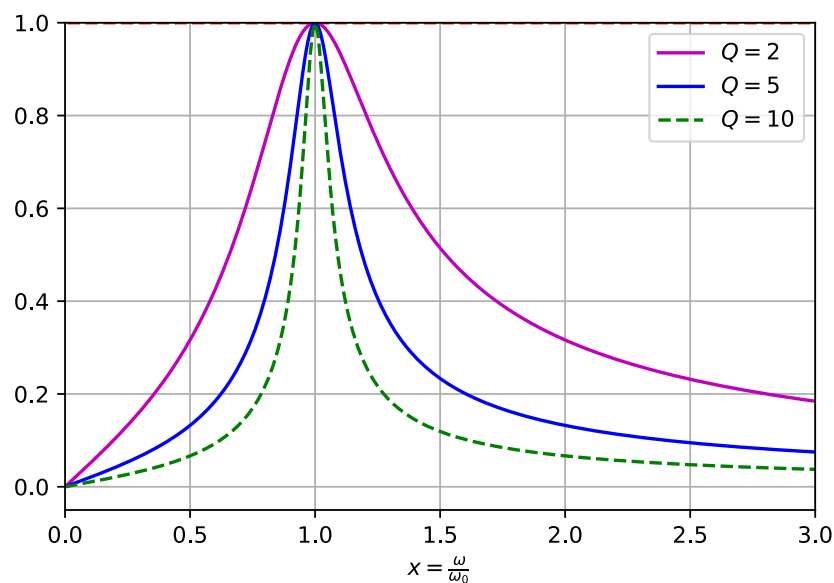
On obtient la pulsation de résonance : $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

5. À la résonance, l'amplitude se simplifie : $I_{m,\max} = \frac{E_0}{R}$

6. en ω_r , l'expression de $\underline{i}$ trouvée en question 1 se simplifie : $\underline{i}(\omega_r) = \frac{\underline{e}}{R}$. Donc

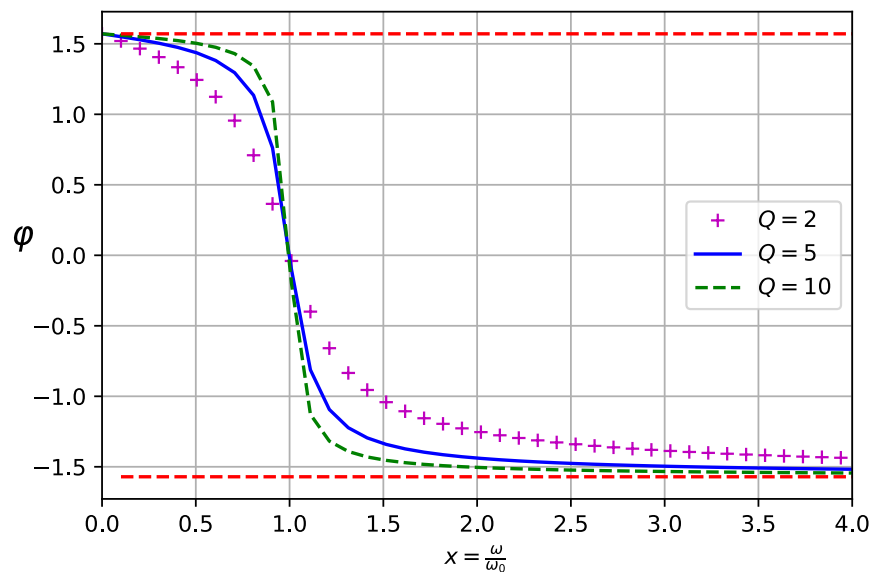
$$\varphi(\omega_r) = \arg(\underline{e}) = \varphi_e$$

Graphiques finaux



Remarques

- plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est aiguë.
- La résonance a lieu pour n'importe quelle valeur de Q , contrairement à $\underline{u}_C(t)$
- L'amplitude maximum ne dépasse pas l'amplitude d'entrée, contrairement à $\underline{u}_C(t)$
- On peut trouver directement ω_0 grâce à la résonance car $\omega_r = \omega_0$ pour $\underline{i}(t)$



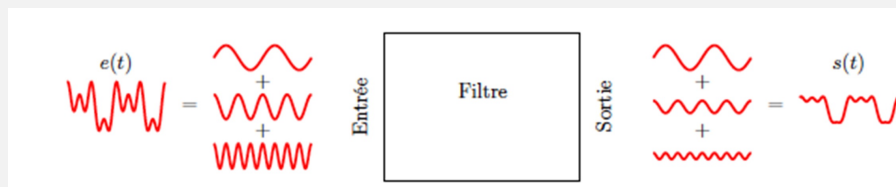
Remarque :

- Contrairement à l'amplitude, on peut retrouver directement ω_0 sur le graphique de la phase en regardant l'abscisse de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

V – Application : Filtrage linéaire d'un signal

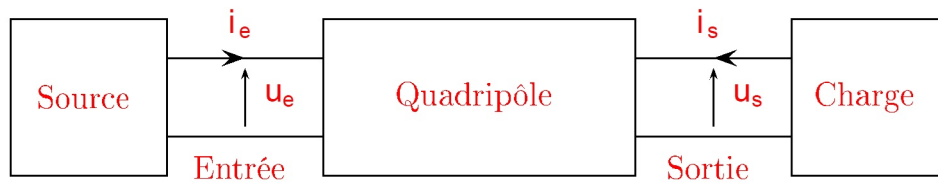
Maintenant que nous avons les outils pour faciliter l'étude, nous pouvons pas seulement regarder les équations différentielles canoniques vues au chapitre précédent mais aussi d'autres. Cela nous permet de voir d'autres situations, d'autres régimes permanent de d'autres systèmes (dont nous ne connaissons pas le régime transitoire)

Un **filtre** est un élément (électrique ou mécanique) dont le fonctionnement est dépendant de la fréquence. Il permet de modifier l'amplitude et la phase de certaines harmoniques d'un signal périodique $e(t)$, présent en entrée du filtre. En sortie, on obtient un signal $s(t)$, somme des différentes harmoniques filtrées.



- Dans ce chapitre nous étudierons les **filtres linéaires** : donc la réponse a la **même pulsation** que le signal d'entrée. Si ce n'est pas le cas, le système est non linéaire.

Un filtre peut être modélisé par un quadripôle (deux bornes reliées à l'entrée et deux à la sortie).



Pour un filtre, on définit :

- une **impédance d'entrée** $Z_e = \frac{u_e}{i_e}$, vue de la charge (sortie du filtre),
- une **impédance de sortie** $Z_s = \frac{u_s}{i_s}$, vue de la source (entrée du filtre).

La fonction de transfert d'un filtre est la grandeur complexe $\underline{H}(j\omega)$, telle que pour un signal d'entrée sinusoïdal $e(t)$ de pulsation ω :

- $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ est le **gain** ou **rapport d'amplitude** de la sortie sur l'entrée :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{S_m}{E_m}$$

- On définit le gain en décibel d'un filtre par :

$$G_{dB} = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|)$$

- $\Delta\varphi = \arg \underline{H}(\omega)$ est le **déphasage** entre la sortie et l'entrée

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

- L'**ordre** de la fonction de transfert est le degré du polynôme au dénominateur.

La **bande passante** d'un filtre est l'intervalle de pulsations tel que le gain du filtre vérifie :

$$G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \iff G_{dB}(\omega) \simeq G_{dB,\max} - 3dB$$

on appelle **pulsation de coupure**, la pulsation ω_c telle que le gain vérifie l'égalité

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \iff G_{dB}(\omega_c) \simeq G_{dB,\max} - 3dB$$

Le fait de connaître la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ permet de savoir le filtre modifie l'amplitude et la phase du signal d'entrée $e(t)$. Cependant, au lieu d'utiliser une représentation en échelle linéaire (en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'amplitude de la fonction de transfert et donc au gain en tension, on utilise une représentation en échelle logarithmique (le logarithme du gain en fonction de $\log(x)$), qui permet d'étudier un bien plus large domaine spectral.

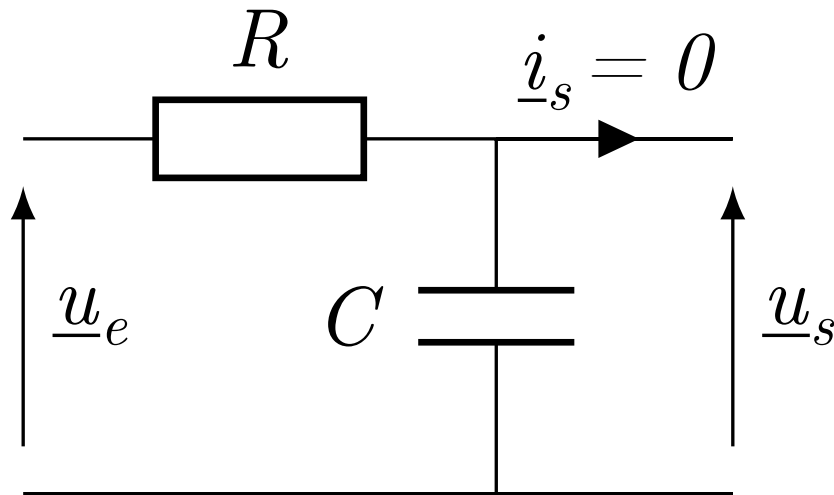
L'ensemble de la courbe de l'amplitude de la fonction de transfert en échelle logarithmique $G_{dB} = f(\log(x))$ et de la courbe de sa phase en échelle semi-logarithmique ($\Delta\varphi = f(\log(x))$), constitue un **diagramme de Bode**.

- On parle de **décade**, lorsque la fréquence et donc la pulsation est multipliée par

10. Cela correspond à se déplacer d'une unité selon l'axe des abscisses pour le diagramme de Bode. En effet : $\log(10x) = \log(10) + \log(x) = \log(x) + 1$

A – Filtre passe-bas du premier ordre

Un filtre passe bas du premier ordre peut être obtenu en prenant comme sortie la tension d'un condensateur dans un circuit RC :



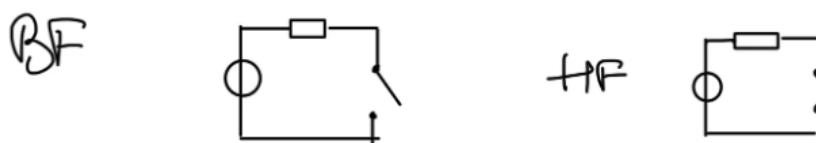
1. Rappeler les impédances de la résistance et du condensateur.
2. Faire un schéma équivalent en basses fréquences et un schéma pour les hautes fréquences.
3. En déduire le comportement du filtre. Est-ce bien un filtre passe bas ?
4. Avec un raisonnement sur l'équation différentielle ou sur les impédances, retrouver l'expression de la solution particulière complexe $\underline{u}_C(t)$ en fonction de $\underline{u}_e(t)$. En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$.
5. En déduire $G(\omega)$. Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basses et hautes fréquences ?
6. Trouver la pulsation de coupure ω_c pour laquelle $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Que vaut $\varphi(\omega_c)$?
7. Déduire l'allure des asymptotes de G_{dB} à basses et hautes fréquences. A quel $\underline{H}(\omega)$ correspondrait l'asymptote à haute fréquence ? Proposer un nom pour ce type de comportement.
8. Trouver $\varphi(\omega)$

— Correction

1. Impédances

$$Z_R = R \text{ et } Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. Comportement BF / HF



3. Les lois des mailles donne $s = e$ pour les basses fréquences et $s = 0$ pour les hautes. C'est bien un passe bas.

4. Fonction de transfert

Diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

5. Module du gain

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

BF : $G \rightarrow 1$

HF : $G \rightarrow 0$

6. Pulsation de coupure et phase

Condition de coupure :

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 1 + (\omega_c RC)^2 = 2 \implies \omega_c = \frac{1}{RC}$$

À la coupure :

$$\varphi(\omega_c) = -\arg(1 + j) = -\frac{\pi}{4}$$

7. Asymptotes de Bode

À haute fréquence, approximation :

$$H_{\text{HF}}(j\omega) \simeq \frac{1}{j\omega RC}$$

penste : -20 dB/décade , typique d'un passe-bas d'ordre 1.

8. Phase

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

$$- \varphi(0) = 0$$

$$- \varphi(\omega_c) = -\pi/4$$

$$- \varphi(+\infty) \rightarrow -\pi/2$$

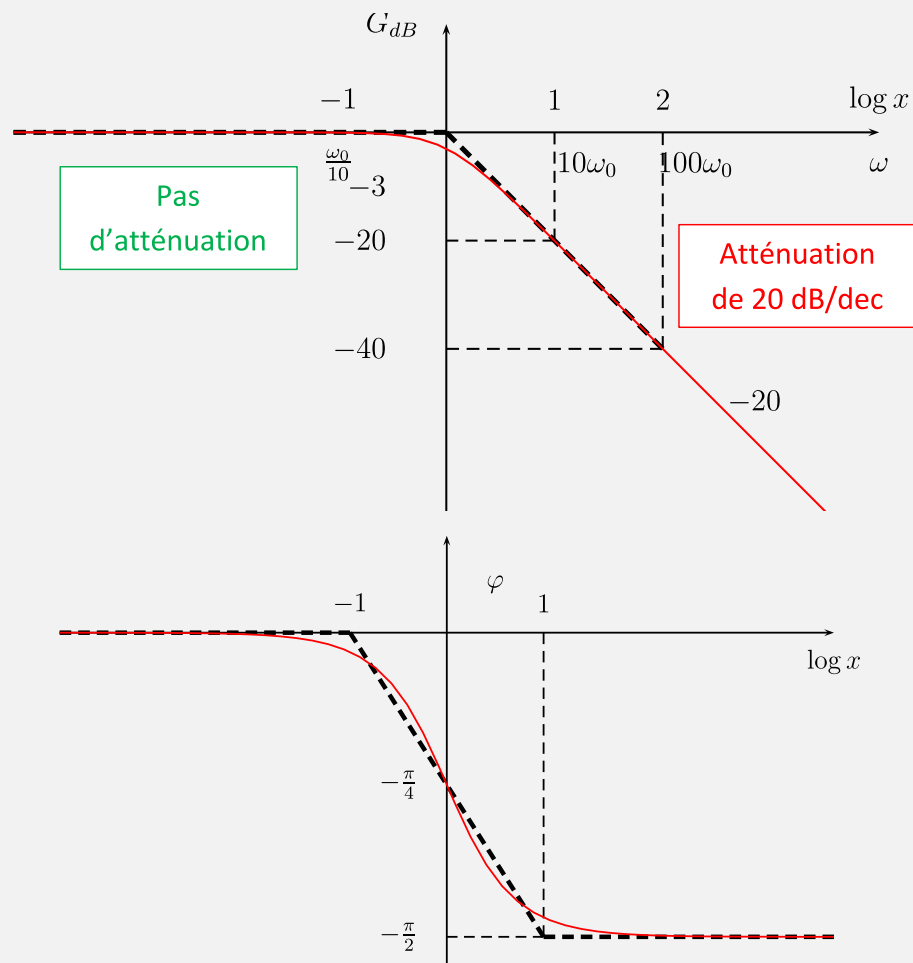
On peut obtenir un filtre passe bas d'ordre 1 de plusieurs manières, mais son comportement reste le même. On peut donc utiliser une forme canonique qui regroupe ces comportements et on peut le relier au système concret en identifiant les paramètres.

Un filtre passe bas du premier ordre permet de réduire l'amplitude des hautes harmoniques, voire de garder seulement la composante continue d'un signal.

— La forme canonique d'un filtre passe bas du premier ordre est :

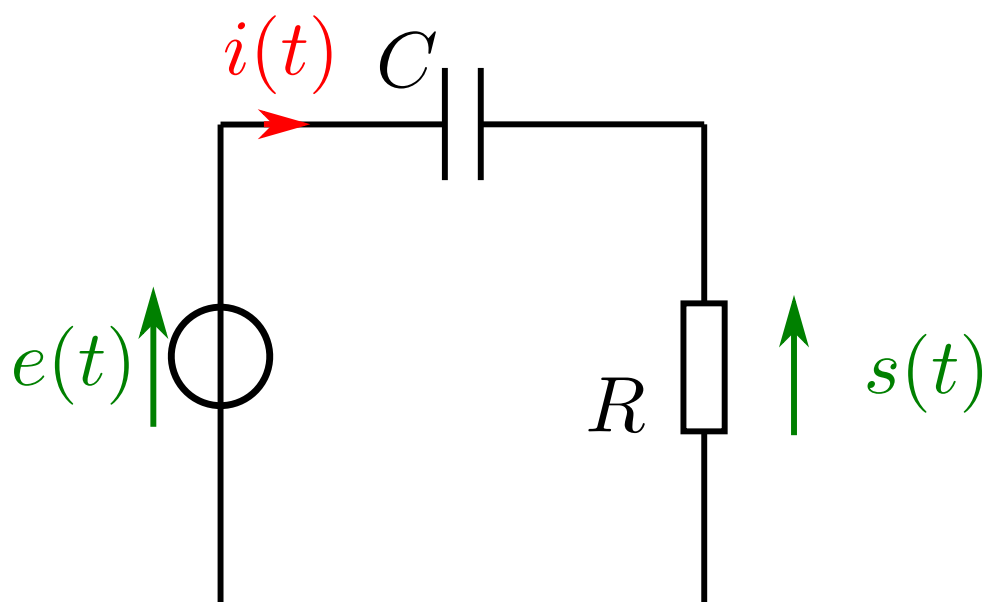
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

— Il a pour diagramme de Bode :



B – Filtre passe-haut du premier ordre

Un filtre passe haut du premier ordre peut être obtenu en prenant comme sortie la tension d'une résistance dans un circuit RC :



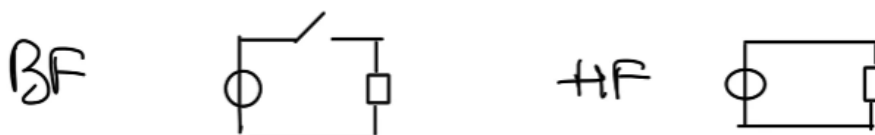
1. Rappeler les impédances de la résistance et du condensateur.
2. Faire un schéma équivalent en basses fréquences et un schéma pour les hautes fréquences.
3. En déduire le comportement du filtre. Est-ce bien un filtre passe haut ?
4. Avec un raisonnement sur l'équation différentielle ou sur les impédances, retrouver l'expression de la solution particulière complexe $\underline{s}(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$. En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.
5. En déduire $G(\omega)$. Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basses et hautes fréquences ?
6. Trouver la pulsation de coupure ω_c pour laquelle $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Que vaut $\varphi(\omega_c)$?
7. Déduire l'allure des asymptotes de G_{dB} à basses et hautes fréquences. A quel $\underline{H}(\omega)$ correspondrait l'asymptote à basse fréquence ? Proposer un nom pour ce type de comportement.
8. Trouver $\varphi(\omega)$

— **Correction**

1. Impédances

$$Z_R = R \text{ et } Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. Schémas équivalents BF / HF



3. Nature du filtre

— BF : $s = Ri = 0$

— HF : $s = e$

le montage laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses : filtre passe-haut du premier ordre

4. Fonction de transfert

Diviseur de tension dans la série C - R :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

On simplifie en multipliant numérateur et dénominateur par $j\omega C$:

$$H(j\omega) = \frac{R j\omega C}{1 + j\omega RC} = \boxed{\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \underline{H}(\omega)}$$

5. Module du gain

$$\boxed{G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}$$

— Pour $\omega \rightarrow 0$: $G(\omega) \rightarrow 0$

— Pour $\omega \rightarrow +\infty$: $G(\omega) \rightarrow 1$

C'est bien cohérent avec un passe-haut.

6. Pulsation de coupure et phase à ω_c

Le gain maximal est $G_{\max} = 1$ (pour $\omega \rightarrow +\infty$).

On cherche ω_c tel que $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{(\omega_c RC)^2}{1 + (\omega_c RC)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (\omega_c RC)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arg(j\omega RC) - \arg(1 + j\omega RC) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC).$$

À la coupure ($\omega_c RC = 1$) :

$$\varphi(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \boxed{\frac{\pi}{4} = \varphi(\omega_c)}$$

7. Asymptotes de G_{dB}

On a :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} G(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right)$$

- Pour $\omega \ll \omega_c : (\omega RC)^2 \ll 1$
 $G(\omega) \simeq \omega RC$

$$G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 20 \log_{10}(\omega RC) = 20 \log_{10} \omega + \text{constante},$$

pente +20 dB/décade.

L'asymptote basse fréquence correspond au module de $H_{\text{BF}}(j\omega) \simeq j\omega RC$, c'est un comportement dérivateur.

- Pour $\omega \gg \omega_c : (\omega RC)^2 \gg 1$
 $G(\omega) \simeq 1$

$$G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 0 \text{ dB}$$

asymptote horizontale

8. Phase $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)$$

Limites :

- $\omega \rightarrow 0 : \varphi(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (courant en avance de 90° , comportement capacitif pur).
- $\omega = \omega_c : \varphi(\omega_c) = \frac{\pi}{4}$ (avance de 45°).
- $\omega \rightarrow +\infty : \varphi(\omega) \rightarrow 0$ (pas de déphasage pour les très hautes fréquences).

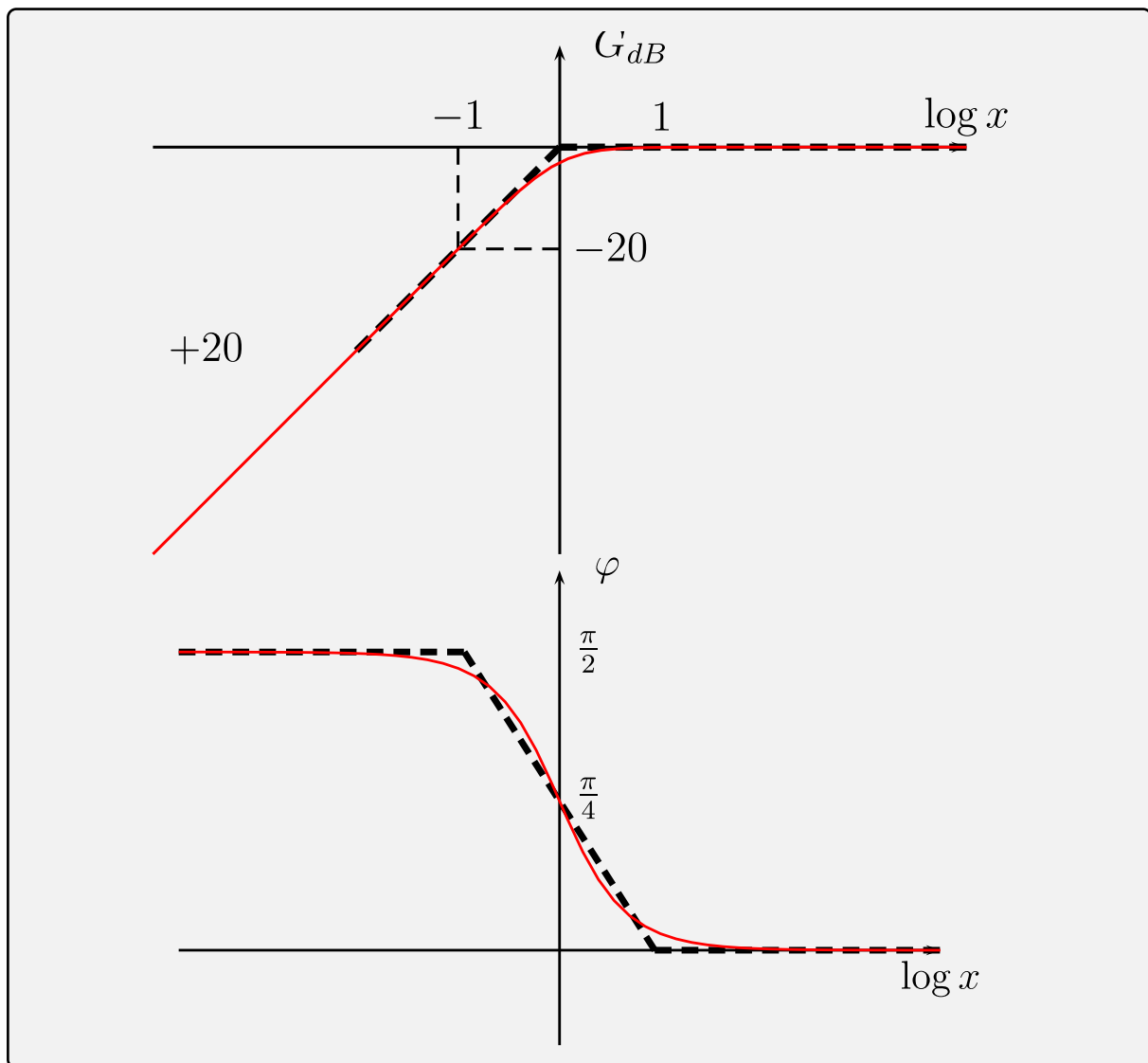
On peut obtenir un filtre passe haut d'ordre 1 de plusieurs manières, mais son comportement reste le même. On peut donc utiliser une forme canonique qui regroupe ces comportements et on peut le relier au système concret en identifiant les paramètres.

Un filtre passe haut du premier ordre permet de réduire l'amplitude de la fondamentale et des basses harmoniques. Une utilité de ce filtre est de filtrer le bruit à haut fréquence.

- La forme canonique d'un filtre passe bas du premier ordre est :

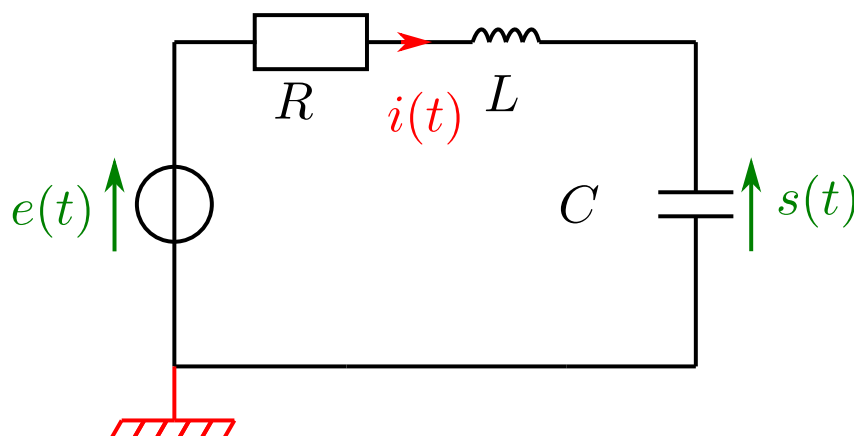
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

- Il a pour diagramme de Bode :



C – Filtre passe-bas du deuxième ordre

Un filtre passe bas du deuxième ordre peut être obtenu en prenant comme sortie la tension du condensateur dans un circuit RLC :



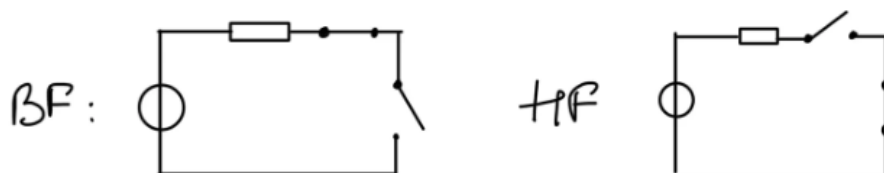
1. Rappeler les impédances de la résistance, de l'inductance et du condensateur.
2. Faire un schéma équivalent en basses fréquences et un schéma pour les hautes fréquences.
3. En déduire le comportement du filtre. Est-ce bien un filtre passe bas ?
4. Avec un raisonnement sur l'équation différentielle ou sur les impédances, retrouver l'expression de la solution particulière complexe $\underline{s}(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$. En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.
5. En déduire $G(\omega)$. Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basses et hautes fréquences ?
6. Rappeler le phénomène qui se passe pour $\omega \simeq \omega_0$ et $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
7. Déduire l'allure des asymptotes de G_{dB} à basses et hautes fréquences. A quel $\underline{H}(\omega)$ correspondrait l'asymptote à haute fréquence ? Proposer un nom pour ce type de comportement.

— Correction

1. Impédances

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. Schémas équivalents BF / HF



3. Nature du filtre

$$\text{BF : } s = e$$

HF : $s = 0$

C'est bien un filtre passe-bas

4. Fonction de transfert

On utilise le diviseur de tension dans la série :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

On simplifie en multipliant numérateur et dénominateur par $j\omega C$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

5. Module du gain

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

— BF : $G \rightarrow 1$

— HF : $G \rightarrow 0$

Cohérent avec un passe-bas.

6. Lorsque $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$, le dénominateur peut devenir minimal pour une pulsation légèrement inférieure à ω_0 :

Le phénomène observé : résonance en tension.

7. Asymptotes du diagramme de Bode

— $\omega \ll \omega_0$:

$$G(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq 0 \text{ dB}.$$

— Pour $\omega \gg \omega_0$:

$$G(j\omega) \simeq \frac{1}{-\omega^2 LC} \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

pente −40 dB/décade

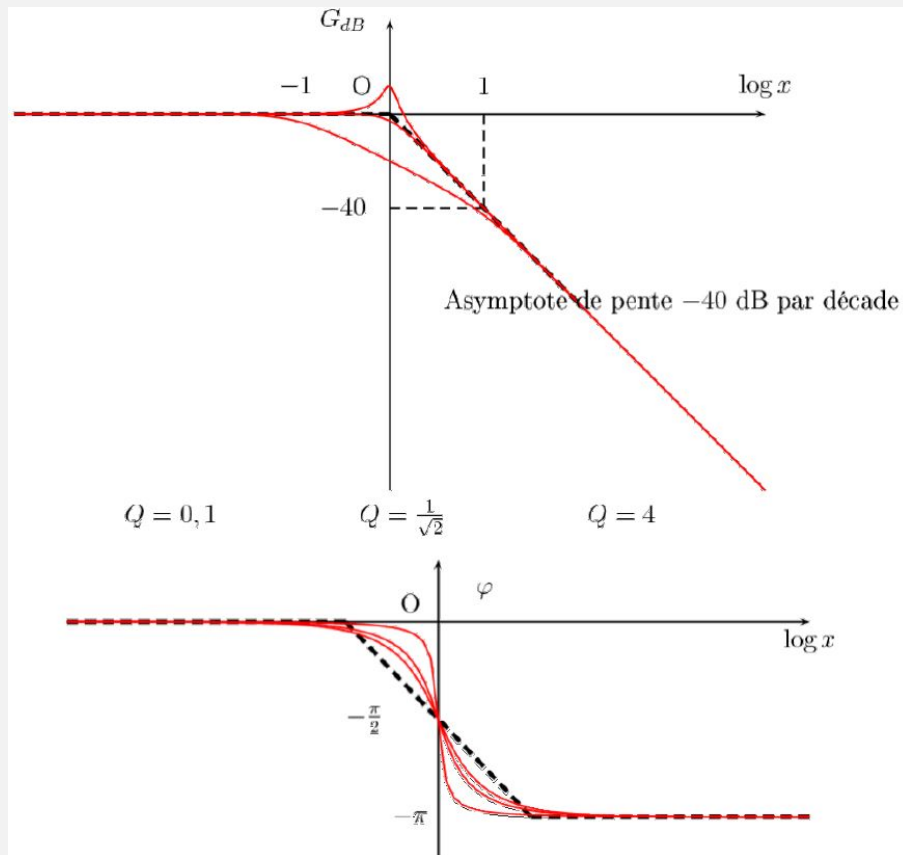
On peut obtenir un filtre passe bas d'ordre 2 de plusieurs manières, mais son comportement reste le même. On peut donc utiliser une forme canonique qui regroupe ces comportements et on peut le relier au système concret en identifiant les paramètres.

Un filtre passe bas du deuxième ordre permet de réduire encore plus l'amplitude des hautes harmoniques par rapport au filtre passe bas d'ordre 1. Cependant, il faut faire attention à la résonance.

— La forme canonique d'un filtre passe bas du premier ordre est :

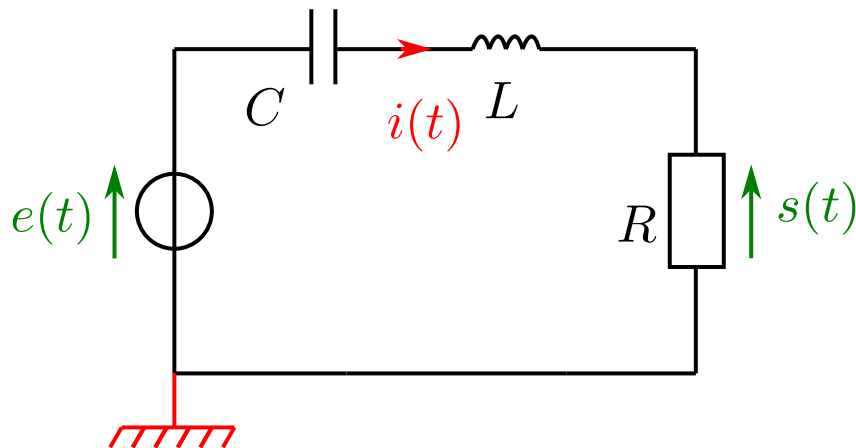
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

— Il a pour diagramme de Bode :



D – Filtre passe-bande du deuxième ordre

Un filtre passe bande du deuxième ordre peut être obtenu en prenant comme sortie la tension de la résistance dans un circuit RLC :



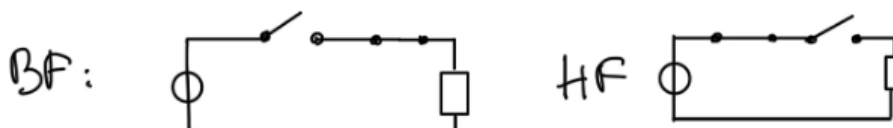
1. Rappeler les impédances de la résistance, de l'inductance et du condensateur.
2. Faire un schéma équivalent en basses fréquences et un schéma pour les hautes fréquences.
3. En déduire le comportement du filtre. Est-ce bien un filtre passe bas ?
4. Proposer une manière d'avoir un filtre passe haut du deuxième ordre.
5. Avec un raisonnement sur l'équation différentielle ou sur les impédances, retrouver l'expression de la solution particulière complexe $\underline{s}(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$. En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.
6. En déduire $G(\omega)$. Le résultat précédent est-il cohérent avec le comportement du circuit en basses et hautes fréquences ?
7. Rappeler le phénomène qui se passe pour $\omega = \omega_0$. Que vaut $\varphi(\omega_0)$?
8. Trouver les pulsation de coupure $\omega_{c,1}$ et $\omega_{c,2}$ pour lesquelles $G(\omega_{c,1,2}) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.
9. Déduire l'allure des asymptotes de G_{dB} à basses et hautes fréquences.
 - (a) A quel $\underline{H}(\omega)$ correspondrait l'asymptote à haute fréquence ? Proposer un nom pour ce type de comportement.
 - (b) A quel $\underline{H}(\omega)$ correspondrait l'asymptote à basse fréquence ? Proposer un nom pour ce type de comportement.

— Correction

1. Impédances

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. Schémas équivalents BF / HF



3. Nature du filtre

BF : $s \simeq 0$

HF : $s \simeq 0$

comportement passe-bande

4. Comment obtenir un passe-haut du 2^e ordre ?

Il suffit de regarder la dernière tension du RLC : la tension aux bornes de l'inductance

5. Fonction de transfert $H(j\omega)$

On prend la tension de sortie aux bornes de R .

Pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}.$$

En factorisant et en simplifiant, on obtient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

6. Le gain est le module de $\underline{H}$

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

— pour $x \ll 1$ (BF) : $G(\omega) \propto \omega \rightarrow 0$

— pour $x \gg 1$ (HF) : $G(\omega) \propto 1/\omega \rightarrow 0$

C'est cohérent avec un passe-bande.

7. Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on a $(1 - LC\omega^2)^2 = 0$ donc le gain maximum $G(\omega) = 0$

C'est le phénomène de résonance en intensité (courant maximum, tension sur R maximale et en phase avec $e(t)$).

8. Les pulsations de coupure sont définies par :

$$G(\omega_{c,1}) = G(\omega_{c,2}) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En posant $x = \omega_c/\omega_0$,

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1.$$

On prend la racine (les deux signes sont possibles) :

$$Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1.$$

Cela donne deux équations :

$$(1) \quad Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = 1 \quad \text{et} \quad (2) \quad Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1.$$

— Pour (1) :

$$Q(x^2 - 1) = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

— Pour (2) :

$$Q(x^2 - 1) = -x \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

On a donc deux trinômes :

$$(1') \quad x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0, \quad (2') \quad x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

Le discriminant est le même dans les deux cas :

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q} \right)^2 + 4 > 0.$$

$$\text{Notons } S = \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

— Pour (1) :

$$x = \frac{\frac{1}{Q} \pm S}{2}.$$

— Pour (2) :

$$x = \frac{-\frac{1}{Q} \pm S}{2}.$$

Les deux racines positives (les deux pulsations de coupure) sont alors :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{Q} + S}{2}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{Q} + S}{2}.$$

(l'une vient de l'équation (2), l'autre de (1)).

On calcule leur différence :

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{\frac{1}{Q} + S}{2} \right) - \left(\frac{-\frac{1}{Q} + S}{2} \right) = \frac{\frac{1}{Q} + S + \frac{1}{Q} - S}{2} = \frac{2}{2Q} = \frac{1}{Q}.$$

Donc exactement :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}.$$

On avait $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, donc :

$$\omega_{c,1} = \omega_0 x_1, \quad \omega_{c,2} = \omega_0 x_2.$$

La largeur de bande vaut :

$$\Delta\omega = \omega_{c,2} - \omega_{c,1} = \omega_0(x_2 - x_1) = \omega_0 \times \frac{1}{Q}.$$

Donc :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}.$$

9. Asymptotes de G_{dB}

— Basses fréquences ($x \ll 1$)

$$G(\omega) \simeq \frac{x}{Q} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \simeq 20 \log_{10} x - 20 \log_{10} Q,$$

pente +20 dB/décade.

— Hautes fréquences ($x \gg 1$)

$$G(\omega) \simeq \frac{1}{Qx} \quad \Rightarrow \quad G_{dB} \simeq -20 \log_{10} x - 20 \log_{10} Q,$$

pente -20 dB/décade.

On peut obtenir un filtre passe bande d'ordre 2 de plusieurs manières, mais son comportement reste le même. On peut donc utiliser une forme canonique qui regroupe ces comportements et on peut le relier au système concret en identifiant les paramètres.

Un filtre passe bande du deuxième ordre permet de sélectionner des harmoniques d'un signal en baissant les amplitudes des autres. Une utilité est de pouvoir envoyer de nombreux signaux différents à des fréquences différentes et les récupérer avec ce filtre.

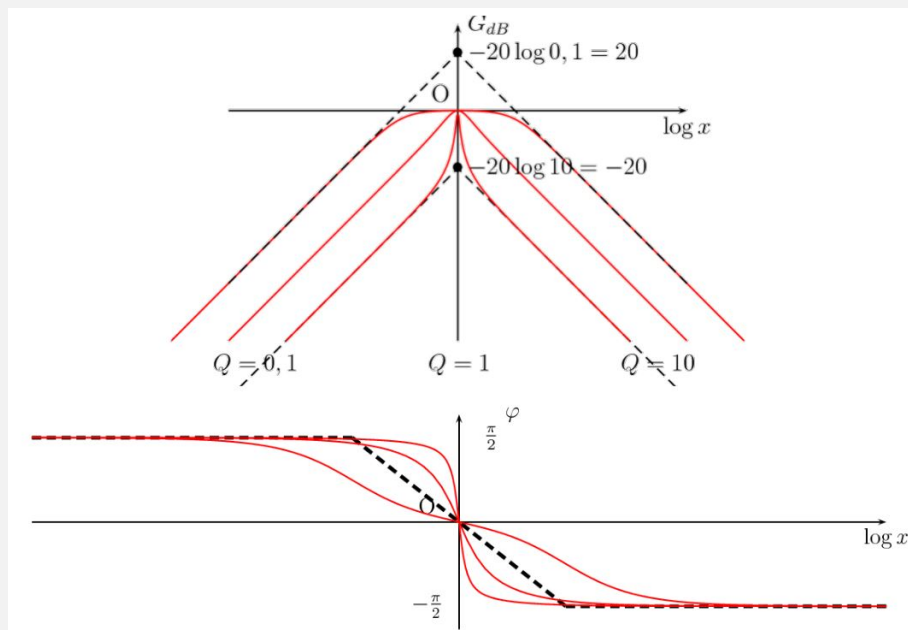
— La forme canonique d'un filtre passe bas du premier ordre est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

— Il a pour bande passante

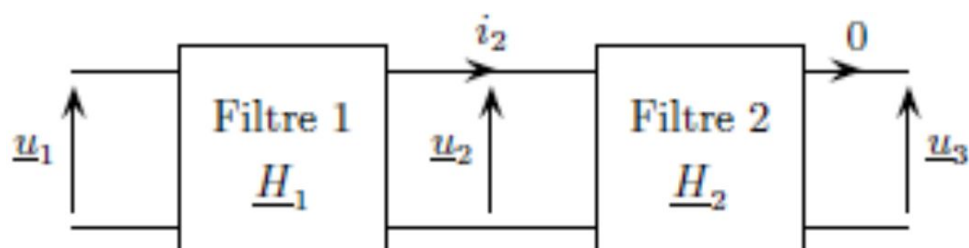
$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

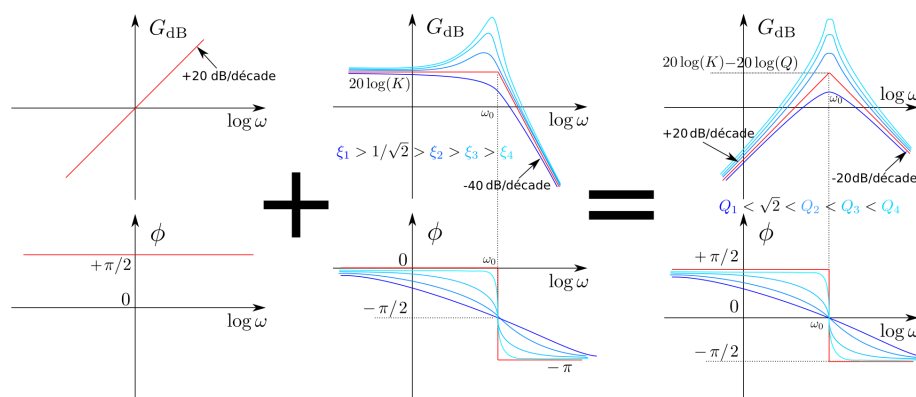
— Il a pour diagramme de Bode :



E – Mise en cascade de filtres

Dans la pratique, on cherche souvent à réaliser des filtres plus complexes en associant plusieurs filtres simples en cascade.





Cependant, cette approche pose un petit problème : dans nos définitions précédentes, les fonctions de transfert ont été établies en supposant que le montage suivant n'influence pas le comportement du filtre précédent.

En termes électriques, cela revient à considérer que le courant entrant dans la maille suivante est nul.

Cette hypothèse reste valable si certaines conditions sont respectées, en particulier :

- l'impédance d'entrée du montage suivant est **très grande**,
- l'impédance de sortie du montage précédent est **très faible**.

