# Révision des vacances d'été

# Analyse

Révision du cours de BCPST1 à destination des BCPST2.

# Table des matières

# Partie 1

# Complexes et Trigonométrie

## 1.1 Trigonométrie

### 1.1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1**

- Pour tout réel $\theta$ , $\cos(\theta)$ est le nom de la partie réelle de $\exp(i\theta)$ et $\sin(\theta)$ celui de sa partie imaginaire.
- Pour tout réel $\theta$ tel que $\cos(\theta) \neq 0$, on pose $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

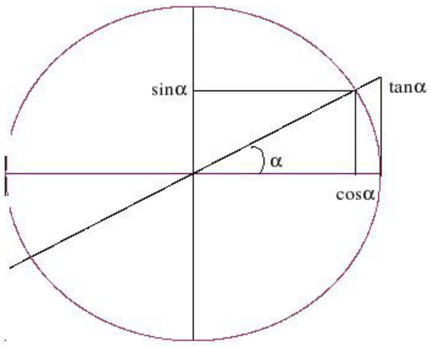
**Proposition 2**

Des propriétés de l'exponentielle imaginaire, on déduit des valeurs particulières à connaître par cœur :

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\tan(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | non défini | $0$ |

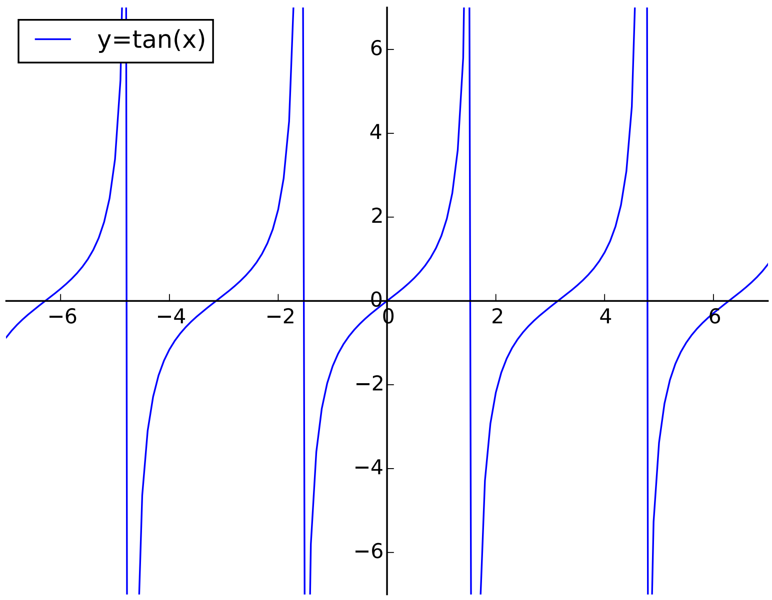
☛ **Remarque :**

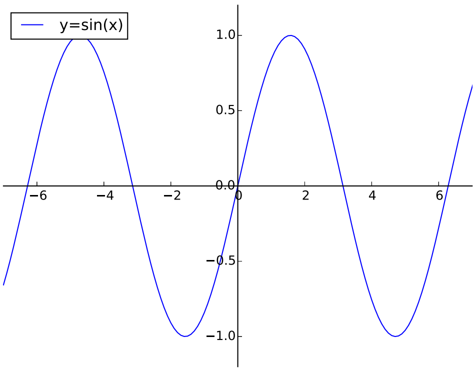
On rencontre parfois des confusions entre $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$... Il suffit de dessiner un cercle trigonométrique pour constater que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est beaucoup plus grand que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ :

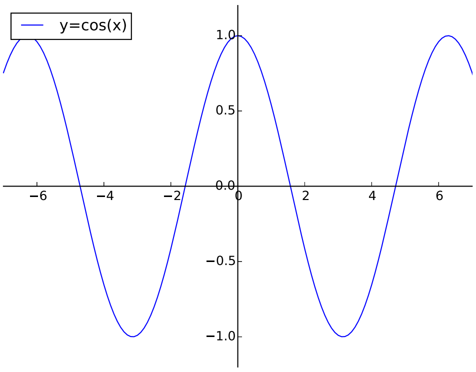



✎) **ILLUSTRATION :**

Voici les graphes de ces fonctions :






Quelques premières propriétés basées sur les périodicités de ces fonctions :

**Proposition 3**

Pour tous réels $\theta$ et $\phi$, on a :

- $\begin{cases} \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \\ \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \end{cases}$

### 1.1.2 Formules de trigonométrie

**Celles à connaître par cœur**

**Proposition 4**

Soient $\theta$ et $\phi$ des réels, on a : $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$.

On a aussi : $\begin{cases} \cos(\theta+\phi) &= \cos(\theta)\cos(\phi)-\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta+\phi) &= \sin(\theta)\cos(\phi)+\sin(\phi)\cos(\theta) \end{cases}$

☛ **Remarque :**

1. On note que les formules précédentes se retrouve (et se démontre) simplement en partant de cette égalité :
$$\exp\left(i\left(\theta+\phi\right)\right)=\exp\left(i\theta\right)\times\exp\left(i\phi\right)$$
et en identifiant partie réelle et partie imaginaire.
2. On utilise les notations de la précédente proposition. En exploitant les formules précédentes et la parité de cos et l'imparité de sin, on obtient alors :
   - $\cos(\theta-\phi)=\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi)$.
   - $\sin(\theta-\phi)=\sin(\theta)\cos(\phi)-\sin(\phi)\cos(\theta)$.

Voici les fameuses propriétés d'angle moitié de cos et sin :

**Proposition 5**

Pour tout réel $\theta$, on a :

- $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$
- $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$
- $\cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta)$

➤ ***Exercice :***

*Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x$ réel :*
$$\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(2x)+1.$$

Pour tout réel $x$, on a :
$$\begin{aligned}\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(2x)+1 &\Longleftrightarrow 1-2\sin^2(x)=2\sin(x)\cos(x)+1\\ &\Longleftrightarrow \sin(x)\times(\cos(x)+\sin(x))=0\\ &\Longleftrightarrow \sin(x)=0 \text{ ou } \cos(x)=-\sin(x)\\ &\Longleftrightarrow x\equiv 0[\pi] \quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]\end{aligned}$$

### Celles à retrouver

A partir des formules précédentes, on obtient aisément cette proposition :

**Proposition 6**

Pour tous réels $a$, $b$, on a :
- $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
- $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$
- $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Pour tous réels $p$ et $q$, on a :
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

☛ **Remarque :**

Notez que les formules précédentes permettent de factoriser : On risque donc de les rencontrer assez souvent !

### ➤ *Exercice* :

*Résoudre l'équation* $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ *d'inconnue* $x$ *réel.*

........................................................................................................

A l'aide des formules de factorisations, on obtient :

$$\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

Chouette, du $\sin(2x)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff 2\sin(2x)\cos(x) + \sin(2x) = 0 \\
&\iff \sin(2x) \times \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

**Formules avec les tangentes**

**Proposition 7**

Pour tout réel $\theta$, sous réserve d'existence, on a :

- $\tan(\theta + 2\pi) = \tan(\theta)$
- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$

**Proposition 8**

Pour tous les réels $\theta$ et $\phi$, sous réserve d'existence, on a :

- $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$
- $\tan(\theta + \phi) = \dfrac{\tan(\theta) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\theta)\tan(\phi)}$
- $\tan(\theta - \phi) = \dfrac{\tan(\theta) - \tan(\phi)}{1 + \tan(\theta)\tan(\phi)}$
- $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$

**Proposition 9**

Pour tout réel $\theta$, sous réserve d'existence, en posant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on a :

- $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

☞ **Mise en garde :**

Dans ces formules avec les tangentes, on a bien mis "sous réserve d'existence". Ne pas oublier de vérifier que tous les objets de la formule existe avant de l'appliquer. $\tan(\pi)$ existe (et vaut $0$) et $\tan(\theta + \phi)$, avec $\theta$ et $\phi$ deux réels, est, sous réserve d'existence, $\dfrac{\tan(\theta) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\theta)\tan(\phi)}$. Écrire ceci est pourtant totalement faux :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

car $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ n'existe pas. Ce qu'on dit ici est simple mais avec des quantités littérales, vous pouvez facilement vous faire avoir !

### 1.1.3 Résolution d'équation

☛ **Remarque :**

On va utiliser la notation modulo car elle simplifie considérablement l'écriture. On rappelle qu'écrire $a \equiv b\ [c]$ avec $a$, $b$ deux réels et $c$ un réel non nul signifie qu'il existe $k$ un entier tel que $a = b + k \times c$. Autrement dit, à $c$ près, $a$ et $b$, c'est la même chose. Par exemple, on peut écrire que :

- $12 \equiv 6\ [2]$
- $29 \equiv 5\ [4]$
- $30 \equiv 16\ [7]$
- $68 \equiv 23\ [9]$
- $5 \equiv 673\ [2]$
- $6 \equiv 678\ [2]$

$68 \equiv 23\ [9]$ est vrai car $68$ et $23 + 9 \times 5$, c'est la même chose. On vous laisse détailler les autres modulos. Lors de la résolution d'équation de trigonométrique, on va devoir faire des sommes et des divisions dans les modulos, voici les règles qu'il faudra respecter :

- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \equiv \theta_1' + \theta_2'[2\pi]$
- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \equiv \theta_1' - \theta_2'[2\pi]$
- $n\theta_1 \equiv n\theta_1'[2\pi] \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_1' \left[\dfrac{2\pi}{n}\right]$

Penser bien en particulier à diviser dans le modulo quand vous diviser une égalité.

**Proposition 10**

Soient $\phi, \theta$ deux réels, on a :

$$\cos(\theta) = \cos(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\phi[2\pi]$$

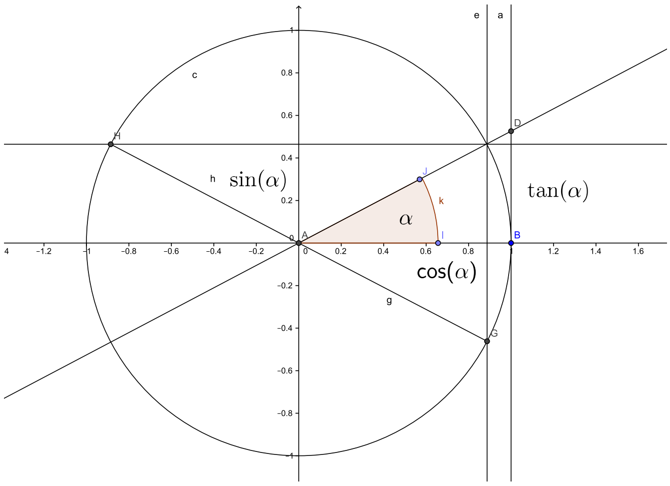
$$\sin(\theta) = \sin(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \phi[2\pi]$$

$$\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta = \phi[\pi]$$

☞ **Mise en garde :**

Attention, on des modulos $2\pi$ pour cos et sin et modulo $\pi$ pour tan. Ne pas oublier aussi à chaque fois la deuxième possibilité. $\cos(\theta) = \cos(\phi)$ n'équivaut pas seulement à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ mais à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$. La deuxième possibilité se retrouve très simplement en observant un cercle trigo :

1. Pour le cos, on remarque que $\cos(\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite verticale sur le cercle pour le voir.
2. Pour le sin, on remarque que $\sin(\alpha)$ et $\sin(\pi - \alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite horizontale sur le cercle pour le voir.
3. Pour le tan, on remarque que $\tan(\alpha)$ et $\tan(\pi + \alpha)$ valent la même chose.




### 1.1.4 Transformation

**Linéarisation**

**Définition 11**

Soit $\theta$ un réel. Soit $P$ un polynômes de 2 variables. Linéariser $P(\cos(\theta), \sin(\theta))$, c'est l'exprimer sous la forme :

$$a_0 + a_1 \cos(\theta) + \cdots + a_n \cos(n\theta) + b_1 \sin(\theta) + \cdots + b_n \sin(n\theta)$$

avec $n$ un entier naturel et $a_0, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels.

✌ **Exemple :**

Soit $\theta$ un réel. De $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, on déduit que :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \times (\cos(2\theta) + 1).$$

L'égalité précédente est la linéarisation de $\cos^2(\theta)$. On n'a plus de produit, ni de puissance.

■ **Méthode:**

Pour linéariser un polynôme trigonométrique, on suit les étapes suivantes :

1. On utilise les formules d'Euler, on remplace donc les $\cos(\theta)$ et les $\sin(\theta)$ à l'aide de la formule vue dans le chapitre sur les nombres : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
2. On développe ensuite à l'aide de la formule du binôme de Newton (cf chapitre Calcul algébrique).
3. Enfin, on regroupe ensemble les $e^{ik\theta}$ avec les $e^{-ik\theta}$ et on utilise de nouveau les formules d'Euler.

✌ **Exemple :**

Pour tout réel $t$, on a :

$$\begin{aligned}\cos^6(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^6\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+6e^{4it}+15e^{2it}+20+15e^{-2it}+6e^{-4it}+e^{-6it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+e^{-6it}}{2}+6\times\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}+10+15\times\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\cos(6t)+6\cos(4t)+15\cos(2t)+10\right).\end{aligned}$$

## ➤ *Exercice :*

*Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\ dt$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Déjà, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\ dt$ existe par continuité de $\cos^6$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en particulier. On vient de voir dans l'exemple précédent que :

$$\cos^6(t) = \frac{1}{2^5}\times\left(\cos(6t)+6\cos(4t)+15\cos(2t)+10\right).$$

D'où, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt &= \left[\frac{\sin(6t)}{192}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+6\left[\frac{\sin(4t)}{128}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+15\left[\frac{\sin(2t)}{64}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{10\pi}{64}\\ &= \frac{5\pi}{32}.\end{aligned}$$

### Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

**Proposition 12**

**Formule de Moivre**
Pour tout réel $\theta$, pour tout entier $n$, on a :

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta) = (\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

■ **Méthode:**

Pour expliciter $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on suit les étapes suivantes :

1. On développe $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
2. Enfin, d'après la formule de De Moivre, il suffit de chercher la partie réelle si on veut $\cos(n\theta)$ et la partie imaginaire si on veut $\sin(n\theta)$.

### ➤ *Exercice* :

*Appliquer le principe précédent avec* $\cos(4\theta)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

D'après Newton, $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$ est :

$$\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta).$$

En identifiant la partie réelle, d'après la formule de De Moivre, on a :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

**Simplification de $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$**

**Proposition 13**

Soient $A, B$ et $\theta$ trois réels. Il existe $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$A\cos\theta + B\sin\theta = r\cos(\theta - \phi).$$

■ **Méthode:**

Pour expliciter le $r$ et le $\phi$ de la précédente proposition, on suit les étapes suivantes :

1. On factorise par $\sqrt{A^2+B^2}$. Si $A$ et $B$ ne sont pas tous les deux nuls, on écrit :
$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = \sqrt{A^2+B^2} \times \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)\right)$$
2. On cherche un réel $\phi$ tel que $\cos(\phi) = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\phi) = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
3. Enfin, on se rend compte que $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)$ est tout simplement $\cos(\theta - \phi)$ en utilisant la formule $\cos(a+b)$.

### ➤ *Exercice* :

*Résoudre l'équation d'inconnue* $\theta$ *réel :* $2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) = 4$

.....................................................................................................

Appliquons ! Soit $\theta$ un réel. On a :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) \\ &= 4 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta)\right) \end{aligned}$$

On reconnaît du $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$, d'où :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) = 4 &\iff \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ &\iff \theta - \frac{\pi}{3} \equiv 0[2\pi] \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

### 1.1.5 Les fonctions circulaires et leur réciproque.

☛ **Remarque :**

On va restreindre les fonctions circulaires de façon à les rendre bijective (elles ne le sont pas car elles ne sont pas injectives, $0,5$ a des tonnes d'antécédents par cos comme par sin et tan. Une fois restreinte, on va invoquer le théorème de la bijection continue qu'on rappelle dans un premier temps.

#### Notion de bijection continue

Dans cette partie, on note $D$ un ensemble de réels, $f$ une fonction numérique dont l'ensemble de définition est $D$.

**Définition 14**

- On note $f(D)$ l'ensemble d'arrivée de $f$. C'est $\{f(x), x \in D\}$.
- On dit que $f$ est bijective si, pour tout $y$ de $f(D)$, il existe un unique $x$ de $D$ tel que $f(x) = y$.
- Si $f$ est bijective, on note $f^{-1}$ sa réciproque, c'est la fonction définie sur $f(D)$ caractérisée par :

$$\forall x \in D, \forall y \in f(D),\ y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

✌ **Exemple :**

1. exp est une fonction bijective, sa fonction réciproque est ln.
2. $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective. L'équation $x^2 = 25$ d'inconnue $x$ réel a deux solutions différentes (5 et $-5$). $\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est en revanche bijective, c'est la fonction réciproque de $x \mapsto \sqrt{x}$.

**Théorème 15**

**Théorème de la bijection continue**
Soit $f$ une fonction strictement monotone et continue sur $D$. $f$ réalise alors une bijection de $D$ sur $f(D)$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations du précédent théorème. On peut prouver facilement que $f^{-1}$ est alors aussi strictement monotone et continue et a même variations que $f$, sa courbe représentative dans un repère orthonormée est la symétrique par rapport à la première bissectrice de celle de $f$. On note aussi que l'on a besoin dans ce théorème d'expliciter $f(D)$. Appelons $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tels que $a \leqslant b$, $f$ une fonction croissante et $g$ une fonction décroissante. Sous réserve d'existence, on a :

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)] \qquad g([a,b]) = [g(b), g(a)]$$
$$f(]a,b]) = ]\lim_{x\to a^+}(f(x)), f(b)] \qquad g(]a,b]) = [g(b), \lim_{x\to a^+}(g(x))[$$
$$f([a,b[) = [f(a), \lim_{x\to b^-}(f(x))[ \qquad g([a,b[) = ]\lim_{x\to b^-}(g(x)), g(a)]$$
$$f(]a,b[) = ]\lim_{x\to a^+}(f(x)), \lim_{x\to b^-}(f(x))[ \qquad g(]a,b[) = ]\lim_{x\to b^-}(g(x)), \lim_{x\to a^+}(g(x))[$$

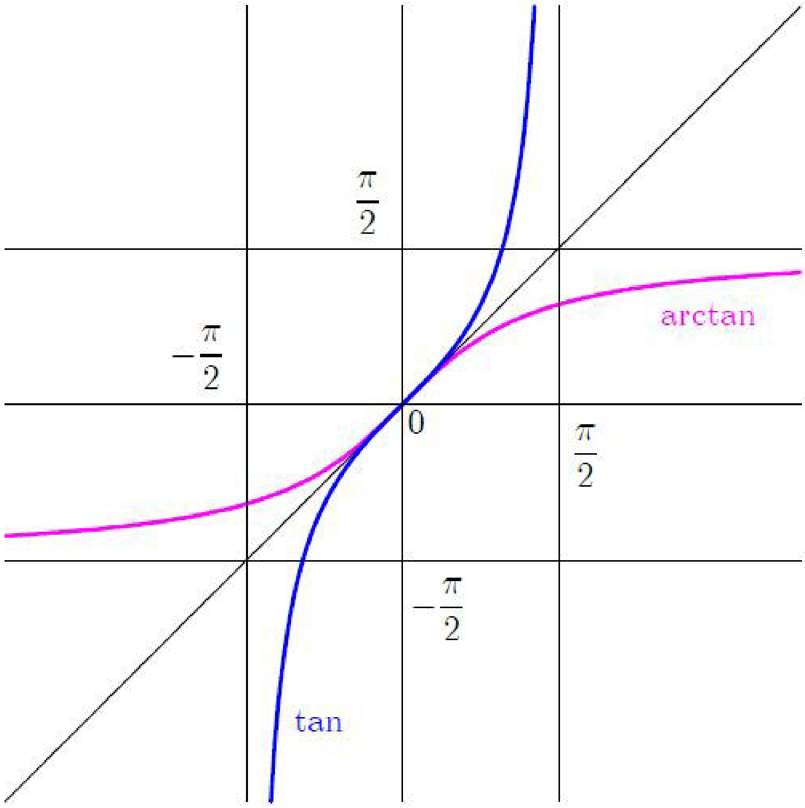
✌ **Exemple :**

Soit $f : x \mapsto x^3$. $f$ étant continue et strictement croissante, $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x$
c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**La fonction** arctan**.**

**Définition 16**

La fonction $\begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan(x) \end{cases}$ est bijective. Elle admet une réciproque, c'est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ x & \mapsto \arctan(x) \end{cases}$.




✌ **Exemple :**

Pour tout réel $x$, $\arctan(x)$ est l'unique réel $\theta$ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel qu'on ait $\tan(\theta) = x$. On a ainsi par exemple :

1. $\arctan(0) = 0$
2. $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
3. $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
4. $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Par exemple, $\arctan(1)$ vaut $\frac{\pi}{4}$ car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ vaut 1 et $\frac{\pi}{4}$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**Proposition 17**

- La fonction arctan est impaire.
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\arctan(\tan(x)) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\tan(\arctan(x)) = x$.

☞ **Mise en garde :**

Notez bien que $\tan(\arctan(x))$ ne donne pas toujours $x$. Autrement dit, $x \mapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle ne se confond avec la fonction identité que sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par exemple, $\arctan(\tan(\pi))$ vaut $\arctan(0)$ soit $0$ et par $\pi$.

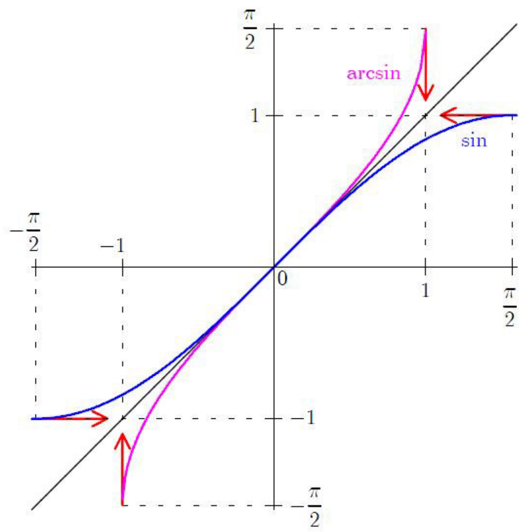
**Les fonctions** arcsin **et** arccos**.**

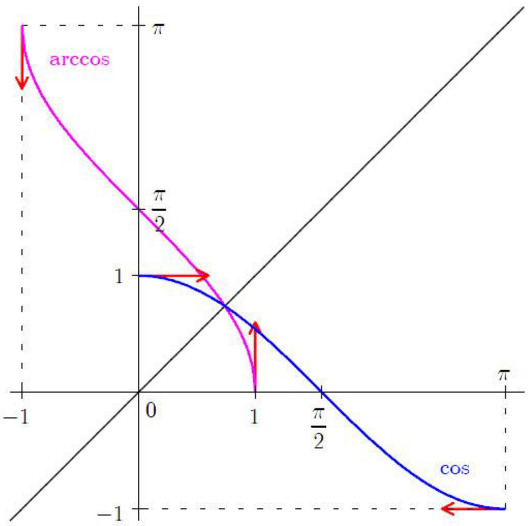
☛ **Remarque :**

Les fonctions arcsin et arccos ne sont plus au programme des bcpst1 (arctan l'est par contre). Il est bon toutefois de les avoir déjà rencontrées.

**Définition 18**

- La fonction $\begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$ est bijective). Elle admet donc une réciproque, c'est la fonction $\begin{cases} [-1,1] & \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto \arcsin(x) \end{cases}$.
- La fonction $\begin{cases} [0,\pi] & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \cos(x) \end{cases}$ est bijective. Elle admet donc une réciproque, c'est la fonction $\begin{cases} [-1,1] & \to [0,\pi] \\ x & \mapsto \arccos(x) \end{cases}$.




☛ **Remarque :**

1. Autrement dit, pour tout $x$ de $[-1, 1]$, arcsin$(x)$ est l'unique réel $\theta$ de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = x$ et arccos$(x)$ est l'unique est l'unique réel $\theta$ de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$.
2. On note que la fonction arcsin est, tout comme arctan, une fonction impaire. L'ensemble de départ de arccos n'étant pas symétrique par rapport à l'origine, arccos n'est ni paire, ni impaire.

**Exemple :**

On a donc :

1. $\arcsin(0) = 0$
2. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
3. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
4. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
5. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
6. $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
7. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
8. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
9. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$
10. $\arccos(1) = 0$

**Proposition 19**

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a : $\arcsin(\sin(x)) = x$.
- $\forall x \in [-1, 1]$, on a : $\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arccos(x)) = x$.
- $\forall x \in [0, \pi]$ , on a : $\arccos(\cos(x)) = x$.

## ➤ *Exercice :*

*Calculer* $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On cherche donc un angle $\theta$ de $[0;\pi]$ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. On voit que la réponse est $\frac{2\pi}{3}$. Par définition de l'arccosinus, on a donc :

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

**Quelques formules (Hors-programme!!!).**

**Remarque :**

On sait déjà :

- Pour tout réel $x$, on a : $\tan(\arctan(x)) = x$.
- Pour tout $x$ de $[-1, 1]$, on a : $\cos(\arccos(x)) = x$.
- Pour tout $x$ de $[-1, 1]$, on a : $\sin(\arcsin(x)) = x$.

**Proposition 20**

Voici la suite :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\arccos(x))$ est $\sqrt{1-x^2}$.
- $\forall x \in \,]-1,1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $\forall x \in [-1,1]\setminus\{0\}$, $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
- $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan(x))$ est $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{x}{|x|}\dfrac{\pi}{2}$.

Ces formules sont totalement hors-programme. Il est bon de les avoir déjà vues et démontrées. On va voir une démonstration dans l'exercice ci-dessous.

➤ ***Exercice*** **:**

*Prouver que pour tout* $x$ *de* $[-1,1]$, *on a :*

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

.....................................................................................

On sait que, pour tout réel $\theta$, on a

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

On en déduit que, pour tout $x$ de $[-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2(\arcsin(x)) &= 1 - \sin^2(\arcsin(x))\\ &= 1 - x^2.\end{aligned}$$

De plus, $\cos(\arcsin(x))$ est $\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}$ car cos est positif sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(x)$ appartient à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

## 1.2 Les complexes

### 1.2.1 Écriture algébrique des complexes

#### Opérations sur $\mathbb{C}$

**Définition 21**

Soit $i$ le nombre vérifiant $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble suivant : $\left\{x + iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

✌ **Exemple :**

Voici quelques complexes :

- $3$
- $5 + 2i$
- $-i$
- $\dfrac{1}{2}$
- $\sqrt{\pi}i - 3$
- $2i - 8$

**Définition 22**

Soit $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. On définit l'addition et le produit sur $\mathbb{C}$ par :
- $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$.
- $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.

✌ **Exemple :**

- $3 + (5 + i) = 8 + i$
- $3 \times (5 + i) = 15 + 3i$
- $(3 + i) + (5 + 2i) = 8 + 3i$
- $(3 + i) \times (5 + 2i) = 13 + 11i$

**Proposition 23**

$\mathbb{C}$ muni de ces deux lois est un corps commutatif (vocabulaire hors-programme), cela veut dire qu'il vérifie les propriétés suivantes pour tout $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$ :

1. $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$
   (Associativité de l'addition)
2. $z + z' = z' + z$
   (Commutativité de l'addition)
3. $z + 0 = z$
   ($0$ élément neutre de l'addition)
4. $z + (-z) = 0$
   (Existence du symétrique)
5. $z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$
   (Associativité du produit)
6. $z \times z' = z' \times z$
   (Commutativité du produit)
7. On pose $1 = 1 + 0i$, on a : $z \times 1 = z$
   ($1$ élément neutre du produit)
8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, $(x + iy) \times \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = 1$
   (Existence de l'inverse)
9. $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$
   (Distributivité du produit sur l'addition)

☞ **Mise en garde :**

Il ny' a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$, on ne peut pas prolonger l'ordre acquis sur $\mathbb{R}$. Ecrire que $i > 0$ ou que $z \leqslant z'$ avec $z$ et $z'$ deux non réels n'a pas de sens ! Parler de majorant pour un ensemble de complexe, de fonction croissante pour une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{C}$ ou dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{C}$, de complexe positif non plus !

**Proposition 24**

**Intégrité de $\mathbb{C}$**
Soient $z$ et $z'$ deux complexes. On a : $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

☛ **Remarque :**

On verra que cette proposition, qui semble évidente, n'est pas vrai pour les matrices. Il existe des matrices $A$ et $B$ toutes les deux non nulles telles que $A \times B = 0$.

### Parties réelles et imaginaires

**Proposition 25**

Si $x$, $y$, $a$ et $b$ sont quatre réels alors on a :

$$a + ib = x + iy \Leftrightarrow a = x \quad \text{et} \quad b = y.$$

On parle d'identification des parties réelles et imaginaires d'un complexe.

☞ **Mise en garde :**

L'équivalence de la proposition précédente n'est pas vrai en général si on sait juste que $(x, y, a, b) \in \mathbb{C}^4$. Ainsi, $(3 + 2i) + i(4 + 2i) = 1 + 6i$ mais $3 + 2i \neq 1$ et $4 + 2i \neq 6$.

**Définition 26**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = x + iy$.

- On dit que $x + iy$ est l'écriture algébrique de $z$.
- On dit que $x$ est la partie réelle de $z$ et que $y$ est sa partie imaginaire. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ et on remarque que $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des réels.
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que $z$ est un imaginaire pure. Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, on dit que $z$ est un réel.
- L'ensemble des imaginaires pures est noté $i\mathbb{R}$.

☞ **Mise en garde :**

- La partie imaginaire de $2i$ n'est pas $2i$ mais $2$. La partie imaginaire, tout comme la partie réelle, d'un complexe sont deux réels !
- Si $\alpha$ et $\beta$ sont des complexes, $\mathrm{Re}(\alpha + i\beta)$ n'est pas nécessairement $\alpha$ et, de même, $\mathrm{Im}(\alpha + i\beta)$ n'est pas nécessairement $\beta$. Par exemple, $\mathrm{Re}(3 + i(3 + 2i))$ ne vaut pas $3$ mais $1$.

✌ **Exemple :**

- $\mathrm{Re}(2i) = 0$.
- $\mathrm{Re}(3 + 2i) = 3$.
- $\mathrm{Im}(4i) = 4$.
- $\mathrm{Im}(-4i - \pi) = -4$.

**Proposition 27**

**Linéarité**

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, pour tout $\lambda$ **réel**, on a :

- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$.
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

☛ **Remarque :**

Si $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont $n$ complexes avec $n$ un entier naturel non nul, par récurrence, on prouve aisément, à partir de la proposition précédente, que :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}(z_k) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}(z_k).$$

☞ **Mise en garde :**

Soient $z, z'$ et $\lambda$ trois complexes. On n'a pas en général :

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z),\ \operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z'), \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z').$$

Posez $z = z' = \lambda = i$ et vous aurez un contre-exemple à chaque fois.

### Conjugué d'un complexe

Comme $-i$ vérifie aussi la propriété fondamentale de $i$ qui est $i^2 = -1$, il est assez logique d'introduira la notion de conjuguée.

**Définition 28**

Soient $x$ et $y$ deux réels, on pose $z = x+iy$. On appelle conjugué de $z$ le complexe $\bar{z}$ défini par : $\bar{z} = x - iy$.

✌ **Exemple :**

- $\bar{i} = -i$.
- $\overline{2i} = -2i$.
- $\overline{3+2i} = 3-2i$.
- $\overline{4} = 4$.
- $\overline{i^2+i} = -1-i$.
- $\overline{4i-2} = -2-4i$.

**Proposition 29**

Soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes ($z_2$ est supposé non nul pour les propriétés numérotées 6 et 7), $\lambda$ un réel, $n$ un entier naturel et $m$ un entier. On a :

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
4. $\overline{\lambda z_1} = \lambda \bar{z_1}$
5. $(\overline{z_1})^n = \overline{z_1^n}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
7. $(\overline{z_2})^m = \overline{z_2^m}$

☛ **Remarque :**

Si $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont $n$ complexes avec $n$ un entier naturel non nul, par récurrence, on prouve aisément, à partir de la proposition précédente, que :

$$\overline{\left(\prod_{k=0}^{n} z_k\right)} = \prod_{k=0}^{n} \overline{(z_k)} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{(z_k)}.$$

**Proposition 30**

Soit $z$ un complexe, on a :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

On en déduit que : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

### Module d'un nombre complexe

**Définition 31**

Soient $x$ et $y$ deux réels, on pose $z = x + iy$. On appelle module de $z$ le réel défini par : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

☛ **Remarque :**

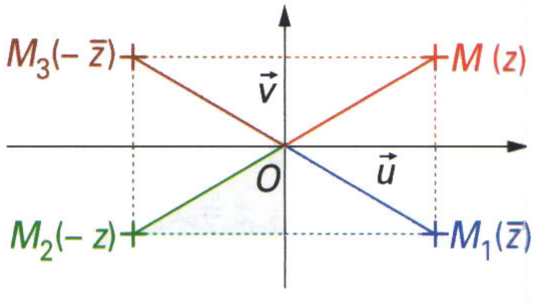
Le module prolonge la valeur absolue réelle. Garder la même notation est donc cohérent.

✌ **Exemple :**

$$\begin{aligned}|2i| &= \sqrt{0^2+2^2} \\ &= 2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}|-3i+4| &= \sqrt{4^2+(-3)^2} \\ &= 5\end{aligned} \qquad \begin{aligned}|-4| &= \sqrt{(-4)^2+0^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

☛ **Remarque :**

Soit $z$ un complexe. $z$, $iz$, $-iz$, $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$ ont même module. Voici un petit dessin illustrant que $z$, $-z$, $\overline{z}$ et $-\overline{z}$ ont même module :




**Proposition 32**

Soient $z$ et $z'$ deux complexes ($z$ est supposé non nul pour les propriétés numérotées 4 et 5), $n$ un entier naturel et $m$ un entier. On a :

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
3. $|z^n| = |z|^n$
4. $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$
5. $|z^m| = |z|^m$

☛ **Remarque :**

1. Si $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont $n$ complexes avec $n$ un entier naturel non nul, on prouve aisément que :

$$\left|\prod_{k=0}^{n} z_k\right| = \prod_{k=0}^{n} |z_k|.$$

2. Soit $z$ un complexe non nul. D'après cette proposition, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. C'est en général cette formule qu'on utilise pour calculer l'inverse d'un complexe (Technique dite de la multiplication par la quantité conjuguée).

**Proposition 33**

Soient $z$ et $z'$ deux complexes. On a :

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$
3. $|\mathrm{Re}\,(z)| = |z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
4. $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.
5. $|\mathrm{Im}\,(z)| = |z| \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
6. $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$

On a aussi l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \text{et} \quad |z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } z \neq 0 \text{ et } \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+^\star$$

## ➤ *Exercice :*

*Soit $z$ un complexe de module 1. Calculer $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Attention, cela ne donne pas $1+2z+z^2+1-2z+z^2$. Il est vrai que $(z_1+z_2)^2$ est $z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$ mais ce n'est pas le cas pour $|z_1+z_2|^2$. Développons en utilisant la définition tout simplement :

$$\begin{aligned}
|1+z|^2+|1-z|^2 &= (1+z)\times\left(\overline{1+z}\right)+(1-z)\times\left(\overline{1-z}\right)\\
&= (1+z)\times(1+\bar{z})+(1-z)\times(1-\bar{z})\\
\\
&= 1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1+z\bar{z}-z-\bar{z}\\
&= 1+1+2|z|^2\\
&= 4
\end{aligned}$$

### Interprétation géométrique

On munit désormais le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. La bijection $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto x+iy \end{cases}$ permet d'identifier $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$.

**Définition 34**

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $M$ le point de coordonnées $(x,y)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On pose $z = x + iy$.

- On dit que $M$ est l'image de $z$ et que $z$ est l'affixe de $M$.
- On note : $M(z)$ ou $\mathrm{Aff}\,(M) = z$.
- L'affixe du vecteur $x\vec{u}+y\vec{v}$ est le complexe $x+iy$. On a donc $\mathrm{Aff}\,(x\vec{u}+y\vec{v}) = x+iy$.

**Interprétation :**
Prenons $z$ et $z'$ deux complexes. On introduit les points $M(z)$, $N(z')$, $S(z+z')$ et $D(z'-z)$.

- Interprétation de l'addition.
  $MNOS$ est un parallélogramme.
- Interprétation du conjugué.
  $C(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des réels.
- Interprétation du module.
  Comme $||\overrightarrow{NM}|| = |z-z'|$, l'ensemble $\{w \in \mathbb{C}$ tel que : $|w-z| = r\}$ avec $r$ un réel positif est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $M(z)$ et de rayon $r$.
- Interprétation du produit d'un complexe par un réel.
  Soit $k$ un réel. Le point $B(kz)$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$.
- Interprétation de l'inégalité triangulaire.
  L'inégalité triangulaire vue avec les complexes signifie géométriquement que : $||\overrightarrow{OS}|| \leqslant ||\overrightarrow{OM}|| + ||\overrightarrow{MS}||$ et $||\overrightarrow{OS}|| = ||\overrightarrow{OM}|| + ||\overrightarrow{MS}||$ si et seulement si $M$ est un point du segment $[OS]$.

### 1.2.2 Écriture trigonométrique des complexes

**Complexes de module 1**

**Définition 35**

- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble suivant :
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}.$$
- $\mathbb{U}$ est donc l'ensemble des complexes de module 1, cela correspond géométriquement au cercle trigonométrique.
- Les éléments de $\mathbb{U}$ sont appelés des complexes unitaires.

✌ **Exemple :**

1. Voici quelques éléments de $\mathbb{U}$ (il suffit de calculer leur module pour montrer que ce sont des complexes unitaires) :

   - $1$
   - $-1$
   - $i$
   - $-i$
   - $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$
   - $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Voici quelques complexes non unitaires (il suffit de calculer leur module pour montrer que ce ne sont pas des complexes unitaires) :

   - $0$
   - $5$
   - $2i$
   - $\sqrt{3} + i$

**Proposition 36**

$\mathbb{U}$ est un sous-groupe multiplicatif (Vocabulaire hors-programme) de $\mathbb{C}^\star$, cela veut dire que $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^\star$ et que, pour tout $(z, z') \in \mathbb{U}^2$, on a :

$$z \times z' \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad z^{-1} \in \mathbb{U}.$$

☞ **Mise en garde :**

Si $z$ et $z'$ sont deux éléments de $\mathbb{U}$, on n'est pas sûr que cela soit le cas pour $z + z'$. Par exemple, $1 + i$ n'appartient pas à $\mathbb{U}$ et pourtant $1$ et $i$ sont deux éléments de $\mathbb{U}$.

**Théorème 37**

Il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, appelée exponentielle complexe et notée $\theta \mapsto e^{i\theta}$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
2. Cette fonction est dérivable
3. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\exists\ \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ (Surjectivité sur $\mathbb{U}$ de l'exponentielle)
4. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi)$ (Injectivité sur les intervalles semi-ouverts de longueur $2\pi$ et $2\pi$ périodicité)
5. Pour tout $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) \geqslant 0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) \geqslant 0$ (Orientation du cercle)

**Proposition 38**

La fonction exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :

1. $e^{i0} = 1$
2. $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
3. $\forall\ n \in \mathbb{Z}, \forall\ \theta \in \mathbb{R}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

☞ **Mise en garde :**

L'égalité $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ n'a pas de sens en général si $n$ n'est pas un entier.

**Définition 39**

Soit $\theta$ un réel. On pose :

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\theta\right)\right) \text{ et } \sin(\theta) = \mathrm{Im}\left(\exp\left(i\theta\right)\right).$$

Si $\cos(\theta) \neq 0$, on pose $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

**Proposition 40**

On appelle $\pi$ l'unique élément de $[0, 4]$ tel que $e^{i\pi} = -1$. On peut alors calculer facilement quelques valeurs particulières :

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{i\theta}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ | $i$ | $-1$ |

☛ **Remarque :**

On en déduit :

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\tan(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | non défini | $0$ |

**Proposition 41**

**Formules d'Euler**
Pour tout réel $\theta$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

➤ ***Exercice :***

*Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos(x))^k}$ *avec* $n$ *un entier naturel et* $x$ *un élément de* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

..........................................................................................

Posons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{(\cos(x))^k}$. $A$ est bien définie car, pour tout $x$ de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $(\cos(x))^k$ est non nul. On a :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Im}\ (\exp(ikx))}{(\cos(x))^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Im}\ \left((\exp(ix))^k\right)}{(\cos(x))^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\ \left(\frac{(\exp(ix))^k}{(\cos(x))^k}\right) \quad \text{car } \forall k \in [\![0, n]\!], \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^k \text{ est un réel.}
\end{aligned}$$

On reconnaît une progression géométrique dont la raison, $\frac{\exp(ix)}{\cos(x)}$, n'est pas 1 puisque $\sin(x)$ est non nul et $\frac{\exp(ix)}{\cos(x)}$ est $1 + i\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On peut donc expliciter cette somme et obtenir :

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{Im}\ \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\exp(ix)}{\cos(x)}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Im}\ \left(\frac{1-\left(\frac{\exp(ix)}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1-\frac{\exp(ix)}{\cos(x)}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\ \left(\frac{(\cos(x))^{n+1} - \exp(i(n+1)x)}{(\cos(x))^{n+1} - (\cos(x))^n \times (\cos(x) + i\sin(x))}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \mathrm{Im}\ \left(\frac{(\cos(x))^{n+1} - \cos((n+1)x) - i\sin((n+1)x)}{-i(\cos(x))^n \times \sin(x)}\right) \\
&= \mathrm{Im}\ \left(i \times \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) + \mathrm{Im}\ \left(\frac{-i\cos((n+1)x)}{\sin(x)\times(\cos(x))^n}\right) + \mathrm{Im}\ \left(\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\times(\cos(x))^n}\right) \\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos((n+1)(x))}{\sin(x)\times(\cos(x))^n}.
\end{aligned}$$

### Argument

**Proposition 42**

Soit $z$ un complexe non nul.

- Il existe $r$ un réel strictement positif et $\theta$ un réel tel que $z$ est $r\exp(i\theta)$. C'est l'écriture trigonométrique de $z$ ou l'écriture sous forme exponentielle de $z$.
- Cette écriture n'est pas unique mais, si $r$ et $r'$ sont deux réels positifs et $\theta$ et $\theta'$ deux réels, on a :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi$$

- **Méthode:**

Le $r$ de la précédente proposition sera toujours le module de $z$. Ainsi, si on souhaite obtenir la forme trigonométrique d'un complexe $z$, il suffit de factoriser par $|z|$, on obtient alors deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$z = |z| \times (a + ib).$$

Il faut réussir (ce qui n'est pas forcément évident !) à reconnaître un réel $\theta$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

✌ **Exemple :**

1. Une forme trigonométrique de $-5$ est $5\exp(i\pi)$.
2. Une forme trigonométrique de $1+i$ est $\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Une forme trigonométrique de $5-5i$ est $5\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Une forme trigonométrique de $1+\sqrt{3}i$ est $2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$.

## ➤ *Exercice* :

*Soit $\theta$ un réel. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :*

$$z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(1 - i\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = (1+i) \times (\sin(\theta) + i\cos(\theta)).$$

On essaye de reconnaître des valeurs particulières de cos et sin :

$$\begin{aligned} z_1 &= \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \times \exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

On procède de même pour $z_2$ :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times i(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \times \exp(-i\theta) \\ &= \sqrt{2}\exp\left(i\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right) \end{aligned}$$

Vous avez probablement remarqué qu'on n'a pas développé les produits mais chercher les formes trigonométriques petit bloc par petit bloc.

**Proposition 43**

Soient $a$ et $b$ deux réels. On a :

- $\exp(ia) + \exp(ib) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\frac{a+b}{2}\right)$.
- $\exp(ia) - \exp(ib) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\frac{a+b}{2}\right)$.

On parle de factorisation par l'angle moitié. En particulier, on a :

$$\exp(ia) + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right) \text{ et } \exp(ia) - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right)$$

## ➤ *Exercice* :

*Mettre sous forme trigonométrique le complexe* $\dfrac{\exp(ia)+1}{1-\exp(ia)}$ *avec* $a$ *un élément de* $]0, \pi[$.

On note que $1 - \exp(ia)$ n'est pas nul puisque $a$ n'est pas un multiple de $2\pi$. On met $\exp\left(i\frac{a}{2}\right)$ en facteur au numérateur comme au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(ia)+1}{1-\exp(ia)} &= \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)+\exp\left(-i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(-i\frac{a}{2}\right)-\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \times \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\
&= i\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\
&= \frac{i}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \text{ car } \tan\left(\frac{a}{2}\right) \text{ existe et est non nul car } a \in ]0, \pi[
\end{aligned}$$

**Définition 44**

Soit $z$ un complexe non nul. Si $\theta$, un réel, vérifie $z = |z|e^{i\theta}$ alors on dit que $\theta$ est un argument de $z$ et on le note $\operatorname{Arg}(z)$. L'argument de $z$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal de $z$.

☛ **Remarque :**

On peut interpréter géométriquement la notion d'argument. Si $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormé du plan, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plans avec $z_1$ et $z_2$ deux complexes, $\theta_1$ un argument de $M_1$ et $\theta_2$ un argument de $M_2$ alors on a :

$$\overrightarrow{OM_1} = |z_1|\overrightarrow{u_{\theta_1}}$$

en notant $\overrightarrow{u_{\theta_1}}$ le vecteur $\cos(\theta_1)\overrightarrow{u} + \sin(\theta_1)\overrightarrow{v}$. $(|z_1|, \theta_1)$ est donc un couple de coordonnées polaires de $M_1$. On a aussi :

$$\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\right) = \theta_2 - \theta_1.$$

**Définition 45**

Soient $a$, $b$ deux réels et $c$ un réel strictement positif. On dit que $a$ est égal à $b$ modulo $c$, ce qu'on note $a \equiv b\ [c]$, s'il existe $k$ un entier tel que $a = b + kc$.

✌ **Exemple :**

On a par exemple :

- $30 \equiv 16\ [7]$
- $231 \equiv 123\ [2]$
- $0 \equiv 1\ [1]$
- $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{13\pi}{3}\ [2\pi]$
- $-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4}\ [2\pi]$
- $\frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

**Proposition 46**

Soient $(\theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2') \in \mathbb{R}^4$, soit $n$ un entier naturel non nul, on a :

- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \equiv \theta_1' + \theta_2'[2\pi]$
- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \equiv \theta_1' - \theta_2'[2\pi]$
- $n\theta_1 \equiv n\theta_1'[2\pi] \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_1' \left[\frac{2\pi}{n}\right]$

**Proposition 47**

Pour tout $(z, z') \in (\mathbb{C}^\star)^2$, on a :

1. $\text{Arg}\,(z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^\star$
2. $\text{Arg}\,(z) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^\star$
3. $\text{Arg}\,(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^\star$
4. $\text{Arg}\,(z) \equiv -\text{Arg}\,(\bar{z})[2\pi]$
5. $\text{Arg}\,(zz') \equiv (\text{Arg}\,(z) + \text{Arg}\,(z'))\,[2\pi]$
6. $\text{Arg}\,\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\text{Arg}\,(z) - \text{Arg}\,(z'))\,[2\pi]$
7. $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \text{Arg}\,(z) \equiv \text{Arg}\,(z')[2\pi]$

Ne pas hésiter un faire un petit dessin pour illustrer la précédente proposition !

### ➤ *Exercice :*

*On pose* $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. *Déduire du calcul de* $u^2$ *et de* $u^4$ *la valeur de* $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Commençons par la partie "partie algébrique" de l'exercice. On obtient :

$$\begin{aligned} u^2 &= 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2} - 2i \times \sqrt{4 - 2} \\ &= -2\sqrt{2}(1 + i) \end{aligned}$$

puis, sans problème, on obtient $u^4 = -16i$ soit $u^4 = 16\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$ Maintenant, on écrit $u$ sous la forme $r\exp(i\theta)$ avec $r$ réel strictement positif et $\theta$ réel. On a alors :

$$u^4 = r^4\exp(4i\theta)\,.$$

Comme $u^4 = 16\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$, on peut donc affirmer que :

$$r^4\exp(4i\theta) = 16\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$$

ce qui donne $r^4 = 16$ et $4\theta \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ puis $r = 2$ et $\theta \equiv \frac{3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ A ce stade, on sait que $u$ appartient à l'ensemble suivant :

$$\left\{2\exp\left(i\frac{3\pi}{8}\right), 2\exp\left(i\frac{7\pi}{8}\right), 2\exp\left(i\frac{11\pi}{8}\right), 2\exp\left(i\frac{15\pi}{8}\right)\right\}$$

Placez-les sur le cercle trigonométrique, vous verrez que le seul ayant, comme $u$, une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est $2\exp\left(i\frac{15\pi}{8}\right)$ donc :

$$2\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) + 2i\sin\left(\frac{15\pi}{8}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ce qui donne en particulier $\sin\left(\frac{15\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)$ et donc :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ &= -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{8}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{15\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

ce qui entraîne donc que $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

**Proposition 48**

Soient $\rho$ et $\rho'$ sont deux nombre strictement positifs, $\theta$ et $\theta'$ deux réels et $n$ un entier, alors on a :

- $\rho e^{i\theta} \times \rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i\theta+\theta'}$
- $\left(\rho e^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$
- $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$
- $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

■ **Méthode:**

1. Quand un complexe est un produit, en particulier une puissance ou un quotient, de complexes, il est plus simple, comme le montre la précédente proposition, de le manipuler sous forme trigonométrique. Si on souhaite après obtenir sa forme algébrique, il suffit de noter que, si $r$ est un réel strictement positif et $\theta$ un réel alors $r\exp(i\theta)$ a pour partie réelle $r\cos(\theta)$ et pour partie imaginaire $r\sin(\theta)$.
2. Quand un complexe est une somme de complexes, il est plus simple de le manipuler sous forme algébrique. Si on souhaite après obtenir sa forme trigonométrique, on utilise la méthode vue après la définition de la forme trigonométrique d'un complexe.

### ➤ *Exercice* :

*Calculer* $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Développer ne serait pas très intelligent. C'est un quotient, utilisons plutôt la forme trigonométrique. De $1-i=\sqrt{2}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$ et $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 &= \left(\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right)\right)^4\\ &= 1\end{aligned}$$

**Exponentielle complexe**

**Définition 49**

On étend la fonction exponentielle à l'ensemble des complexes par la fonction suivante définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\exp : z \mapsto \exp\left(\mathrm{Re}\left(z\right)\right) \times \exp\left(i\mathrm{Im}\left(z\right)\right)$$

✌ **Exemple :**

On a par exemple $\exp(2-3i) = e^2 \times \exp(-3i)$. Par contre, dans le programme de BCPST1, les fonctions ln, cos, sin ne sont pas étendues sur $\mathbb{C}$. Ecrire $\cos(2+i)$, $\ln(i)$ ou $\sin(2+3i)$ seraient fâcheux !

**Proposition 50**

Soient $z$ et $z'$ deux complexes. $\exp(z+z')$ est $\exp(z)\times\exp(z')$.

### 1.2.3 Résolutions d'équations algébriques

**Second degré**

Dans cette partie, $a$ sera un réel non nul, $b$ et $c$ deux réels. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z$ complexe. On utilise pour cela les deux propositions suivantes :

**Proposition 51**

Soit $\Delta$ un réel. On pose : $\delta = \begin{cases} \sqrt{\Delta} & \text{si } \Delta \geqslant 0 \\ i\sqrt{-\Delta} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$. $\delta^2$ est alors $\Delta$.

☛ **Remarque :**

Pour trouver un complexe $\delta$ tel que $\delta^2 = z$ avec $z$ connu et non nul, le plus simple est d'écrire $z$ sous forme trigonométrique puis de poser $\delta = \sqrt{|z|} \exp\left(i\dfrac{\text{Arg}\,(z)}{2}\right)$.

**Proposition 52**

Soit $\delta$ un complexe tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Pour tout complexe $z$, on a :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

➤ ***Exercice :***

*Soit $u$ un élément de $]0, \pi[$. Trouver les solutions de l'équation $(E)$ et donner leur forme trigonométrique avec $(E)$ l' équation suivante d'inconnue le nombre complexe $z$ :*

$$z^2 + 2(1 - \cos(u))z + 2(1 - \cos(u)) = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le discriminant $\Delta$ de cette équation est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(1-\cos(u))^2 - 8(1-\cos(u)) \\ &= 4(1-\cos(u)) \times (1-\cos(u)-2) \\ &= -4(1-\cos^2(u)) \\ &= -4\sin^2(u). \end{aligned}$$

$\Delta$ est strictement négatif donc les solutions de $(E)$ sont :

$$\frac{2(\cos(u)-1)\pm i\sqrt{\Delta}}{2}$$

ce qu'on peut donc écrire $(\cos(u)-1)\pm i\sin(u)$. Appelons les $r_1$ et $r_2$, on a donc en utilisant les techniques de l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
r_1 &= -1+\exp(iu)\\
&= \exp\left(i\frac{u}{2}\right)\times\left(-\exp\left(-i\frac{u}{2}\right)+\exp\left(i\frac{u}{2}\right)\right)\\
&= \exp\left(i\frac{u}{2}\right)\times 2i\sin\left(\frac{u}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\times\exp\left(i\frac{u+\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

De même, on prouve que $r_2$ est $2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\times\exp\left(-i\frac{u+\pi}{2}\right)$.

**Proposition 53**

Soit $P$ le polynôme $x\mapsto x^2+bx+c$.

- Les racines $z_1$ et $z_2$ de $P$ vérifient : $\begin{cases} z_1+z_2 &= -b\\ z_1\times z_2 &= c\end{cases}$.
- Si $z_1$ et $z_2$ sont deux complexes tels que : $\begin{cases} z_1+z_2 &= -b\\ z_1\times z_2 &= c\end{cases}$ alors $z_1$ et $z_2$ sont les racines de $P$.

☛ **Remarque :**

En BCPST, on n'a pas de théorie pour résoudre l'équation suivante :

$$az^2+bz+c=0$$

d'inconnue $z$ complexe avec $a$ un complexe non nul et $b$ et $c$ deux complexes. On sait le faire uniquement dans le cas où les coefficients sont réels (on parle des coefficients, i.e. de $a$, $b$ et $c$ dans notre exemple... et pas des solutions !). Pour résoudre une telle équation (degré 2 à coefficients complexes), on va suivre ces deux étapes :

1. On se débarrasse du coefficient de $z$ en utilisant la forme canonique :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

2. On cherche alors $\delta$ un complexe tel que $\delta^2=b^2-4ac$. Le plus simple est d'écrire $b^2-4ac$ sous la forme $\rho\exp(i\theta)$ avec $\rho$ et $\theta$ deux réels et $\rho\geqslant 0$ (i.e. de trouver la forme trigonométrique

de $b^2-4ac$). On peut prendre $\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right)$ pour $\delta$ et ça marche ! On reprend :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\\
&\iff \left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\times\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)=0\\
&\iff z=\frac{-b-\delta}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b+\delta}{2a}
\end{aligned}$$

### ➤ *Exercice :*

*Résoudre l'équation $z^2-2iz+\sqrt{3}\times i=0$ d'inconnue $z$ complexe.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On a $\delta^2=\sqrt{3}\times i+1$ avec $\delta=\sqrt{2}\times\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$ car $\sqrt{3}\times i+1$ est $2\times\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$. Pour tout complexe $z$, on a alors :

$$\begin{aligned}
z^2-2iz+\sqrt{3}\times i=0 &\iff (z-i)^2=-(\sqrt{3}\times i-i^2)\\
&\iff (z-i)^2=-\delta^2 \text{car } \delta \text{ est } \sqrt{2}\times\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right).\\
&\iff (z-i)^2-(i\delta)^2=0\\
&\iff (z-i-i\delta)\times(z-i+i\delta)=0\\
&\iff z=i+i\delta \quad\text{ou}\quad z=i-i\delta
\end{aligned}$$

ce qui donne $-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ comme solutions.

### Racines $n^{\text{ième}}$ (Un peu hors-programme)

$n$ désigne dans cette partie un entier naturel non nul.

**Définition 54**

On appelle racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité l'ensemble des complexes $z$ vérifiant $z^n=1$.

**Proposition 55**

L'ensemble $S_n$ des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité est :

$$S_n=\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \text{ avec } k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}.$$

Cet ensemble a exactement $n$ éléments distincts.

✌ **EXEMPLE :**

$S_1 = \{1\}, S_2 = \{1, -1\}, S_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$ (en notant $j = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$), $S_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Ne pas hésiter à visualiser sur le cercle trigonométrique ces différents ensembles, on se rend compte qu'il suffit de découper de manière régulière ce cercle.

■ **Méthode:**

Pour résoudre l'équation, d'inconnue $z$ complexe, $z^n = a$ avec $a$ un complexe non nul, on utilise les racines $n^{ième}$ de l'unité :

- Si on connaît une solution $z_0$ non nulle de cette équation, on écrit alors :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \text{ car } z_0 \neq 0 \\ &\iff \frac{z}{z_0} \in S_n \\ &\iff \exists\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ tel que } \frac{z}{z_0} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \\ &\iff \exists\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ tel que } z = z_0 \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

- Sinon, on écrit $a$ sous forme trigonométrique et, en appelant $r_a$ son module et $\theta_a$ son argument, il suffit de poser $z_0 = \sqrt[n]{r_a} \exp\left(i\frac{\theta_a}{n}\right)$. $z_0$ est une solution non nulle de cette équation, on peut donc se ramener au cas précédent.

## ➤ *Exercice :*

*Calculer* $(1+i)^6$ *et en déduire la résolution de l'équation* $z^6 = -8i$ *d'inconnue* $z$ *complexe. Résoudre aussi l'équation* $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ *d'inconnue* $z$ *complexe.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

1. On va utiliser la forme trigonométrique. $1+i$ est $\sqrt{2}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} (1+i)^6 &= 2^3 \exp\left(6i\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -8i \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la méthode qu'on vient de voir, on a :

$$\begin{aligned} z^6 = -8i &\iff z^6 = (1+i)^6 \\ &\iff \left(\frac{z}{1+i}\right)^6 = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0; 5]\!] / \frac{z}{1+i} = \exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \\ &\iff \exists k \in [\![0; 5]\!] / z = (1+i) \times \exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

2. On a $(z-1)^6+(z+1)^6=0 \Leftrightarrow (z+1)^6=-(z-1)^6$. 1 n'est pas solution de l'équation (car $2^6 \neq 0$) donc on peut supposer $z \neq 1$, il vient, en appelant $P_z$ la propriété "$z$ est solution de l'équation", les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P_z &\Longleftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -1\\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right)^6\\
&\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0;5]\!] \text{ tel que } \left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\\
&\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0;5]\!] \text{ tel que } (z+1)\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right) = (z-1)\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right)\\
&\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0;5]\!] \text{ tel que } z = \frac{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right)+\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)}{\exp\left(i\frac{k\pi}{3}\right)-\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)}
\end{aligned}$$

Il suffit après de faire prendre à $k$ les entiers de $0$ à $5$. L'ensemble des solutions de cette équation est après calcul :

$$\left\{(-\sqrt{3}-2)i, -i, (\sqrt{3}-2)i, (-\sqrt{3}+2)i, i, (\sqrt{3}+2)i\right\}.$$

Remarquez que les solutions sont deux à deux conjuguées, ce qui était attendu car le polynôme $(X-1)^6+(X+1)^6$ est à coefficients réels (☞ Chapitre sur les polynômes).

# Partie 2

# Les suites à valeurs réelles

## 2.1 Premières notions sur les suites

### 2.1.1 Définitions

☛ **Remarque :**

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quand on écrit une phrase mathématiques avec $\mathbb{K}$, on donne simultanément deux phrases : celle dans laquelle on va remplacer partout $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ et celle dans laquelle on va remplacer partout $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

**Définition 56**

- On appelle suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute application $u$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$ :

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{K} \\ n & \mapsto u(n) \end{cases}.$$

- On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Pour simplifier, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la place de $u$ et $u_n$ à la place de $u(n)$. L'élément $u_n$ s'appelle alors le $n^{\text{ième}}$ terme général de la suite et $u_0$ est le premier terme de cette suite.

☛ **Remarque :**

Complétons la définition précédente :

1. Soit $p$ un entier. La notation $(u_n)_{n\geqslant p}$ signifie que cette suite n'est définie qu' à partir du rang $p$, son premier terme est alors $u_p$.
2. Soit $E$ une partie de $\mathbb{N}$. La notation $(u_n)_{n\in E}$ signifie que cette suite n'est définie que pour les éléments de $E$.

☞ **Mise en garde :**

Il ne faut pas confondre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite, avec $u_n$ qui est un réel. On ne dira pas par exemple que $u_n$ est croissante ni que $u_n$ admet une limite. De la même façon, on fera la différence entre une fonction $f$ et le réel $f(x)$.

✌ **Exemple :**

Voici quelques exemples de suite :

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{3n+\pi}{n^2+1}$ et $u_{2n+1} = \sqrt{n}$. Cette suite est définie **de façon explicite**.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1, v_1 = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$. Cette suite est définie **par une formule de récurrence** .
3. Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif $w_n$ tel que $-1 + nw_n + w_n^2 + n^2 w_n^3 = 0$. Cette suite est définie **de façon implicite**.

**Définition 57**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout couple d'entiers naturels $(n, m)$ tels que $n \leqslant m$, on a : $U_n \leqslant U_m$ (resp. $U_n \geqslant U_m$).
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout couple d'entiers naturels $(n, m)$ tels que $n < m$, on a : $U_n < U_m$ (resp. $U_n > U_m$).
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** si elle est croissante ou bien décroissante.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **constante** si, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_n = U_0$. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **périodique** s'il existe un entier strictement positif $p$ tel que l' on ait $U_{n+p} = U_n$ pour tout entier naturel $n$. On dit alors que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de période $p$.

☛ **Remarque :**

On définit sans difficulté aussi la notion de périodicité à partir d'un certain rang, de monotonie à partir d'un certain rang...

✌ **Exemple :**

- Quelques suites constantes : $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\pi)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ln(10))_{n\in\mathbb{N}}$...
- Les suites 1-périodique sont des suites constantes.
- Soit $q$ un réel. La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - constante lorsque $q = 1$.

- stationnaire lorsque $q = 0$. (On rappelle que $0^n$ vaut $0$ pour tout entier naturel $n$ non nul et que $0^0$ vaut $1$.)
- 2-périodique lorsque $q = -1$.
- strictement croissante si $q > 1$.
- strictement décroissante si $q \in ]0; 1[$.

- Les suites constantes sont les seules suites à la fois croissantes et décroissantes.
- La somme de deux suites de même monotonie a la même monotonie que ces deux suites.
- Le produit de deux suites croissantes positives est une suite croissante.
- Le produit d'une suite monotone par un nombre réel positif ou nul est une suite monotone de même monotonie.
- Le produit d'une suite monotone par un nombre réel négatif ou nul est une suite de monotonie contraire.

**Proposition 58**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. décroissante) si et seulement si, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_n \leqslant U_{n+1}$ (resp. $U_n \geqslant U_{n+1}$).
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite strictement croissante (resp. dite strictement décroissante) si et seulement si, pour tout entier naturel $n$, on a : $U_n < U_{n+1}$ (resp. $U_n > U_{n+1}$).

☛ **Remarque :**

La précédente proposition est bien une proposition, elle se prouve par récurrence.

☞ **Mise en garde :**

Ne pas confondre les suites et les fonctions à variables réelles. Il existe des fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel $x$, on ait $f(x) \leqslant f(x+1)$ et $f$ n'est pas croissante. C'est le cas par exemple de $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$

■ **Méthode:**

Pour étudier l'éventuelle monotonie d'une suite de réels $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :
- Déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **strictement positive ou strictement négative**, comparer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et $1$. Cette méthode n'est pas terrible car on peut se faire avoir par l'histoire de signe et il n'existe pas de suite dont on ne puisse établir la monotonie avec la première méthode et pas la seconde.
- Essayer la récurrence. C'est particulièrement adapté si la suite est elle même définie par récurrence.
- Écrire $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si cela est possible, sous la forme $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Si on connaît les variations de $f$, on aura alors celle de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est intéressant en particulier si on peut dériver $f$.

### ➤ *Exercice :*

*Vertudieu la monotonie de la suite* $\left(-\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *puis celle de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel* $n$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

.............................................................................................

1. On appelle $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\left(-\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\begin{aligned}V_{n+1} - V_n &= -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\\ &= \frac{-1+n+1}{(n+1)!}\\ &= \frac{n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

   Pour tout entier naturel $n$,on a donc $V_{n+1} - V_n > 0$. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement croissante. On espère que vous ne vous êtes pas fait avoir par la terrible méthode du quotient ! Il est vrai que, pour tout entier naturel $n$, on a : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} < 1$. Notre suite étant de plus strictement négative, cela entraîne qu'elle est strictement croissante.

2. Pour tout entier naturel $n$, on appelle $P(n)$ la proposition suivante :

$$"0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1".$$

   On calcule $\sin(1)$ ce qui nous permet d'affirmer que $P(0)$ est vraie. $1$ est compris entre $0$ et $\dfrac{\pi}{2}$, par croissance de sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a donc :

$$\sin(0) \leqslant \sin(1) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

   ce qui donne $0 \leqslant \sin(1) \leqslant 1$ et permet d'affirmer que $P(0)$ est vraie.
   On suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n$. On a donc, d'après $P(n)$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ d'où :

$$\sin(0) \leqslant \sin(u_{n+1}) \leqslant \sin(u_n) \leqslant \sin(1)$$

   par croissance de sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc en particulier sur $[0, 1]$. On a donc $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sin(1)$. Il suffit d'ajouter que $\sin(1) \leqslant 1$ pour prouver que $P(n+1)$ est alors vraie.
   Bref, par récurrence, on a prouvé que, pour tout entier naturel $n$, on a bien : $u_{n+1} \leqslant u_n$. Cela signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

**Définition 59**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée s' il existe un réel $M$ tel que, pour tout entier naturel $n$, on ait $U_n \leqslant M$. On note alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \leqslant M$ et on dit que $M$ est un majorant de la suite.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée s' il existe un réel $m$ tel que, pour tout entier naturel $n$, on ait $U_n \geqslant m$. Si c'est le cas, on note alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \geqslant m$ et on dit que $m$ est un minorant de la suite.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois minorée et majorée.

☛ **Remarque :**

- Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang $n_0$, $n_0$ entier naturel, c'est-à-dire s'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que, pour tout entier $n$ supérieur à $n_0$, on ait : $m \leqslant u_n \leqslant M$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement bornée. En effet, si on pose :

$$m' = \min\left(\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}, m\}\right) \quad \text{et} \quad M' = \min\left(\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}, M\}\right)$$

  alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.
- On peut bien sûr faire une remarque similaire pour le concept de majoration ou de minoration à partir d'un rang $n_0$, $n_0$ entier naturel.

☞ **Mise en garde :**

1. Le majorant et le minorant n'existent pas toujours. En cas d'existence, il y a une infinité de majorants et de minorants.
2. Dans la définition précédente, majorant comme minorant ne doivent pas dépendre de $n$.

**Proposition 60**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe un réel positif $M$ tel que pour tout entier naturel $n$, on ait $|U_n| \leqslant M$.

✌ **Exemple :**

- $\left(\dfrac{5}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est minorée (par exemple par $0$). Elle est aussi majorée (par $5$ par exemple).
- $(10+n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée mais est minorée (par exemple par $10$).
- $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par exemple par $1$).
- Les suites périodiques sont bornée (en effet, elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs).

### 2.1.2 Opérations sur les suites

Dans toute cette partie, $E$ et $F$ sont deux parties de $\mathbb{N}$ et $(U_n)_{n\in E}$ et $(V_n)_{n\in F}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle $U$ la suite $(U_n)_{n\in E}$ et $V$ la suite $(V_n)_{n\in F}$.

**Définition 61**

- On dit que la suite $U$ est égale à la suite $V$ (ce que l'on note $U = V$ ou $(U_n)_{n\in E} = (V_n)_{n\in F}$) si $E = F$ et si, pour tout $n$ dans $E$, on a : $U_n = V_n$.
- On dit que $U$ est inférieure à $V$ (ce que l'on note $U \leqslant V$ ou $(U_n)_{n\in E} \leqslant (V_n)_{n\in E}$) si, pour tout $n$ dans $E$, on a : $U_n \leqslant V_n$.
- On dit que $U$ est supérieure à $V$ (ce que l'on note $U \geqslant V$ ou $(U_n)_{n\in E} \geqslant (V_n)_{n\in E}$) si, pour tout $n$ dans $E$, on a : $U_n \geqslant V_n$.

**Définition 62**

Soit $\lambda$ un scalaire.

- On note $\lambda U$ ou $\lambda(U_n)_{n\in E}$ la suite $(\lambda U_n)_{n\in E}$.
- On note $U + V$ ou $(U_n)_{n\in E} + (V_n)_{n\in E}$ la suite $(U_n + V_n)_{n\in E}$.
- On note $U \times V$ ou $(U_n)_{n\in E} \times (V_n)_{n\in E}$ la suite $(U_n V_n)_{n\in E}$.
- Si $V$ ne s'annule pas sur une partie $F$ de $E$ alors on note $\dfrac{U}{V}$ ou $\dfrac{(U_n)_{n\in F}}{(V_n)_{n\in F}}$ la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)_{n\in F}$.

☞ **Mise en garde :**

- Avec ces définition, les propriétés classiques des opérations, celles que l'on connaît sur $\mathbb{R}$, se transposent aux suites. A noter tout de même que le produit de suites peut être la suite nulle sans que l'une des deux suites soit elle-même la suite nulle. Il suffit de multiplier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0 \ \text{ et } \ , \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 0 \text{ et } v_n = 1.$$

  pour s'en convaincre.
- Si on nous dit que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cela ne signifie pas pour autant que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela entraîne que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 0$ ou $v_n = w_n$. Ce n'est pas du tout la même chose (dans le premier cas, on dit que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 0$ ou pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = w_n$ et dans le deuxième cas, on dit que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 0$ ou $v_n = w_n$).

## 2.2 Suites classiques

### 2.2.1 Suites arithmétiques

**Définition 63**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, est dite arithmétique s'il existe un réel $r$, appelé raison de la suite, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r.$$

☞ **Mise en garde :**

Dans la définition, précédente, $r$ ne doit pas dépendre de $n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (n+1)$ n'est pas une suite arithmétique de raison $n+1$. Ce n'est pas une suite arithmétique puisque puisque $u_2 - u_1 = 3$ et $u_1 - u_0 = 2$ et donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

✌ **Exemple :**

La suite $(3n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 3.

**Proposition 64**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique à valeurs dans $\mathbb{K}$ de raison $r \in \mathbb{K}$.

- Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$U_n = U_0 + nr \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} U_k = (n+1)U_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r.$$

- Pour tout élément $(n, m)$ de $\mathbb{N}^2$, on a : $U_n = U_m + (n-m) \times r$.
- Pour tout élément $(n, m)$ de $\mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} U_k = \frac{(U_n + U_m) \times (n-m+1)}{2}.$$

■ **Méthode:**

Pour prouver qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique , on peut :

1. Évaluer la quantité $u_{n+1} - u_n$ et prouver qu'elle est constante (c'est alors la raison de cette suite arithmétique).
2. Tenter d'écrire notre suite sous la forme $(a + bn)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a$ et $b$ des constantes ($b$ est alors la raison de cette suite arithmétique).

### 2.2.2 Suites géométriques

**Définition 65**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, est dite géométrique s'il existe un réel $q$, appelé raison de la suite, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = qU_n$$

☞ **Mise en garde :**

Dans la définition, précédente, $q$ ne doit pas dépendre de $n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times (n+1)$ n'est pas une suite géométrique de raison $n+1$. Ce n'est pas une suite géométrique puisque $u_3 = 2 \times u_2$ et $u_2 = 1 \times u_1$ et $2 \neq 1$.

■ **Méthode:**

Pour trouver la raison d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :

1. Si on sait que cette suite ne s'annule jamais, évaluer la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver qu'elle est constante (c'est alors la raison de cette suite géométrique).
2. Sinon, le plus simple de jouer avec les propriétés des fonctions puissances afin d'écrire notre suite sous la forme $(a \times b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a$ et $b$ des constantes ($b$ est alors la raison de cette suite géométrique).

➤ ***Exercice :***

*Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n} \times 5 \quad \textit{et} \quad v_n = 3^n \times 2^{-n}$$

*sont géométriques.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Sans problème $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison 9 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ puisque, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(3^2\right)^n \times 5 \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

**Proposition 66**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ géométrique de raison $q$ avec $q$ un complexe différent de $1$.

- Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n = q^n \times u_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right).$$

- Pour tout élément $(n, m)$ de $\mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$, on a :

$$u_n = q^{n-m} \times u_m \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \left(\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}\right).$$

☞ **Mise en garde :**

Ne pas oublier de vérifier que la raison ne vaut pas $1$ avant d'appliquer ces formules. Si la raison vaut $1$, la suite est tout simplement stationnaire, on obtient alors par exemple que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\times u_0$.

➤ ***Exercice*** **:**

*Expliciter* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite géométrique vérifiant* $v_2 = \dfrac{1}{4}$ *et* $v_5 = \dfrac{1}{108}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On cherche d'abord la raison $q$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De $v_5 = q^3 \times v_2$, on en déduit que $q = \dfrac{1}{3}$. $v_2 = \dfrac{1}{4}$ et $v_2 = \dfrac{v_0}{9}$ donnent alors $v_0 = \dfrac{9}{4}$. On vient donc de prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\left(\dfrac{9}{4\times 3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

### 2.2.3 Suites arithmético-géométriques

**Définition 67**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $a$ et $b$ deux scalaires tels que :

$$a \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b.$$

☞ **Mise en garde :**

Dans la définition, précédente, $a$ et $b$ ne doivent pas dépendre de $n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times (n+1) + 5$ n'est pas une suite arithmético-géométrique.

**Proposition 68**

Soient $a$, $b$ et $c$ trois scalaires tels que $a \neq 1$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $U_0 = c$ et , $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = aU_n + b$. On prouve que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$U_n = \alpha + a^n \times (c - \alpha)$$

avec $\alpha$ le réel tel que $\alpha = a\alpha + b$. Pour obtenir ce résultat, il suffit de prouver que $(U_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $a$.

■ **Méthode:**

Pour expliciter une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad , \forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = au_n + b$$

avec $a$, $b$ et $c$ connus, on va suivre les étapes suivantes (et pas apprendre la formule de la proposition précédente par cœur) :

1. **Étape 1 :** On détermine le réel $\alpha$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. **Étape 2 :** On écrit que : $\forall n \in \mathbb{N},\; \alpha = a\alpha + b$ et $u_{n+1} = au_n + b$ et on fait une soustraction :
$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - \alpha) = a(u_n - \alpha)$$
ce qui prouve que $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $a$.
3. **Étape 3 :** On explicite alors $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui est facile puisque c'est une suite géométrique) puis on revient à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

➤ ***Exercice :***

*Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Mais s'il a fumé un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{4}$. Pour tout entier naturel $n$, on note $p_n$ la probabilité qu'il fume le $n$-ième jour. Soit $n$ un entier naturel, prouver que $p_{n+1} = -\frac{p_n}{4} + \frac{1}{2}$ (impossible sans le chapitre "Espace probabilisé fini") puis exprimer $p_n$ en fonction de $n$ et de $p_1$.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Soit $n$ un entier naturel, notons $F_n$ l'événement : "le fumeur fume le n-ième jour". $(F_n, \overline{F_n})$ formant un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) \\ &= -\frac{p_n}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le réel $x$ tel que $x = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ est $\frac{2}{5}$. On a :

$$p_{n+1} = -\frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

ce qui donne $p_{n+1} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{1}{4} \times \left(p_n - \dfrac{2}{5}\right)$ et montre que $\left(p_n - \dfrac{2}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$. Pour tout entier naturel non nul $n$, on a donc :

$$p_n - \frac{2}{5} = \frac{p_1 - \frac{2}{5}}{(-4)^{n-1}}$$

ce qui donne $p_n = \dfrac{5p_1 - 2}{5 \times (-4)^{n-1}} + \dfrac{2}{5}$.

### 2.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 69**

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux scalaires $a$ et $b$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n.$$

- L'équation, d'inconnue $x$ complexe, $x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique de cette suite.

☞ **Mise en garde :**

Dans la définition, précédente, $a$ et $b$ ne doivent pas dépendre de $n$.

☛ **Remarque :**

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont entièrement déterminées par leurs deux premiers termes.

**Proposition 70**

Prenons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la définition précédente. Trois cas se présentent :

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1$ et $r_2$ alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
$$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
2. Si l'équation caractéristique admet admet une racine double $r_0$ alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
$$U_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$
3. Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1$ et $r_2$, elles seront de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r$ et $\theta$ deux réels et il existera :
   - deux **complexes** $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
   $$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - deux **réels** $A$ et $B$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
   $$U_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\, r^n.$$

■ **Méthode:**

Pour expliciter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$
avec $a$ et $b$ connus, on va suivre les étapes suivantes :

- **Étape 1 : Résolution de l'équation caractéristique.**
on commence par résoudre l'équation $(E)$ (dite caractéristique) $x^2 = a \times x + b$ d'inconnue $x$ complexe.
- **Étape 2 : On trouve la bonne forme.**
  1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
  $$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
  2. Si l'équation caractéristique admet admet une racine double $r_0$ alors il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
  $$U_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$
  3. Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1$ et $r_2$, elles seront de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r$ et $\theta$ deux réels. On peut expliciter de deux façons différentes notre suite (les deux sont vraies).
     - Il existe deux complexes $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :
     $$U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Il existe deux réels $A$ et $B$ tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :

$$U_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\, r^n.$$

- **Étape 3 : On explicite les constantes.**
Pour expliciter complètement notre suite récurrente linéaire d'ordre 2, il reste à déterminer les constantes notées $\lambda$ et $\mu$ (ou $A$ et $B$) de la précédente étape. Pour cela, on utilise deux termes connus de la suite (souvent les deux premiers) ce qui donne un sytème à deux équations dont le couple $(\lambda, \mu)$ (ou $(A, B)$) est la solution.

## ➤ *Exercice* :

*Expliciter la suite de Fibonacci qui est la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

..........................................................................................

Cette suite est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est l'équation suivante : $x^2 = x + 1$ d'inconnue $x$ complexe.
Un coup de discriminant vous montre que cette équation possède deux solutions réelles qui sont $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Nous sommes dans le premier cas de la méthode, il existe donc $\lambda$ et $\mu$ réels tels que, pour tout entier naturel $n$, on ait :

$$u_n = \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (✎)$$

Il nous faut maintenant déterminer les mystérieux $\lambda$ et $\mu$. C'est là que l'on va utiliser les deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ qui nous sont donnés. Nous avons d'après ✎ : $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donc :

$$\lambda = 1 - \mu \ \text{ et } \ 1 = (1-\mu)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ce qui donne $\mu \times \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - 1$ puis, après quelques simplifications, les résultats suivantes : $\lambda = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\mu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. On a donc prouvé que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

## 2.3 Limite d'une suite réelle

### 2.3.1 Notion de limite

**Définition 71**

Soient $L$ un réel et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $L$ comme limite, ce que l'on note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n)=L$, si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon>0, \exists\, n_0 \text{ tel que },\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow |U_n-L|<\varepsilon.$$

- On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite réelle finie. Sinon, elle est dite divergente.

☛ **Remarque :**

- Cette définition, vous ne l'utiliserez jamais dans un exercice (c'est écrit explicitement dans le programme) mais il faut tout de même la connaître afin de démontrer tous les résultats de ce chapitre !
- La limite d'une suite ne dépend jamais de $n$. Écrire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n)=n^2$ est absurde !
- Une suite peut diverger parce qu'elle n'admet pas de limite ou parce que sa limite est infinie. Quatre natures (i.e. quatre comportements en l'infini) sont possibles pour une suite :
  1. Converger vers une limite finie.
  2. Tendre vers $+\infty$.
  3. Tendre vers $-\infty$
  4. Ne pas admettre de limite.

**Proposition 72**

Soient $L$ un réel et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle admettant $L$ comme limite. On a alors :

1. $L$ est la seule limite que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet. On parle d'unicité de la limite.
2. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Pour tout entier $p$, $(U_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $L$.
4. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(|U_n|)$ existe et vaut $|L|$.

☞ **Mise en garde :**

Les réciproques de la deuxième et de la quatrième partie de cette proposition ne sont pas vraies. La suite$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit d'ailleurs un contre-exemple :

- Une suite peut être bornée et ne pas converger.

- Si une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L$ alors il se peut que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et, si jamais $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il n'est pas sûr que cela soit vers $L$, les deux limites potentielles de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors $L$ et $-L$.

**Proposition 73**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout réel $L$, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = L \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}(|U_n - L|) = 0.$$

☛ **Remarque :**

En particulier, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on a l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}(|U_n|) = 0.$$

Si on a envie de prouver qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$ et que le signe de cette suite nous gêne, on peut s'intéresser à la suite $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Définition 74**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = +\infty$ et on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n > A$.
- On note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = -\infty$ et on dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si : $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n < B$.
- On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers l'infini si $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

### 2.3.2 Opérations sur les limites

Dans la prochaine proposition, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront deux suites réelles, $L_1$,$L_2$ et $\lambda$ trois réels et F.I. utilisée dans ces tableaux veut dire forme indéterminée.

**Proposition 75**

**Limite d'une somme**

| $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)$ | $L_2$ | $L_1+L_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I. |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $-\infty$ |

**Limite du produit par un scalaire**

| $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda U_n)$ | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ | | |
|---|---|---|---|
| | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda>0$ | $\lambda L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda=0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| si $\lambda<0$ | $\lambda L_1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Limite du produit**

| $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_nV_n)$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $L_1>0$ | $L_1=0$ | $L_1<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)$ | $L_2>0$ | | | | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $L_2=0$ | | $L_1L_2$ | | F.I. | F.I. |
| | $L_2<0$ | | | | $-\infty$ | $+\infty$ |
| | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I. | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Limite de l'inverse**

| | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L\neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ | $\dfrac{1}{L}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | F.I |

☞ **Mise en garde :**

Attention à deux erreurs classiques lorsque l'on utilise ces tableaux :

1. F.I veut dire forme indéterminée. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas. Cela signifie qu'on ne peut affirmer par opérations ce que vaudra le résultat. Il est possible que la limite existe et soit finie, il est possible que la limite n'existe pas, il est possible que l'on obtienne l'infini.
2. Dans les tableaux précédents, il y a des hypothèses et des conclusions. La case par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=L_1+L_2$ doit se lire : si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $L_2$ alors $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $L_1+L_2$. Il faut faire attention car il est possible que

$(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sans que ni $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge. Par exemple la suite $((-1)^n - (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas !

☛ **Remarque :**

1. Les quatre formes indéterminées peuvent donc se résumer par :
$$"\infty - \infty" \text{ , } "0 \times \infty", "\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}"$$
2. Puisque $a^b$ est, sous réserve d'existence, $\exp(b\ln(a))$ et que "$0 \times \infty$" est une forme indéterminée, on en déduit que "$1^\infty$", "$0^0$" et "$\infty^0$" sont aussi trois formes indéterminées.
3. Pour obtenir la limite d'un quotient, il faut se servir de la proposition sur la limite de l'inverse et celle sur la limite du produit.

### 2.3.3 Limite et ordre

**Information apportée par la limite**

**Proposition 76**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l$ non nul. On peut alors affirmer que, au-delà d'un certain rang, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et garde le signe de $l$.

✌ **Exemple :**

Ainsi, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-5$, on peut affirmer que, au-delà d'un certain rang (qui n'est pas forcément facile à expliciter), $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative.

♣) **Corollaire 77 :**
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l$. Si on sait qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $a < l < b$ , alors il existe un entier naturel $n_0$ tel qu'on ait :
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow a < U_n < b.$$

**Passage à la limite dans les inégalités**

**Proposition 78**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, c'est-à-dire telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant 0$, et convergente. On peut alors affirmer que :
$$\lim_{n\to+\infty} (U_n) \geqslant 0.$$

☛ **Remarque :**

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, c'est-à-dire telle que $U_n > 0$ pour tout entier naturel $n$, et convergente, alors on n'a pas forcément $\lim_{n\to+\infty}(U_n) > 0$. On peut juste affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} U_n \geqslant 0$. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un bon contre-exemple. On peut bien sûr faire la même remarque avec une suite strictement négative.

**Proposition 79**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout entier naturel $n$, on ait $U_n \geqslant V_n$ alors on peut affirmer que :

1. si $\lim_{n\to+\infty}(U_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}(V_n)$ existent et sont finies, on a :
$$\lim_{n\to+\infty}(U_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty}(V_n).$$
2. si $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}(V_n) = -\infty$.
3. si $\lim_{n\to+\infty}(V_n) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = +\infty$.

☛ **Remarque :**

1. Si deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et que, pour tout entier naturel $n$, $U_n > V_n$ alors on peut juste affirmer que : $\lim_{n\to+\infty}(U_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty}(V_n)$, on n'a pas forcément $\lim_{n\to+\infty}(U_n) > \lim_{n\to+\infty}(V_n)$. On peut prendre les suites $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme contre-exemple.

2. On utilise souvent la première partie de cette proposition en prenant pour suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une constante ou en prenant pour suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une constante.
Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et que $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant U_n \leqslant b$ (avec $a$ et $b$ deux réels) alors $a \leqslant \lim_{n\to+\infty}(U_n) \leqslant b$.
De nouveau, si on sait en plus que $\forall n \in \mathbb{N}, a < U_n < b$ alors on ne peut pas dire qu' a priori $a < \lim_{n\to+\infty}(U_n) < b$ soit vrai.

3. Prenons les notations de la proposition, dire que $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = +\infty$ n'entraîne rien sur une éventuelle convergence de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut prendre les suites $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme contre-exemple.

➤ ***Exercice :***

*Déterminer, si elle existe, la limite de* $\left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $n$ un entier naturel non nul et soit $k$ un élément de $[\![n;2n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} &\geqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+(2n)^2}}\\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Par somme, on obtient donc que : $\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{5}}$. Comme $\left(\frac{n}{\sqrt{5}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, on peut conclure que $\left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ par passage à la limite dans les inégalités.

### 2.3.4 Limite par encadrement

**Théorème 80**

**Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)**
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.
Si pour tout entier naturel $n$, on a :

$$U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$$

et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n)$ existent, sont finies et égales alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers cette limite.

☞ **Mise en garde :**

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles telles que, pour tout entier naturel $n$, on ait : $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(W_n)$ existent et valent $+\infty$ alors on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)$ existe et vaut aussi $+\infty$. Par contre, ce n'est pas une conséquence du théorème des gendarmes (on a des limites finies dans ce théorème) mais du passage à la limite dans les inégalités et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sert à rien dans cette démonstration !
2. On reprend les notations de la précédente proposition. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite, on ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes. On ne peut pas affirmer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

☛ **Remarque :**

Une remarque plus générale. On reprend les notations de la précédente proposition. S'il existe un entier naturel $n_0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$ et si $\lim_{n\to+\infty}(U_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}(W_n)$ existent, sont finies et égales alors on peut affirmer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers cette limite. Les théorèmes sur les limites nécessitent que les hypothèses soient valables non pas pour tout entier naturel mais simplement à partir d'un certain rang.

**Proposition 81**

**Corollaires du théorème des gendarmes**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $L$ un réel.

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $0$.
2. Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et si , $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|U_n - L| \leqslant |V_n|$, on peut alors affirmer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $L$.

☛ **Remarque :**

Utiliser le théorème des gendarmes ou ses corollaires est très classique lorsque la suite fait intervenir :

1. Une notion de partie entière, du cosinus, du sinus. Ce sont des fonctions qu'on a souvent l'habitude d'encadrer.
2. Une somme de $n$ termes. Il est alors classique de minorer chacun des termes de la somme par le plus petit d'entre eux et majorer ces mêmes termes par le plus grand d'entre eux.

## ➤ *Exercice :*

*Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel non nul $n$ par :* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ *converge et déterminer sa limite.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On va tout d'abord essayer d'encadrer le terme général de la suite. Comme ce terme général est constitué d'une somme de termes, on va encadrer chacun de ces termes puis sommer. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

soit $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ existent et valent $1$ (résultats obtenus avec des équivalents). D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ existe et vaut $1$.

### 2.3.5 Convergence de suites classiques

#### Convergence des suites arithmétiques et géométriques réelles

**Proposition 82**

Soit $a$ un réel. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $a$. On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ U_0 & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers l'infini si $a < -1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \in ]-1,1[ \end{cases}$

#### Convergence des suites monotones

**Théorème 83**

**Théorème de la limite monotone**
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels monotone.

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors :
   - Si elle est de plus majorée, elle converge et sa limite est la borne supérieure de l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.
   - Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors :
   - Si elle est de plus minorée, elle converge et sa limite est la borne inférieure de l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.
   - Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

☛ **Remarque :**

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et majorée alors non seulement elle converge mais on sait aussi la valeur de sa limite, c'est la borne supérieure de l'ensemble $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et majorée, on a, pour tout entier naturel $n$, l'inégalité :

$$U_0 \leqslant U_n \leqslant L$$

   en notant $L$ la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On peut faire la même remarque dans le cas décroissant et minoré, $L$ est alors la borne inférieure de $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on a $U_0 \geqslant U_n \geqslant L$ pour tout entier naturel $n$.

### ➤ *Exercice* :

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $u_0 = 1$ *et :*

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on pose : } u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

*Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie, puis, après avoir trouvé une relation entre* $u_{n+1}$ *et* $u_n$, *étudier l'éventuelle limite de cette suite.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On commence par démontrer par récurrence que notre suite est bien définie. Pour cela, on introduit pour tout entier naturel $n$, l'hypothèse $P(n)$ suivante : "$u_n$ existe et est positif".
$P(0)$ vraie est une évidence.
Soit $n$ un entier naturel. Supposons $P(k)$ vraie pour tout $k$ de $[\![0, n]\!]$. D'après ces hypothèses, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est positif. Ainsi, $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$ existe et est positif, $P(n+1)$ est donc vraie.
Par principe de récurrence, on a donc prouvé que notre suite est bien définie.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $L$. On sait que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$ ce qui s'écrit :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2}.$$

Cela donne, par passage à la limite, l'égalité suivante : $L = \sqrt{L + L^2}$ ce qui entraîne que $L$ est nul.
On vient donc de prouver que, si jamais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement nulle.
Mais, pour tout entier naturel $n$, grâce à la quantité conjuguée, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n + u_n^2} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n + u_n^2} - u_n\right) \times \left(\sqrt{u_n + u_n^2} + u_n\right)}{\sqrt{u_n + u_n^2} + u_n} \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n + u_n^2}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + u_n^2} + u_n} \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{u_n + u_n^2} + u_n}. \end{aligned}$$

Ce quotient est positif. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et donc, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geqslant u_0$. Par passage à la limite, on obtient donc que : $L \geqslant u_0$ soit $0 \geqslant 1$ ce qui est absurde ! $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante ne convergeant pas vers un réel. Elle tend donc vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

On va maintenant étudier des suites monotones particulières, les suites adjacentes. Commençons par la définition, nous verrons après leur théorème.

**Définition 84**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Elles sont dites adjacentes (resp. adjacentes à partir du rang $n_0$ avec $n_0$ un entier naturel) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. croissante à partir du rang $n_0$),
2. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. décroissante à partir du rang $n_0$),
3. $(U_n - V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut 0.

**Proposition 85**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes (resp. adjacentes à partir du rang $n_0$). On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Elles vérifient les propriétés suivantes :

1. Elles sont convergentes.
2. Elles ont même limite. Notons $L$ cette limite.
3. Pour tout entier naturel (resp. supérieur à $n_0$) $n$ , on a :

$$U_n \leqslant L \leqslant V_n.$$

▪ **Méthode:**

On souhaite prouver que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On commence par prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (ou l'inverse bien sûr !). Et là, on s'intéresse à $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Deux possibilités classiques :

1. On arrive à prouver que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$. On peut alors affirmer, en invoquant le théorème des suites adjacentes, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Au passage,leurs limites sont confondues.
2. On n'arrive pas à prouver que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0$ mais on on parvient à démontrer que c'est une suite positive. Ce n'est pas encore ce qu'on veut mais cela entraîne la convergence des deux suites : En effet, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$v_n \leqslant v_0 \quad \text{et} \quad u_n \leqslant v_n \quad ✦$$

puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par $v_0$ (et pas par $v_n$, on ne majore pas par une quantité dépendant de $n$ ! ! ! ! !), elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On procède de même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour prouver que ces suites sont adjacentes, il reste à démontrer qu'elles convergent vers la même limite. La relation ✦ nous donne, par passage à la limite, l'inégalité suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n.$$

On voudrait l'égalité. Cela peut se faire en passant à la limite dans les relations définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'obtenir des relations entre $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n)$. Cela suffit la plupart du temps !

### ➤ *Exercice :*

*Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_0 = 1$ *et* $v_0 = 2$ *et :*

$$\text{Pour tout entier naturel } n\text{, on a : } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n}.$$

*Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite.*

.................................................................................................

- On commence d'abord par montrer par récurrence que ces deux suites sont bien définies. On prouve donc, par récurrence, la propriété $P(n)$ suivante :

  $$"u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont positifs"}.$$

  $P(0)$ est vraie et si $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n$ alors, par somme, $u_{n+1}$ est positif et, $u_n \times v_n$ étant positif, $v_{n+1}$ est non seulement défini et est positif. Raisonnement simple mais il faut tout de même le faire pour démontrer que ces suites existent.
- Après, on a, pour tout entier naturel $n$, les égalités suivantes :

  $$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n \times v_n}}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

  Ainsi, pour tout entier naturel non nul $n$, on a : $u_n \geqslant v_n$ ($\ast$).
- D'autre part, pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

  $$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \sqrt{v_n} \times (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$$

  ce qui implique, en utilisant $\ast$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite croissante.
- Pour tout entier naturelnon nul $n$, d'après $\ast$ et par croissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on a :

  $$v_n \geqslant v_1 \quad \text{et} \quad u_n \geqslant v_n$$

  ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est minorée (par $\min(v_1, v_0)$). Comme elle est décroissante, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On procède de même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
- On note $L_u$ et $L_v$ leur limite respective. Par unicité de la limite, la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ (valable pour tout entier naturel non nul $n$) donne :

  $$L_u = \frac{L_u + L_v}{2}$$

  ce qui donne bien la relation souhaitée, à savoir $L_u = L_v$. Ces suites sont donc bien adjacentes.

## 2.4 Relations de comparaisons

### 2.4.1 Définitions

**Définition 86**

**Notations de Landau.**
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ existe et vaut $0$. On note alors $U_n \underset{+\infty}{=} o\left(V_n\right)$.
- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ existe et vaut $1$. On note alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

**Exemple :**

On a par exemple :

1. $1+n+n^3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$
2. $\dfrac{1+n+n^3}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n$
3. $\sqrt{n^4+1} \underset{+\infty}{\sim} n^2$

Pour prouver ceci, il suffit de calculer des limites. Ainsi, pour prouver le premier équivalent donné, il suffit juste de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+n+n^3}{n^3}\right)$ existe et vaut $1$ ce qui se fait très bien (Factorisez par $n^3$ au numérateur et au dénominateur).

### 2.4.2 Comparaisons et Opérations

Les équivalents ne marchent pas avec toutes les opérations. On ne possède pas de théorèmes généraux ni sur les sommes d'équivalents, ni sur le passage des équivalents au logarithme ni sur le passage des équivalents à l'exponentielle. Parfois, ça marche, d'autres fois, non... Disons que ce n'est pas automatique. Il y a quelques résultats toutefois sur le passage des équivalents au logarithme ou à l'exponentielle mais ils ne sont pas au programme des bcpst.

**Exemple :**

1. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=n^3+n$ et $V_n=-n^3+n^2$ alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} n^3$ et $V_n \underset{+\infty}{\sim} -n^3$ mais $U_n+V_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$.
2. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=n^2+n$ et $V_n=n^2$ alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ mais $(\exp(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\exp(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes.
3. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par : $\forall n\in\mathbb{N}^\star, U_n=n+n^2$ et $V_n=n^2$ alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ mais $(\ln(U_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\ln(V_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne sont pas équivalentes.

4. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles équivalentes. On n'a pas forcément $U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} V_n$. Un contre-exemple est fourni par $(\exp(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposition 87**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Soient $\lambda$ un réel non nul et $p$ un entier naturel.

- Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ et $Z_n \underset{+\infty}{\sim} W_n$, on a alors :
  1. $V_n \underset{+\infty}{\sim} U_n$
  2. $\lambda U_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda V_n$
  3. $U_n Z_n \underset{+\infty}{\sim} V_n W_n$
  4. $(U_n)^p \underset{+\infty}{\sim} (V_n)^p$
  5. $|U_n| \underset{+\infty}{\sim} |V_n|$
  6. $\dfrac{U_n}{Z_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{V_n}{W_n}$
- Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ et si, pour tout entier naturel $n$, on a $U_n > 0$ et $V_n > 0$ alors : $(U_n)^\lambda \underset{+\infty}{\sim} (V_n)^\lambda$.
- Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ et $V_n \underset{+\infty}{\sim} W_n$ alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} W_n$.

✌ **EXEMPLE :**

$$\frac{\sqrt{n^2-4n}}{(2n^3+n-n^2)^8} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n^2}}{2^8 n^{24}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{256 n^{23}}$$

☞ **MISE EN GARDE :**

La proposition précédente $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n \Rightarrow (U_n)^p \underset{+\infty}{\sim} (V_n)^p$ (avec $p$ fixé) ne signifie absolument pas que $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n \Rightarrow (U_n)^n \underset{+\infty}{\sim} (V_n)^n$. Pour se rendre compte que cette dernière proposition est fausse, il suffit de poser $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En effet, avec les équivalents usuels que l'on va voir et en sachant que, pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right),$$

on se rend compte que $V_n \underset{+\infty}{\sim} U_n$ et que $V_n^n \underset{+\infty}{\sim} e \times U_n^n$.

On a tout de même un résultat mêlant équivalents et somme, c'est la prochaine proposition qui le fournit :

**Proposition 88**

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$ alors :

$$U_n + V_n \underset{+\infty}{\sim} V_n.$$

### 2.4.3 Comparaisons classiques

**Proposition 89**

Soit $p$ un entier naturel. Soient des réels $a_0, a_1, \cdots, a_p$. On suppose que $a_p$ est non nul. On a :

$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p$$

☛ **Remarque :**

Cette proposition découle de la précédente ! Faites un petit effort pour le prouver !

**Proposition 90**

Soient $\alpha$ un réel non nul et une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On a alors :

1. $\sin(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
2. $\tan(U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
3. $\ln(1+U_n) \underset{+\infty}{\sim} U_n$
4. $1 - \cos(U_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(U_n)^2}{2}$
5. $\exp(U_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} U_n$
6. $(1+U_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha U_n$

☛ **Remarque :**

$\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{1}{2n^2}$ est vrai mais n'a aucun intérêt car dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{2n^2}}\right)$ existe et vaut $1$ est une évidence (Ce n'est pas une forme indéterminée !). En revanche, $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$

signifie que $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}{-\dfrac{1}{2n^2}}\right)$ existe et vaut $1$ ce qu'on ne savait pas a priori puisque c'est une forme indéterminée de la forme $\dfrac{0}{0}$.

**Proposition 91**

Soient $\alpha$ et $\beta$ des réels strictement positifs. Soit $k$ un réel strictement supérieur à $1$. On a alors :

$$(\ln(n))^\beta = \underset{+\infty}{o}(n^\alpha),\ n^\alpha = \underset{+\infty}{o}(k^n) \quad \text{et} \quad k^n = \underset{+\infty}{o}(n!)$$

## ➤ *Exercice :*

*Montrer que :* $(4n^3+6n^2)^2 \times \ln\left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -8n^4$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$ entraîne que $\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ puis $\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \times n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par produit. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right) = 0$ d'où :

$$\begin{aligned} 1-\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)^2}{2} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)\right) = 0$ ce qui prouve que :

$$\begin{aligned} \ln\left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)\right) &\underset{+\infty}{\sim} \ln\left(1+\left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)-1\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)n^2\right)-1 \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Par produit avec $\left(4n^3+6n^2\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} 16n^6$, on obtient la conclusion tant attendue!

### 2.4.4 Utilisations des équivalents

**Proposition 92**

Soient $L$ un réel et des suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'elles sont équivalentes et que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L$. On peut alors affirmer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et qu'elle converge vers $L$.

☛ **Remarque :**

1. Avec les notations de la proposition ci-dessus, on peut dire que la réciproque est vraie si $L$ est un réel non nul. La réciproque est fausse si $L$ est infini ou nul. Un contre-exemple est fourni par $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On voit avec cette précédente proposition que le principal intérêt des équivalents est de lever des formes indéterminées. A la place de chercher la limite d'une suite, on peut chercher la limite d'une suite équivalente plus simple.

**Proposition 93**

Soit $L$ un réel non nul. Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L$. On peut alors affirmer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} L.$$

☛ **Remarque :**

Ainsi, quand on sait déjà qu'une suite converge vers un réel non nul, on peut prendre (et c'est le plus simple) et le plus précis sa limite comme équivalent. Attention cependant, ne pas prendre la limite comme équivalent (car c'est faux tout simplement), si une suite tend vers $0$, $+\infty$ ou $-\infty$.

## ➤ *Exercice :*

*Trouver un équivalent de* $\left(\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

.......................................................................................................................

Facile ! Par composition, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right)=\ln(2)$. Cela entraîne, puisque $\ln(2)$ est non nul, que :

$$\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2).$$

**Proposition 94**

Soient des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'elles sont équivalentes. On peut alors affirmer qu'il existe un rang $n_0$ ($n_0$ entier naturel) tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ ont même signe.

☞ **Mise en garde :**

Un certain nombre de propriétés sont donc communes à deux suites équivalentes. Ce n'est pas le cas de la monotonie. Par exemple, $(n+2sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, la première n'est pas monotone, la seconde est croissante.

## ➤ *Exercice :*

*Déterminer la limite de* $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

.......................................................................................................................

On se rappelle tout d'abord que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

$\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers $0$, cela prouve que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc $n\times\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$ et donc, par continuité de l'exponentielle en $1$, la limite recherchée vaut $\exp(1)$ soit $e$.

## 2.5 Étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

☞ **Mise en garde :**

On pourra, avec ces méthodes, étudier par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 10).$$

Par contre, la fonction $f$ qui intervient ne doit pas dépendre de $n$ pour que l'on puisse appliquer les résultats que l'on va développer. Ainsi, si vous étudiez la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on pose : } u_{n+1} = n \times \exp\left(-u_n\right),$$

il vous faudra réfléchir un peu tout seul !

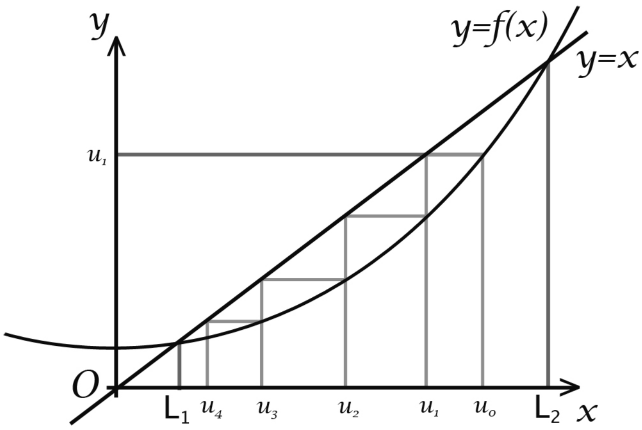
☛ **Remarque :**

A noter que cette partie est hors-programme. Le programme dit cependant qu'il faut mener en classe quelques études de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour faire plus simple et moins hypocrite, on préfère vous donner les résultats généraux : Vous serez amener à les utiliser dans le cas particulier de votre étude, il faudra alors les démontrer à chaque utilisation.

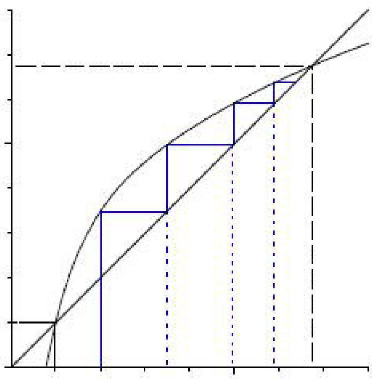
### 2.5.1 Aspect graphique

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la connaissance de $u_0$ et par, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour représenter graphiquement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trace la courbe d'équation $y = f(x)$ et la la courbe d'équation $y = x$.

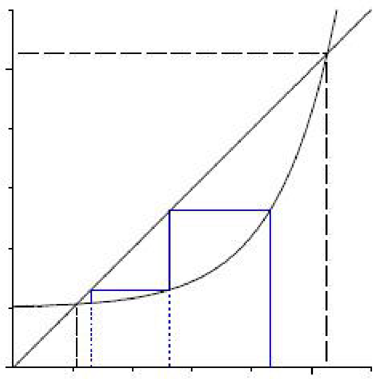
On procède alors ainsi : on place sur un graphique les courbes d'équation $y = x$ et $y = f(x)$. On part du point de coordonnées $(u_0, 0)$, on remonte sur la courbe de $f$ ce qui nous donne le point de coordonnées $(u_0, f(u_0))$ i.e $(u_0, u_1)$... On revient à $y = x$, on tombe sur le point de coordonnées $(u_1, u_1)$ et on retourne sur l'axe des abscisses où on va pouvoir placer $(u_1, 0)$ et recommencer le processus...



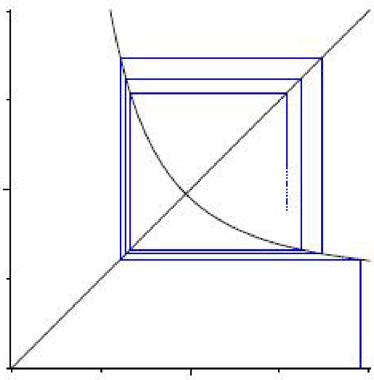

Les comportements classiques que l'on obtient sous les suivants (on justifiera après) :



Un escalier qui monte . . .



Un escalier qui descend . . .



Un escargot . . .

### 2.5.2 Existence

**Proposition 95**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la connaissance de $u_0$ et par, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $E$ est une partie de $\mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset E$ (i.e. si $x$ appartient à $E$ alors automatiquement, $f(x)$ appartient à $E$) et que $u_0$ appartient à $E$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $E$.

☛ **Remarque :**

1. Cette proposition n'est pas au programme, il faudra la démontrer dans le cas particulier de votre exercice. Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne pose pas de problème, on n'a pas besoin de le prouver. C'est le cas par exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(2u_n + 1).$$
Par contre, si $f$ n'est définie que sur une partie de $\mathbb{R}$, il faudra faire une démonstration, cela consistera à démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k$, la proposition $\mathcal{P}_k$ suivante :
$$\mathcal{P}_k : \text{"}u_k \text{ existe et appartient à } E\text{"}$$
est vraie. Par exemple, pour prouver la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$
On commence par prouver par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, il est vraie que $u_n$ existe et est strictement positif.
2. Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si $E$ est une partie de $\mathbb{R}$ tel que $f(E)$ soit incluse dans $E$ alors on dit que $E$ est une partie stable de $\mathbb{R}$ par $f$. Ce vocabulaire n'est pas au programme.

➤ ***Exercice :***

*On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = v_0 = 2$ et par, pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$ et $v_{n+1} = \ln(v_n + 2)$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles bien définies ?*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

- $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et puis, et puis c'est tout ! $u_2$ n'existant pas, on ne peut pas aller plus loin ! $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas définie ! Inutile de l'étudier, d'essayer de prouver une éventuelle convergence, cela n'aurait aucun sens !
- Pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on introduit pour tout entier naturel $n$ l'hypothèse $P(n)$ suivante : "$v_n$ existe et est supérieur à $1$".
$P(0)$ vraie est une évidence.
Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n$. D'après $P(n)$, $v_n$ existe et est supérieur à $1$. Ainsi, $v_n + 2$ est supérieure à $3$ et donc $\ln(v_n + 2)$ (i.e. $v_{n+1}$) existe et est supérieur à $1$ puisque $\ln(3)$ est supérieur à $1$. $P(n + 1)$ est donc vraie.
Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était bien définie.

Jusqu'à la fin du chapitre, on suppose que $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $E$ est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(E) \subset E$ et $a$ est un élément de $E$. On étudiera toujours la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et par, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Ainsi, d'après la précédente proposition, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Au passage, on sait que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $E$.

### 2.5.3 Limites

#### Notion de point fixe

**Définition 96**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $L$ un réel appartenant à l'ensemble de définition de $f$. On dit que $L$ est un point fixe de $f$ si $f(L) = L$.

✌ **Exemple :**

Soit $f : x \mapsto -x + x^2$. $0$ et $2$ sont les deux points fixes de $f$ car, pour tout réel $x$, on a :

$$-x + x^2 = x \iff x \in \{0, 2\}.$$

✘ **Lemme 97 :**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L$ et si $f$ est continue en $L$ alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $f(L)$.

Par unicité de la limite, comme $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient donc cette proposition :

**Proposition 98**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L$ et si $f$ est continue en $L$ alors $L$ est un point fixe de $f$, autrement dit $f(L)$ vaut $L$.

☛ **Remarque :**

Proposition à savoir démontrer. Imaginons $f$ continue sur $E$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L$, on en déduit que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(L)$. Comme la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L$ : Par unicité de la limite, on en déduit que $f(L)$ et $L$ sont confondus.

■ **Méthode:**

On utilise les notations de la précédente proposition.

1. Ainsi, en résolvant l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x$ élément de $E$, on obtient la liste des limites potentielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette dernière est constituée de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x$ élément de $E$ (et aussi des points de discontinuité de $f$ appartenant à $E$ si $f$ n'est pas continue sur tout $E$).
2. Si $f$ est continue sur $E$ et si l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x$ élément de $E$ n'admet pas de solution, on peut conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.
3. Si $f$ est continue sur $E$ et si l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x$ élément de $E$ admet des solutions, on ne peut pas conclure pour autant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Si $f$ admet plusieurs points fixes et si l'on veut restreindre la liste des limites potentielles, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie que, pour tout entier naturel $n$ (éventuellement supérieur à...), on ait $a \leqslant u_n \leqslant b$ (avec $a$ et $b$ deux réels) alors on va exploiter cet encadrement : $a \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant b$.

### Cas particulier : $f$ est croissante

**Proposition 99**

Si $f$ est croissante sur $E$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $u_1 \geqslant u_0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $u_1 \leqslant u_0$.

☛ **Remarque :**

- De nouveau, ces propositions ne faisant pas partie explicitement du programme, on les redémontre par récurrence. Pour tout entier naturel $k$, on note $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{Q}_k$ les propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_k : "u_{k+1} \geqslant u_k" \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_k : "u_{k+1} \leqslant u_k"$$

  Si $u_1 \geqslant u_0$, on démontrera par récurrence que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier naturel $k$. Si $u_1 \leqslant u_0$, on démontrera par récurrence que $\mathcal{Q}_k$ est vraie pour tout entier naturel $k$.
- Une fois la monotonie aquise, il sera classique d'utiliser le théorème de la limite monotone pour conclure... On essaiera par exemple de prouver que notre suite est minorée si elle est décroissante. On note en particulier que si $f$ est croissante sur $E$ et si $E$ est bornée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement.

☞ **Mise en garde :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Ce n'est pas parce que $f$ est croissante que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : elle est monotone mais pas forcément croissante, cela dépend du signe de $u_1 - u_0$.

➤ ***Exercice :***

*Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0$ est un élément de $[0,1]$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.*

.........................................................................................

Soit $f : x \mapsto x - x^2$. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Le signe de $f'$ nous donne ce magnifique tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $1/4$ | | | | |
| | | | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | | |
| Variation de $f$ | | | $0$ | | | | $0$ | | |
| | | $\nearrow$ | | | | | | $\searrow$ | |
| | $-\infty$ | | | | | | | | $-\infty$ |

On voit sur ce tableau (ou sur un graphique) que $u_1$ et le reste seront dans $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$. On peut profiter de la croissance de $f$ à partir du rang 1. On regarde le signe de $u_2 - u_1$ pour savoir ce qu'on va démontrer. Ici, $u_2 - u_1 \leqslant 0$, on va donc prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.
Pour tout entier naturel non nul $n$, soit l'hypothèse $P(n)$ suivante :

$$"0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}".$$

D'après le tableau de variations, on a bien $0 \leqslant u_2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $u_1 \leqslant \dfrac{1}{4}$. D'autre part, on a bien $u_2 - u_1 \leqslant 0$ car $u_2 - u_1 = -u_1^2$. $P(1)$ est donc effectivement vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul $n$. D'après $P(n)$, on sait que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc, par croissance de $f$ sur $\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{4}\right)$$

ce qui donne $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{16}$. $P(n+1)$ est donc vraie puisque $\dfrac{3}{16} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était décroissante et minorée. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $L$ sa limite. Par passage à la limite et continuité de $f$, de $u_{n+1} = f(u_n)$, on déduit la fameuse égalité $L = f(L)$ qui donne ici $L^2 = 0$ soit $L = 0$. On peut donc conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
On vous laisse démontrer (ce n'était pas demandé dans cet exemple) que si $u_0$ est strictement négatif ou strictement supérieur à 1 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

**Cas particulier : $f$ est décroissante**

☛ **Remarque :**

Si $f$ est décroissante, l'étude est plus délicate. On va étudier d'abord les deux suites des rangs pairs et impairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On note que $f \circ f$ est croissante si $f$ est décroissante, on en déduit la proposition suivante :

**Proposition 100**

Si $f$ est décroissante sur $E$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition.

1. La liste des limites potentielles de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée (si $f$ est continue) par la résolution de l'équation $(f\circ f)(x) = x$ d'inconnue $x \in E$.
2. Pour étudier la nature des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut utiliser toutes les astuces vues dans la partie " Cas particulier : $f$ croissante ".

Pour conclure pour l'éventuelle convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilise cette proposition (qui elle est au programme) :

**Proposition 101**

Soient $L$ un réel et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L$ si et seulement si $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $L$.

■ **Méthode:**

Pour étudier la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in E$ et par, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ une fonction continue et décroissante de $E$ dans $E$ ($E$ partie de $\mathbb{R}$) alors :

1. Si $f\circ f$ a un unique point fixe et que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on peut affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Si $f\circ f$ a plusieurs point fixe et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Si $f\circ f$ a plusieurs point fixe et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent mais pas vers la même limite alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
4. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

# Partie 3

# Étude de fonction

## 3.1 Généralités

### 3.1.1 Définitions

**Définition 102**

- Une fonction $f$ d'une variable réelle à valeurs réelles est définie par la donnée d'une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$, appelée ensemble de définition de $f$, et par un processus qui, à tout élément $x$ de $D_f$, associe un unique nombre que l'on note $f(x)$. On note alors :

$$f : \begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}.$$

- Pour tout $a$ de $D_f$, on dit que $f(a)$ est **l'**image de $a$ par $f$ et que $a$ est **un** antécédent de $f(a)$ par $f$.
- Munissons le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle courbe représentative (ou représentation graphique ou graphe) de $f$ l'ensemble $\{M(x, f(x)) \in \mathbb{P},\ x \in D_f\}$, on le note généralement $\Gamma_f$. On dit aussi que $\Gamma_f$ est la courbe d'équation $y = f(x)$.

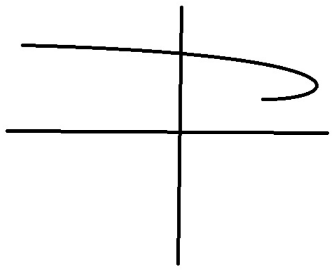
✌ **Exemple :**

1. $f_1 : \begin{cases} [-1, +\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ est une fonction, son ensemble de définition est $[-1, +\infty[$.
2. $g_1 : \begin{cases} [8563, +\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ est une fonction dont l'ensemble de définition est $[8563, +\infty[$.
   $g_1$ et $f_1$ ne sont pas les mêmes fonctions car elles n'ont pas le même ensemble de définition.
3. $f_2 : x \mapsto \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$ est une fonction. Son ensemble de définition n'étant pas explicite, celui-ci est par convention le plus grand ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel on puisse définir la fonction. Ici, c'est $\mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$.

4. $\mathrm{Id} : x \mapsto x$, la fonction identité, est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
5. $f_3 : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f_3(4) = 17$ donc $17$ est l'image de 4 par $f$ et 4 est un antécédent de $17$ par $f_3$. On remarque qu'il n'y a pas nécessairement unicité de la notion d'antécédent ($-4$ est aussi un antécédent de $17$ par $f_3$).

☛ **Remarque :**

1. $f_1 : \begin{cases} [-1, +\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ et $f_4 : \begin{cases} [-1, +\infty[ & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \sqrt{y+1} \end{cases}$ désignent la même fonction : on parle de variable muette ($x$ et $y$ sont des variables muettes, $f$ n'en dépend pas).
2. Ceci n'est pas la courbe représentative d'une fonction (car les éléments de l'espace de départ doivent avoir au maximum une image par une fonction) :



## ➤ *Exercice* :

*Déterminer l'ensemble de définition de la fonction* $f$ *suivante :*

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4}{-x^2+11x-30}\right) - \frac{x}{x^2-1} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+12x+250}$$

.................................................................................................

Soit $x$ un réel, on a :

$$f(x) \text{ est définie} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+11x-30 \neq 0 & \text{(Dénominateur)} \\ \dfrac{x^2-4}{-x^2+11x-30} > 0 & (\ln \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*) \\ x^2-1 \neq 0 & \text{(Dénominateur)} \\ x^2-1 \geqslant 0 & (\sqrt{\cdot} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+) \\ x^2+12x+250 \neq 0 & \text{(Dénominateur)} \end{cases}$$

Un petit coup de discriminant vous permet d'affirmer que les racines de $X^2 - 11X + 30$ sont 5 et 6 et que $X^2 + 12X + 250$ n'a pas de racine réelle. On fait un tableau de signes pour résumer la situation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $5$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | $+$ | | | $+$ | |
| Signe de $-x^2+11x-30$ | | $-$ | | | $-$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $\dfrac{x^2-4}{-x^2+11x-30}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | | $+$ | | | $-$ | |

.

On en déduit l'équivalence suivante :

$$-x^2+11x-30 \neq 0 \text{ et } \frac{x^2-4}{-x^2+11x-30} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2;2[ \cup ]5;6[.$$

D'autre part, pour tout réel $x$, $x^2+12x+250$ ne vaut pas $0$ et

$$\left[x^2-1 \geqslant 0 \text{ et } x^2-1 \neq 0\right] \Leftrightarrow x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[.$$

Ainsi, $f$ est définie sur : $(]-2;2[ \cup ]5;6[) \cap (]-\infty;-1[\cup ]1;+\infty[)$, c'est-à-dire sur l'ensemble $]-2;-1[\cup]1;2[\cup]5;6[$.

### 3.1.2 Opérations

**Définition 103**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$ deux parties de $\mathbb{R}$. On note $D = \{x \in D_f \text{ tel que } f(x) \in D_g\}$. Si $D$ n'est pas l'ensemble vide, on définit la fonction $g \circ f$ sur $D_f$ par :

$$\text{Pour tout } x \text{ de } D, \ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

☛ **Remarque :**

On rappelle rapidement les autres opérations : On prend $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$ deux parties de $\mathbb{R}$ et $\lambda$ un réel. On note $D$ l'ensemble $\{x \in D_f \cap D_g \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$ et $H$ l'ensemble $D_f \cap D_g$. On définit les fonctions suivantes :

$$\lambda f : \begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda f(x) \end{cases}, f \times g : \begin{cases} H & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \times g(x) \end{cases} \text{ et } f+g : \begin{cases} H & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$$

On définit aussi : $\dfrac{f}{g} : \begin{cases} D & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$. On note que l'on ne définit $\dfrac{f}{g}$ que si $D$ est non vide et on ne définit $f+g$ et $f \times g$ que si $D_f \cap D_g$ est non vide.

✌ **Exemple :**

On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x+2 \end{cases}$, $g : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2+1 \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2+1 \end{cases}$. D'après les définitions précédentes, on a :

1. $f+g : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2+x+3 \end{cases}$
2. $3f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 3x+6 \end{cases}$

3. $4f-2g:\begin{cases}\mathbb{R}_- & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto -2x^2+4x+6\end{cases}$

4. $f\times g:\begin{cases}\mathbb{R}_- & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^3+2x^2+x+2\end{cases}$

5. $h\circ f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^2+4x+5\end{cases}$

6. $g\circ f:\begin{cases}]-\infty,-2] & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^2+4x+5\end{cases}$

7. $f\circ h:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^2+3\end{cases}$

8. $f\circ g:\begin{cases}\mathbb{R}_- & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^2+3\end{cases}$

**Proposition 104**

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies respectivement sur $D_f$, $D_g$ et $D_h$ trois parties de $\mathbb{R}$. On suppose que $D_f$ et $D_g$ ne sont pas disjoints et que $D$ l'ensemble $\left\{x\in D_f\cap D_g \text{ tel que } (f(x),g(x))\in (D_h)^2\right\}$ n'est pas l'ensemble vide. On a alors :

$$(g+f)\circ h = g\circ h + f\circ h \quad \text{et} \quad (g\times f)\circ h = (g\circ h)\times(f\circ h)\,.$$

☞ **Mise en garde :**

Utilisons les notations de la proposition précédente. Si toutes les applications suivantes sont définies, en général, **on n'a pas :**

$$h\circ(g+f) = h\circ g + h\circ f \quad \text{et} \quad g\circ(f\times h) = (g\circ f)\times(g\circ h)\,.$$

### 3.1.3 Restriction de l'ensemble d'étude

**Définition 105**

Soient $f$ une fonction numérique définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$ et $T$ un réel strictement positif. On dit que $f$ est $T$-périodique si on a :

$$\text{Pour tout } x \text{ de } D_f, x+T \text{ appartient à } D_f \quad \text{et} \quad f(x+T)=f(x).$$

On dit alors que $T$ est une période de $f$.

**Proposition 106**

Soient $T$ un réel strictement positif et $f$ une fonction numérique définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$ et de période $T$. La courbe représentative $C_f$ de $f$ dans le plan $\mathbb{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est globalement invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$. Il suffit donc d'étudier $f$ sur n'importe quel intervalle de longueur $T$, comme $[0, T] \cap D_f$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap D_f$, puis de compléter par des translations appropriées

✌ **Exemple :**

1. Soit $\omega$ un réel strictement positif. $f_1 : x \mapsto \cos(\omega x)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique. On pourra étudier donc $f_1$ sur $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$.
2. tan est $\pi$ périodique. Il suffit donc d'étudier cette fonction sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

**Définition 107**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$.

- On dit que $f$ est paire si : Pour tout $x$ de $D_f$, $-x$ appartient à $D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- On dit que $f$ est impaire si : Pour tout $x$ de $D_f$, $-x$ appartient à $D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

☛ **Remarque :**

- Un partie $D$ de $\mathbb{R}$ vérifiant que, pour tout $x$ de $D$, $-x$ appartient à $D$ est dite centrée en zéro. C'est le cas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^\star$ et $[-10, -3] \cup [3, 10]$. Par contre, $[-10, 7]$, $\mathbb{R}^+$, $[-10, -3] \cup [2, 10]$ sont trois ensembles qui ne sont pas centrés en zéro.
- Si $f$ est impaire et si $f(0)$ existe alors, nécessairement, $f(0) = 0$.

✌ **Exemple :**

1. $\begin{cases} [-1, 2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ n'est ni une fonction paire ni une fonction impaire car son ensemble de définition n'est pas centré en zéro.
2. $\begin{cases} [-100, 100] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x + 1 \end{cases}$ n'est ni une fonction paire (car $f(10) \neq f(-10)$) ni une fonction impaire (car $f(2) \neq -f(-2)$) même si son ensemble de définition est centré en zéro.
3. $x \mapsto x^2, x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \left|x + \frac{1}{x}\right|$ sont trois fonctions paires.

4. $x \mapsto x^3, x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont trois fonctions impaires.

**Proposition 108**

On munit le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **orthogonal**. Soient $a$ et $b$ deux réels, $f$ une fonction numérique définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$ et $C_f$ sa courbe représentative.

- $C_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si on a : Pour tout $x$ de $D_f$, $2a - x$ appartient à $D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- $C_f$ admet le point $\Omega(a, b)$ comme centre de symétrie si et seulement si on a : Pour tout $x$ de $D_f$, $2a - x$ appartient à $D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition.

1. Si $C_f$ admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou le point $\Omega(a, b)$ comme centre de symétrie alors il suffira d'étudier cette fonction ou bien sur $[\, a, +\infty\, [\, \cap D_f$ ou bien sur $]-\infty, a\,] \cap D_f$ puis de compléter par symétrie.
2. En prenant les cas particuliers $a = 0$ ou $b = 0$, on déduit de cette proposition que, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal, alors $f$ est paire si et seulement si $C_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et $f$ est impaire si et seulement si $C_f$ admet l'origine comme centre de symétrie. Ainsi, si $f$ est paire ou impaire, alors on étudie cette fonction sur $\mathbb{R}^+ \cap D_f$ ou bien sur $\mathbb{R}^- \cap D_f$ puis on compléte par symétrie.

✌ **Exemple :**

On se place dans le plan $\mathbb{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

1. La courbe représentative de $f : x \mapsto (x+1)^2$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -1$. En effet, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, $2 \times (-1) - x$, i.e. $-2 - x$, est un réel et :
$$\begin{aligned} f(-2 - x) &= (-2 - x + 1)^2 \\ &= (-x - 1)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
D'après la proposition précédente, on peut alors affirmer que $C_f$ admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.
2. Dans le même esprit, on prouve que $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de $x \mapsto \tan(x - 1) + 2$.

Pour étudier ces deux fonctions, on se contentera donc d'une étude sur $[-1, +\infty[\cap D$ (avec $D$ leur ensemble de définition) puis on complétera par symétrie.

➤ ***Exercice :***

*Étudier la parité de la fonction* $f$ *suivante :* $f : x \mapsto \dfrac{\exp(\sin(x)) - 1}{\exp(\sin(x)) + 1}$.

Par quotient, $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est centré en $0$. D'autre part, pour tout réel $x$, en exploitant l'imparité de sin, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\exp(\sin(-x)) - 1}{\exp(\sin(-x)) + 1} \\ &= \frac{\exp(-\sin(x)) - 1}{\exp(-\sin(x)) + 1} \times \frac{\exp(\sin(x))}{\exp(\sin(x))} \\ &= \frac{\exp(0) - \exp(\sin(x))}{\exp(0) + \exp(\sin(x))} \\ &= \frac{1 - \exp(\sin(x))}{1 + \exp(\sin(x))} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $f$ est impaire.

### 3.1.4 Variation d'une fonction

**Définition**

**Définition 109**

Soit $f$ une fonctions définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$. Soit $D$ une partie de $D_f$. On dit que $f$ est :

- croissante sur $D$ si : Pour tout $(x, y)$ de $D^2$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- strictement croissante sur $D$ si : Pour tout $(x, y)$ de $D^2$, on a : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- décroissante sur $D$ si : Pour tout $(x, y)$ de $D^2$, on a : $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- strictement décroissante sur $D$ si : Pour tout $(x, y)$ de $D^2$, on a : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- strictement monotone sur $D$ si $f$ est strictement croissante sur $D$ ou bien si $f$ est strictement décroissante sur $D$.
- monotone sur $D$ si elle est croissante sur $D$ ou bien décroissante sur $D$.
- constante sur $D$ si, pour tout $(x, y)$ de $D^2$, on a : $f(x) = f(y)$.

☛ **REMARQUE :**

Soit $f$ une fonctions définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$.

- On dit que $f$ est croissante (sans préciser d'ensemble sur lequel cette propriété est vraie) si $f$ est croissante sur tout son ensemble de définition $D_f$.
- On définit sans problème la notion de fonction monotone (sans préciser d'ensemble sur lequel cette propriété est vraie), strictement croissante (sans préciser d'ensemble sur lequel cette propriété est vraie)...
- $f$ peut être ni croissante, ni décroissante.

✌ **Exemple :**

Soient $a, b$ et $c$ trois réels. On suppose $a$ négatif et $b$ positif.

1. cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
2. $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur $[\,5, 6\,[$.
5. $x \mapsto ax + c$ est décroissante.
6. $x \mapsto bx + c$ est croissante.
7. $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

☞ **Mise en garde :**

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ mais n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$ car $-1 < 10$ et $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{10}$.

**Proposition 110**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$, $\lambda_+$ un réel positif et $\lambda_-$ un réel négatif.

- Si $f$ et $g$ ont même monotonie sur $D$ alors la fonction $f + g$ a même monotonie que $f$.
- $f$ et $\lambda_+ f$ ont même sens de variation sur $D$.
- $f$ et $\lambda_- f$ ont des sens de variation contraires sur $D$.

Soient $h$ et $k$ deux fonctions définies respectivement sur $D_h$ et $D_k$ deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose que $h(D_h) \subset D_k$.

- Si $h$ et $k$ ont même monotonie (sur $D_h$ et $D_k$ respectivement) alors $k \circ h$ est croissante sur $D_h$.
- Si $h$ et $k$ sont de monotonie contraire (sur $D_h$ et $D_k$ respectivement) alors $k \circ h$ est décroissante sur $D_h$.

✌ **Exemple :**

On obtient que, par composition, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

### Lien avec le signe de la dérivée

**Définition 111**

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. On l'appelle droite numérique achevée.

Dans cette partie, $J$ est un intervalle dont les extrémités sont $c$ et $d$ (qui ne sont pas forcément des éléments de $J$) avec $c$ et $d$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On note $\overset{\circ}{J}$ l'intervalle $]c, d[$.

✌ **Exemple :**

- Si $J$ est $[2; 5]$, $\overset{\circ}{J}$ est $]2; 5[$.
- Si $J$ est $]-24; 13]$, $\overset{\circ}{J}$ est $]-24; 13[$.
- Si $J$ est $[2; 13[$, $\overset{\circ}{J}$ est $]2; 13[$.
- Si $J$ est $]2; 11[$, $\overset{\circ}{J}$ est $]2; 11[$.
- Si $J$ est $]-\infty; 11]$, $\overset{\circ}{J}$ est $]-\infty; 11[$.
- Si $J$ est $]-\infty; 15[$, $\overset{\circ}{J}$ est $]-\infty; 15[$.
- Si $J$ est $[10; +\infty[$, $\overset{\circ}{J}$ est $]10; +\infty[$.
- Si $J$ est $]27; +\infty[$, $\overset{\circ}{J}$ est $]27; +\infty[$.

**Proposition 112**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$ et dérivable sur $\overset{\circ}{J}$. On a :

- $f$ est constante sur $J \iff$ Pour tout $x$ de $\overset{\circ}{J}$, on a : $f'(x) = 0$.
- $f$ est croissante sur $J \iff$ Pour tout $x$ de $\overset{\circ}{J}$, on a : $f'(x) \geqslant 0$.
- $f$ est décroissante sur $J \iff$ Pour tout $x$ de $\overset{\circ}{J}$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.

☞ **Mise en garde :**

1. On est donc amené à résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in \overset{\circ}{J}$ (ou bien l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ d'inconnue $x \in \overset{\circ}{J}$ , inutile de faire les deux si on raisonne par équivalence) pour avoir les variations de $f$. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue $x \in \overset{\circ}{J}$ n'a pas d'intérêt !
2. Ne pas oublier que la condition $J$ intervalle est fondamentale et nécessaire pour, à partir d'information sur le signe de la dérivée, trouver les variations de la fonction. Par exemple, la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement négative mais $f$ n'est pas décroissante.

☛ **Remarque :**

Si le signe de $f'$ est difficile à obtenir et si $f$ est une fonction deux fois dérivable alors penser éventuellement à $f^{(2)}$ dont le signe donne le tableau de variations de $f'$ et peut faciliter l'étude du signe de $f'$.

**Proposition 113**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$ et dérivable sur $\overset{\circ}{J}$. On a :

- Si, pour tout $x$ de $\overset{\circ}{J}$, on a $f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement croissante.
- Si, pour tout $x$ de $\overset{\circ}{J}$, on a $f'(x) < 0$ alors $f$ est strictement décroissante.

☞ **Mise en garde :**

Attention, la proposition précédente ne donne pas une condition nécessaire et suffisante pour avoir la stricte monotonie d'une fonction. La fonction $x \mapsto x^3$ est continue, dérivable et strictement croissante mais sa dérivée s'annule en $0$.

### Rappel sur le calcul de dérivée

On rappelle dans le tableau suivant les dérivées des fonction usuelles. Dans ce tableau, $f$ est une fonction définie sur $D_f$ et dérivable sur $D_{f'}$. On donne aussi l'expression des dérivées $f'$ de ces fonctions.
$s$ désigne un réel, $n$ un entier naturel, $m$ un entier strictement négatif et $a$ un réel strictement positif.

| $D_f$ | $f$ | $D_{f'}$ | $f'$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto s$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ |
| $\mathbb{R}^\star$ | $x \mapsto x^m$ | $\mathbb{R}^\star$ | $x \mapsto mx^{m-1}$ |
| $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto x^s$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto sx^{s-1}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\sin(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ |
| $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $x \mapsto \tan(x)$ | $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ |
| $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \frac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto a^x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \ln(a)a^x$ |

Les propriétés algébriques de la dérivation seront revues plus tard (dans le chapitre dérivabilité), les voici :

**Proposition 114**

Soient $\lambda$ un réel, $D$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $D$ alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda f$ sont dérivables sur $D$ et on a :

$$(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f' \text{ et } (f \times g)' = f' \times g + g' \times f.$$

Soit $h$ une fonction définie sur $D_h$ une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(D) \subset D_h$. Si $f$ est dérivable sur $D$ et si $h$ est dérivable sur $D_h$ alors $h \circ f$ est dérivable sur $D$ et on a :

$$(h \circ f)' = (h' \circ f) \times f'.$$

☛ **Remarque :**

On peut réitérer cette proposition. Si $r_1, r_2$ et $r_3$ sont trois fonctions numériques définies et dérivables respectivement sur $D_1$,$D_2$ et $D_3$ trois parties de $\mathbb{R}$ et si $r_3(D_3) \subset D_2$ et $r_2(D_2) \subset D_1$ alors $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ est dérivable sur $D_3$ et

$$(r_1 \circ r_2 \circ r_3)' = (r_1' \circ r_2 \circ r_3) \times (r_2' \circ r_3) \times (r_3').$$

Pour dériver une composée, on commence donc par dériver " la fonction externe" puis on fait au fur et à mesure...

✌ **Exemple :**

$s$ désigne un réel, $n$ un entier naturel. Soient $u, v$ et $w$ trois fonctions dérivables sur $D$. On suppose que $v$ est strictement positive sur $D$ et que $w$ ne s'annule pas sur $D$. On a :

1. $u^n$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $nu'u^{n-1}$.
2. $e^u$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $u'e^u$.
3. $\sqrt{v}$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $\dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$.
4. $v^s$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $sv'v^{s-1}$.
5. $\ln(|w|)$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $\dfrac{w'}{w}$.

**Proposition 115**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si $f$ est dérivable sur $D$ et si $f$ ne s'annule pas sur $D$ alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur $D$ et on a :
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$
- Si $f$ et $g$ sont dérivables sur $D$ et si $f$ ne s'annule pas sur $D$ alors $\dfrac{g}{f}$ est dérivable et on a :
$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2}.$$

☛ **Remarque :**

Respecter bien la notation $f'(x)$. Avant le symbole de dérivation se trouve toujours une fonction, après se trouve un réel pour lequel $f'$ est définie. Si $x$ est un réel strictement positif, $\ln'\left(x^2\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{x^2}$ et pas $\dfrac{2x}{x^2}$, il ne s'agit pas de dériver une composée mais de dérivée ln en un réel qui est le carré d'autre réels. On écrit $f'(x)$ et jamais, ni $f(x)'$, ni $(f(x))'$. $\sin'\left(x^2\right)$ est par exemple $\cos\left(x^2\right)$ et pas $\cos\left(x^2\right) \times 2x$.

➤ ***Exercice :***

*Calculer la dérivée de* $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x^2+2})}\right)^2$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Pour tout réel $x$, on a $x^2 + 2 \geqslant 0$ (la racine ne pose pas de problème), $\sqrt{x^2+2} > 0$ (pas de souci avec le ln) et $\sqrt{x^2+2} \neq 1$ (cela passe donc pour le dénominateur). Par composition, $f$ est donc dérivable. Soit $x$ réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{\left(\ln(\sqrt{x^2+2})\right)^3} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \times 2x \\ &= -\frac{2x}{(x^2+2) \times \left(\ln(\sqrt{x^2+2})\right)^3} \end{aligned}$$

A partir de là, vous pouvez même vous amuser à étudier $f$ sans trop de problème...

### Extremum

**Définition 116**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$. Soit $A$ une partie de $D_f$.

- $f$ est dite majorée sur $A$ s'il existe un réel $M$ tel que :
$$\forall\, x \in A,\ f(x) \leqslant M.$$
On dit alors que $M$ est un majorant de $f$.
- $f$ est dite minorée sur $A$ s'il existe un réel $m$ tel que :
$$\forall\, x \in A,\ f(x) \geqslant m.$$
On dit alors que $m$ est un minorant de $f$.
- $f$ est dite majorée si $f$ est majorée sur $D_f$.
- $f$ est dite minorée si $f$ est minorée sur $D_f$.
- $f$ est dite bornée sur $A$ si $f$ est majorée et minorée sur $A$.
- $f$ est dite bornée si $f$ est bornée sur $D_f$.

☞ **Mise en garde :**

Un majorant ou un minorant d'une fonction ne doit pas dépendre de la variable. On ne peut pas dire par exemple que $x \mapsto x^2$ est majorée (ce qui est faux !) car, pour tout réel $x$, on a : $x^2 \leqslant x^2 + 1$.

**Définition 117**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$. Soit $A$ une partie de $D_f$.

- $f$ admet un maximum (ou maximum global ou maximum absolu) sur $A$ en $a \in A$ si : $\forall\, x \in A, f(x) \leqslant f(a)$.
- $f$ admet un maximum local en $a \in D_f$ s'il existe un réel strictement positif $\varepsilon$ tel que $\forall\, x \in\, ]\, a-\varepsilon, a+\varepsilon\, [\, \cap D_f, f(x) \leqslant f(a)$.
- $f$ admet un extremum local sur $A$ si $f$ admet un minimum local sur $A$ ou si $f$ admet un maximum local sur $A$.
- $f$ admet un extremum (ou extremum global) sur $A$ si $f$ admet un minimum sur $A$ ou si $f$ admet un maximum sur $A$.

☛ **Remarque :**

1. On a donné les définitions de maximum absolu, local... On vous laisse deviner ce qu'est un minimum local, absolu....

2. On utilise les notations de la précédente définition. Lorsqu'on ne précise par sur quel ensemble se passe la propriété, cela signifie qu'elle se passe sur l'ensemble de définition de la fonction. Par exemple, on dit que $f$ admet un extremum local si $f$ admet un extremum local sur $D_f$, $f$ admet un maximum si $f$ admet un maximum sur $D_f$...

3. Maximum et minimum n'existe pas nécessairement. Par exemple, $x \mapsto x^3$ n'admet ni minimum ni maximum.

4. Une fonction peut être majorée sans admettre de maximum, une fonction peut être minorée sans admettre de minimum. C'est le cas de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est minorée sur $\mathbb{R}_\star^+$ mais qui n'admet pas de minimum.

5. Quand ils existent, maximum et minimum ne sont pas forcément atteint une seule fois. La fonction cos admet :
   - un maximum ,$1$, atteint en tous les multiples de $2\pi$.
   - un minimum ,$-1$, atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k$ entier.

6. Un maximum local peut très bien ne pas être un maximum. Par exemple, $f : x \mapsto x^3 - 3x$ admet un maximum local en $-1$ et $f(-1)$ n'est pas un maximum de $f$ puisque $f(-1) = 2$ et $f(5) = 110$. On peut bien sûr faire la même remarque pour minimum local et minimum.

✌ **Exemple :**

$x \mapsto 4 + (x-3)^2$ n'est pas majorée. Elle n'a pas de maximum (ni local ni global). Elle est minorée (par $-1$ par exemple) et atteint son minimum 4 en 3.

☞ **Mise en garde :**

Attention à ne pas confondre un extremum d'une fonction et le point en lequel elle atteint cet extremum. Par exemple, le minimum de $x \mapsto 4 + (x-3)^2$ vaut 4 et il est atteint en 3.

### 3.1.5 Rappel sur les limites

#### Opérations et limites

Dans la prochaine proposition, on donne dans des tableaux les diffents résultats de limites obtenues par somme, produit et inverse. $L_1$, $L_2$ et $\lambda$ désignent trois réels, $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$ et $a$ une borne finie ou infinie d'un intervalle ouvert inclus dans $D$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} (f(x))$ et $\lim\limits_{x \to a} (g(x))$ existent (ce qui n'est pas du tout une évidence comme on le verra plus loin dans l'année). F.I signifie que la forme est indéterminée (mais pas que la limite n'existe pas, cette proposition ne donne tout simplement pas la réponse dans ce cas là !)

**Proposition 118**

### Limite d'une somme

| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $L_2$ | $L_1+L_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I | $-\infty$ |

### Limite du produit par un scalaire

| $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | |
|---|---|---|---|
| | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda > 0$ | $\lambda L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda = 0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| si $\lambda < 0$ | $\lambda L_1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

### Limite du produit

<table>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$</td><td colspan="5">$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$L_1 > 0$</td><td>$L_1 = 0$</td><td>$L_1 < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$L_2 > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$L_1L_2$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$L_2 = 0$</td><td>F.I</td><td>F.I</td></tr>
<tr><td>$L_2 < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>F.I</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>F.I</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

### Limite de l'inverse

| | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$ | $\dfrac{1}{L}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | F.I |

☞ **Mise en garde :**

Attention à deux erreurs classiques lorsque l'on utilise ces tableaux :

1. F.I veut dire forme indéterminée. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas. Cela signifie qu'on ne peut affirmer par opérations ce que vaudra le résultat. Il est possible que la limite existe et soit finie, il est possible que la limite n'existe pas du tout, il est possible qu'elle existe et soit infini.
2. Dans les tableaux précédents, il y a des hypothèses et des conclusions. La case par exemple $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$ doit se lire : si $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$ existe et vaut $L_1$ et si $\lim\limits_{x\to a}(g(x))$ existe et vaut $L_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existera et vaudra $L_1 + L_2$. Il faut faire attention car il est possible que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe sans que ni $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$, ni $\lim\limits_{x\to a}(g(x))$ n'existent.

☛ **Remarque :**

- Les trois formes indéterminées peuvent donc se résumer par : "$\infty-\infty$" , "$0\times\infty$", "$\dfrac{0}{0}$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$". (Au passage, de la forme indéterminée $0\times\infty$, on en déduit les formes indéterminées "$\dfrac{\infty}{\infty}$", "$1^{\infty}$","$0^0$" et "$\infty^0$".)
- Pour obtenir la limite d'un quotient, il faut se servir de la proposition sur la limite de l'inverse et celle sur la limite du produit.

Pour la composition, on a la proposition suivante :

**Proposition 119**

Soit $(a, l_f, l_g) \in (\overline{\mathbb{R}})^3$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$ deux parties de $\mathbb{R}$ telle que $f(D_f) \subset D_g$ et $f$ est définie au voisinage de $a$.
Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)) = l_f$ et $\lim\limits_{y\longrightarrow l_f}(g(y)) = l_g$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a}((g\circ f)(x))$ existe et :

$$\lim_{x\longrightarrow a}((g\circ f)(x)) = l_g.$$

✌ **Exemple :**

On sait que $\lim\limits_{y\longrightarrow 0}\left(\dfrac{\ln(1+y)}{y}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, par composition, cela donne : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right) = 1$ soit $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right) = 1$.

### Limites classiques

**Proposition 120**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction avec $D$ une partie de $\mathbb{R}$, soit $a$ un élément de $D$. Si $f$ est dérivable en $a$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ existe et vaut $f'(a)$. Sous réserve d'existence, on a donc :

$$f'(a) = \lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

✌ **Exemple :**

On obtient ainsi ces quatre limites :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = 1$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right) = 1$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 1$

**Proposition 121**

**Croissances comparées**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On a :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^a}{(e^x)^b}\right) = 0$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{(\ln(x))^b}{x^a}\right) = 0$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{(e^x)^b}{x^a}\right) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{x^a}{(\ln(x))^b}\right) = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left((|\ln(x)|)^b x^a\right) = 0$

☛ **Remarque :**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Le fait que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(\dfrac{(e^x)^b}{x^a}\right)$ existe et soit égale à $0$ est une conséquence de la proposition sur la limite des produits et pas une conséquence de la proposition précédente.

### Quelques idées pour lever l'indétermination

1. **Idée 1** : On peut mettre en facteur le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur puis on simplifie. C'est classique pour les indéterminées du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$".
2. **Idée 2** : On peut utiliser la quantité conjuguées quand apparaît une racine.
3. **Idée 3** : Certaines fonctions peuvent faire penser à des formules classiques comme $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ ou $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ ou les formules de trigonométrie ou...
4. **Idée 4** : On peut utiliser les croissances comparées si on des fonctions du type polynômes, exponentielle, logarithme.
5. **Idée 5** : On peut utiliser les taux d'accroissements. C'est classique pour les indéterminées du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$".

➤ ***Exercice :***

*Déterminer la limite si elle existe de $f$ en $+\infty$ avec :*

$$f : x \mapsto \frac{\ln\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 4\right)}{\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 4}.$$

........................................................................................................
Cela se fait sans difficulté : En effet, par somme, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}-4\right)=+\infty.$$

Or, par croissances comparées, on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$. Par composition, on peut donc affirmer que $\lim_{x\to+\infty}(f(x))$ existe et vaut $0$.

### 3.1.6 Études des branches infinies

#### En un point fini

Dans cette partie, $f$ est une fonction numérique à variable réelle, I un intervalle de réels et $a$ un point de I. On suppose que $f$ est définie sur $I\backslash\{a\}$ et on munit le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

- Si $\lim_{x\longrightarrow a}(f(x))$ existe et est finie alors le point $a$ est un faux problème. On peut prolonger $f$ par continuité en posant $f(a)=\lim_{x\longrightarrow a}(f(x))$.
- Si la limite de $f$ en $a$ (à droite ou a gauche) est infinie alors $C_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$. On dit que $f$ admet une branche infinie en $a$.

#### A l'infini

Dans cette partie, $f$ est une fonction numérique à variable réelle. On suppose que $f$ est définie au voisinage de l'infini, on dit alors que $f$ admet une branche infinie en l'infini. On munit le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal. Pour étudier le comportement en l'infini de $f$, on applique la démarche suivante :

Étape 1 : Calcul de $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$.

- Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$ existe et est finie alors, en notant $l$ cette limite, $C_f$ admet en l'infini une asymptote horizontale, c'est la droite d'équation $y=l$. On arrête alors ici notre étude.
- Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x))$ est infinie alors on passe à la prochaine étape.

✌ **Exemple :**

$C_f$, courbe représentative de $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{2x^2-6}$, admet en l'infini une asymptote horizontale d'équation $y=\frac{1}{2}$.

Étape 2 : Calcul de $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

- Si $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=0$ alors $C_f$ admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. On arrête alors ici notre étude.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ est infinie alors $C_f$ admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. On arrête alors ici notre étude.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ existe, est finie et non nul, alors on note $a$ cette limite et on passe à la prochaine étape.

✌ **Exemple :**

$C_{\ln}$ admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des abscisses et $C_{\exp}$ admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Étape 3 : Calcul de $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$ avec $a = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors $C_f$ admet en l'infini une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$. On arrête alors ici notre étude.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$ existe et est finie alors, en notant $b$ cette limite, $C_f$ admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

➤ ***Exercice*** :

*Étudier le comportement asymptotique de* $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{2x-6}$.

On suit les différentes étapes. On évalue d'abord $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x))$, cela donne $+\infty$. Après, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = \dfrac{1}{2}$. Un dernier calcul, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right)$ valant $\dfrac{3}{2}$, on peut finalement affirmer que $C_f$, courbe représentative de $f$, admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

### 3.1.7 Notion de bijection continue

**Théorème 122**

**Théorème de la bijection continue**
Soit $D$ un ensemble de réels, $f$ une fonction numérique dont l'ensemble de définition est $D$. Si $f$ est strictement monotone et continue sur $D$ alors :

- $f$ réalise une bijection de $D$ sur $f(D)$.
- $f^{-1}$ est strictement monotone et son sens de variation est celui de $f$.
- Soit $y$ un réel. L'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x$ élément de $D$ a une unique solution (qui est $f^{-1}(y)$) si $y$ appartient à $f(D)$ et n'a aucune solution si $y$ n'appartient pas à $f(D)$.

☞ **Mise en garde :**

Deux mises en garde concernant ce théorème :

1. N'oubliez pas la condition "$y \in f(D)$". Par exemple, l'équation, d'inconnue $x$ réel positif, $\sqrt{x} = -2$ n'a pas de solution...

2. Le $y$ du précédent théorème ne doit pas dépendre de $x$. En introduisant la fonction $g : x \mapsto f(x) - y$, on peut toujours se ramener à un problème de recherche d'antécédent de $0$ et éviter ainsi ce danger. On utilise alors le théorème de la bijection continue dans ce cas particulier : si $g$ est continue et strictement monotone sur $D$ alors l'équation, d'inconnue $x$ élément de $D$, $g(x) = 0$ a une unique solution si $0$ appartient à $g(D)$ et zéro solution si $0$ n'appartient pas à $g(D)$.

## 3.2 Fonctions usuelles

### 3.2.1 Fonctions affines

**Proposition 123**

Une fonction affine est une fonction du type $f : x \mapsto ax + b$ avec $a$ et $b$ deux réels.

- $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa monotonie est donnée par le signe de $a$.
- On a : $f' : x \mapsto a$. $f$ est donc croissante si $a \geqslant 0$ et décroissante si $a \leqslant 0$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. . On munit le plan $\mathbb{P}$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative de $f$ est une droite d'équation $y = ax + b$.

### 3.2.2 Logarithme et fonction exponentielle

**Définition 124**

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ existe sur sur $\mathbb{R}_+^\star$ car $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, c'est l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$ s'annulant en $1$, on l'appelle logarithme népérien et on la note ln.

**Proposition 125**

De la définition découle de manière immédiate les propriétés suivantes :

1. $\ln(1) = 0$.
2. ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. $\ln' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$
4. ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$

**Proposition 126**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs et $n$ un entier, on a la propriété fondamentale suivante :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On a aussi :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \ \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \ \text{ et } \ \ln\left(a^n\right) = n\ln(a).$$

☞ **Mise en garde :**

Ne pas écrire $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a \times b > 0$, la bonne réponse est :

$$\ln(a \times b) = \ln(|a|) + \ln(|b|).$$

on peut faire bien sûr la même mise en garde pour la formule avec le quotient !

**Définition 127**

ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$. On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de ln. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

**Proposition 128**

De la définition découle de manière immédiate les propriétés suivantes :

1. $\exp(0) = 1$.
2. exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. $\exp > 0$.
4. $\exp' : x \mapsto \exp(x)$
5. exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On appelle $e$ l'unique réel strictement positif tel que $\ln(e) = 1$. Son existence et son unicité proviennent du théorème de la bijection continue.

**Proposition 129**

Soient $a$ et $b$ deux réels, $c$ un réel strictement positif et $n$ un entier, on a la propriété fondamentale :

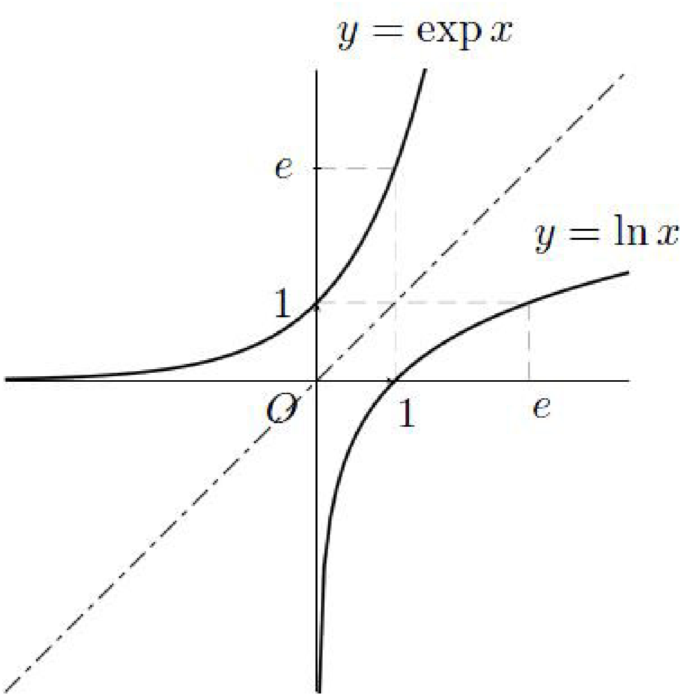
$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

On a aussi :

- $\ln(\exp(a)) = a$.
- $\exp(\ln(c)) = c$.
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
- $\exp(b-a) = \dfrac{\exp(b)}{\exp(a)}$.
- $(\exp(a))^n = \exp(na)$.
- $\exp(a) = e^a$.

✎) **Illustration :**

Voici le graphe de ces fonctions :



### 3.2.3 Logarithme et fonction exponentielle en base $a$

**Définition 130**

Soit $a$ un réel strictement positif.

- On appelle exponentielle en base $a$ et on note $\exp_a$ la fonction définie par :
$$\exp_a \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto a^x \end{cases}$$
en posant, pour tout réel $x$, $a^x = \exp\left(x\ln(a)\right)$.
- Si $a \neq 1$, on appelle logarithme en base $a$ et on note $\ln_a$ la fonction définie par :
$$\ln_a \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases}$$

**Exemple :**

Utilisons les notations de la précédente définition.

1. Si $a = e$, on retrouve le logarithme népérien.
2. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal que l'on note aussi log et qui, historiquement, a joué un rôle important car il a permis de faire de nombreux calculs avant l'avènement des ordinateurs et des calculatrices. Il est toujours utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).
3. Si $a = 2$, on obtient le logarithme binaire assez utilisé en informatique.

**Proposition 131**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On suppose que $a$ est différent de $1$, on a :
$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2,\ \ln_a(x\times y) = \ln_a(x) + \ln_a(y)$$
On a aussi :

- $\ln_a(1) = 0$ et $\ln_a(a) = 1$.
- $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2,\ \ln_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln_a(x) - \ln_a(y)$
- $\forall y \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln_a\left(b^x\right) = x\ln_a(b)$.

**Proposition 132**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Pour tous réels $x$ et $y$, on a :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y, \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ \text{ et } \ (a^x)^y = a^{xy}.$$

On a aussi $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et, pour tout réel $x$, $a^x \times b^x = (a \times b)^x$. De plus, si $a$ est différent de $1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln_a(a^x) = x \ \text{ et } \ \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \ a^{\ln_a(x)} = x.$$

### 3.2.4 Fonctions puissances

#### Définition

**Définition 133**

Soient $n$ un entier naturel, $x$ un réel et $\alpha$ un réel.

- On pose : $x^n = \begin{cases} \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$.
- Si $x$ est non nul, on pose : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
- Si $x$ est strictement positif, on pose : $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

☛ **Remarque :**

Si $x$ est un réel strictement positif et $n$ un entier naturel, $x^n$ est à la fois $\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$ et $\exp(n \ln(x))$, $x^{-n}$ est à la fois l'inverse de $x^n$ et $\exp(-n \ln(x))$.

☞ **Mise en garde :**

Lorsque l'on étudie une fonction du type $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ (une fonction où la puissance varie en fonction de la variable), on commence toujours par écrire que, sous réserve d'existence, pour tout réel $x$, on a :

$$f(x) = \exp(v(x) \ln(u(x))).$$

Calculer une dérivée, faire un calcul de limite,... sans passer par cette expliciatation serait une erreur. On peut bien sûr la même remarque pour une suite du type $(v_n^{w_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

**Proposition 134**

Les relations :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$
- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ si $a \neq 0$

sont valables :

- pour tous réels $a$ et $b$ si $m$ et $n$ sont deux entiers naturels,
- pour tous réels non nuls $a$ et $b$ si $m$ et $n$ sont deux entiers,
- pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$ si $m$ et $n$ sont deux réels.

☛ **Remarque :**

Cette dernière proposition est considérée comme évidente. Elle doit absolument être totalement acquise. Ne pas faire de mélange en simplifiant par exemple du $a^m \times b^n$ en $(a \times b)^{m+n}$.

**Définition 135**

Soit $n$ un entier naturel pair et $m$ un entier naturel impair.

- Soit $x$ un réel positif. On définit $\sqrt[n]{x}$ comme étant la solution de l'équation $y^n = x$ d'inconnue $y$ réel positif. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \qquad y = \sqrt[n]{x} \Longleftrightarrow x = y^n.$$

- Soit $x$ un réel. On définit $\sqrt[m]{x}$ comme étant la solution de l'équation $y^m = x$ d'inconnue $y$ réel. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y = \sqrt[m]{x} \Longleftrightarrow x = y^m.$$

☛ **Remarque :**

$x^{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire $\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{n}\right)$ et $\sqrt[n]{x}$ désigne la même quantité si $x$ est un réel positif et $n$ un entier naturel.

☞ **Mise en garde :**

$x^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{x}$ ne désigne pas la même quantité si $x$ est un réel négatif et $n$ un entier naturel impair. $\sqrt[n]{x}$ est alors défini et $x^{\frac{1}{n}}$ n'a pas de sens. Voici par exemple une preuve que $-1 = 1$ (ce qui est bien sûr faux) :

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^1 \\ &= (-1)^{\frac{2}{2}} \\ &= \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(-1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

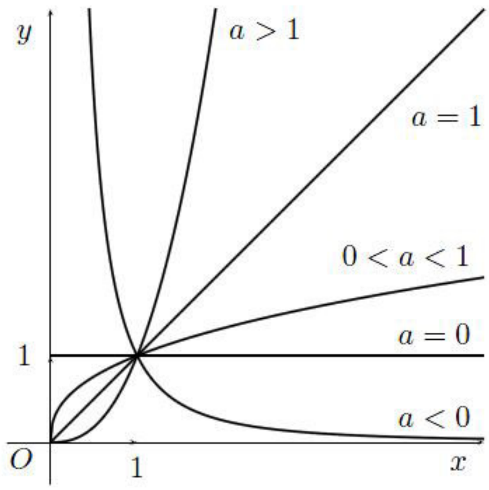
Cette preuve est bien sûr erronée, l'erreur commise ici est de confondre $(-1)^{\frac{2}{2}}$ et $\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

### Propriétés et graphiques

**Proposition 136**

Soit $a$ un réel. On définit $f_a$ la fonction suivante : $f_a : x \mapsto x^a$. On sait que :
- $f_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- $f'_a : x \mapsto a \times x^{a-1}$.
- $f_a$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ si $a$ est positif et décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ si $a$ est négatif.

✎) **Illustration :**
Voici le graphe de ces fonctions :




☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition.
1. On rappelle que $x^a$ avec $x$ réel strictement positif est défini comme $\exp(a\ln(x))$.
2. Si $a$ est aussi un entier naturel alors $f_a$ vérifie des propriétés supplémentaires :
   - $f_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_a : x \mapsto a \times x^{a-1}$.
   - $f_a$ est pair si $a$ est pair et impair si $a$ est impair.

- $f_a$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a$ est impair et est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$ si $a$ est pair.

3. Si $a$ est un entier négatif alors $f_a$ vérifie des propriétés supplémentaires :
   - $f_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $f'_a : x \mapsto a \times x^{a-1}$.
   - $f_a$ est pair si $a$ est pair et impair si $a$ est impair.
   - $f_a$ est décroissante sur $\mathbb{R}^\star_-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}^\star_+$ si $a$ est impair et est croissante sur $\mathbb{R}^\star_-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}^\star_+$ si $a$ est pair.
4. $f_2$ est la fonction carré, sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une parabole.
5. $f_{-1}$ est la fonction inverse, sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une hyperbole.

**♣) Corollaire 137 :**
Un polynôme est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 138**

Soit $n$ un entier naturel non nul. Notons $g_n$ la fonction suivante :

$$g_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

- Pour tout réel strictement positif $x$, on a $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$.
- Si $n$ est impair, $g_n$ est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si $n$ est pair, $g_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star_+$ et sa courbe représentative présente une demi-tangente verticale en l'origine.
- $g'_n : x \mapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
- $g_n$ est strictement croissante.

**☛ Remarque :**

$g_2$ est la fonction racine carrée, $g_3$ est la fonction racine cubique.

**☞ Mise en garde :**

- Soit $x$ un réel, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$ (et pas forcément $x$...).
- Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $ab \geqslant 0$, on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$.

## 3.3 Notions de continuité

### 3.3.1 Définitions des limites

Dans toute cette partie, $f$ et $g$ seront deux fonctions numériques. La première sera définie sur une partie $D_f$ de $\mathbb{R}$, la seconde sera définie sur une partie $D_g$ de $\mathbb{R}$. $D_f$ comme $D_g$ seront des ensembles contenant un intervalle non réduit à un point.

### En un point fini

**Définition 139**

Soit $a$ un réel. On dit que $f$ est définie au voisinage de $a$ s'il existe un intervalle $I$ contenant $a$, non réduit à un point et tel que $I\backslash\{a\}$ soit inclus dans $D_f$. Cela ne veut pas forcément dire que $a$ appartient à $D_f$ mais qu'il existe un réel strictement positif $\varepsilon$ tel que $D_f$ contienne au moins l'un des intervalles suivants :

1. $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$
2. $[a, a+\varepsilon]$
3. $[a-\varepsilon, a]$
4. $]a-\varepsilon, a[\,\cup\,]a, a+\varepsilon[$
5. $]a, a+\varepsilon[$
6. $]a-\varepsilon, a[$

Dans les trois premiers cas, $a$ appartient à $D_f$. Dans les trois derniers cas, $a$ n'appartient pas à $D_f$.

✌ **Exemple :**

ln est défini au voisinage de $0$ (même si ln n'est pas défini en $0$) car ln est défini sur $\mathbb{R}_\star^+$ et $]0,1[$ est inclus dans $\mathbb{R}_\star^+$. En revanche, ln n'est pas défini au voisinage de $-1$.

**Définition 140**

Soient $L$ et $a$ deux réels. On suppose que $f$ est définie au voisinage de $a$.

- On dit que $f$ admet $L$ comme limite en $a$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], |f(x) - L| < \varepsilon.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = L$ ou $\lim\limits_{a} f = L$.
- On dit que $f$ admet une limite finie en $a$ s'il existe un réel $L$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = L$.
- On dit que $f$ admet $+\infty$ comme limite en $a$ si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], f(x) > A.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
- On dit que $f$ admet $-\infty$ comme limite en $a$ si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], f(x) < B.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

✌ **Exemple :**

On peut ainsi prouver que $\lim\limits_{x \longrightarrow -2}(2x+7) = 3$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 2}\left(\dfrac{5}{(x-2)^2}\right) = +\infty$. En pratique, pour démontrer de tels résultats, on n'utilisera pas la définition précédente mais les propositions de ce chapitre.

☞ **Mise en garde :**

Reprenons les notations de la précédente définition. $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x))$ ne peut dépendre de $x$. Écrire par exemple que $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x)) = \dfrac{1}{x+1}$ n'a strictement aucun sens ! $\lim\limits_{x \longrightarrow a}(f(x))$ dépend en revanche de $f$ et de $a$.

### En l'infini

**Définition 141**

- On dit que $f$ est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel $A$ tel que $[\,A, +\infty\,[\, \subset D_f$.
- On dit que $f$ est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel $B$ tel que $]-\infty, B\,] \subset D_f$.

✌ **Exemple :**

1. tan n'est ni définie au voisinage de $+\infty$ : En effet, même si $A$ est un réel très grand, il existera un entier $k$ tel que $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ appartienne à $[\,A, +\infty\,[$. tan, pour des raisons similaires, n'est pas définie au voisinage de $-\infty$.

2. Soit $f : x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{100}(x-k)$. $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de $+\infty$ : $f$ est par exemple défini sur $[150, +\infty[$. On note aussi que $\dfrac{1}{f}$ est définie au voisinage de $-\infty$.

**Définition 142**

Soient $L$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

- $f$ admet $L$ comme limite en $+\infty$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [C, +\infty[, |f(x) - L| < \varepsilon.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x)) = L$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = L$.
- On dit que $f$ admet une limite finie en $+\infty$ s'il existe un réel $L$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x)) = L$.
- $f$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists C > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [C, +\infty[, f(x) > A.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x)) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
- $f$ admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si :
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists C > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [C, +\infty[, f(x) < B.$$
On note alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

✌ **Exemple :**

On peut ainsi prouver que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(2 + \dfrac{8}{x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\ln(x)) = +\infty$. Signalons de nouveau qu'en pratique, pour démontrer de tels résultats, on n'utilisera pas la définition précédente mais les propositions de ce chapitre.

☛ **Remarque :**

Soit $g$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$, on donne sans difficulté les définitions de $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (g(x)) = L$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (g(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (g(x)) = +\infty$. Il suffit de remplacer dans les définitions précédentes le bloc $\exists C > 0 / \ \forall x \in D_f \cap [C, +\infty[$ par le bloc $\exists D < 0 / \ \forall x \in D_g \cap ] - \infty, D]$. Par exemple, $g$ admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ si $\forall B \in \mathbb{R}, \exists D < 0 / \ \forall x \in D_g \cap ] - \infty, D], f(x) < B$.

### Premières propriétés et notion de continuité

**Définition 143**

Soient $P$ une proposition dépendant d'un réel et $a$ un réel. On dit que $P$ est vraie au voisinage de $a$ (resp. au voisinage de $+\infty$, au voisinage de $-\infty$) s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $a$ (resp. de $+\infty$, de $-\infty$) tel que pour tout $x$ de $\mathcal{V}$, $P(x)$ est vraie.

✌ **Exemple :**

1. ln est inférieure à $-10$ au voisinage de $0$. En effet, ln est inférieure à $-10$ sur $]0, \exp(-10)[$.
2. exp est supérieure à $10$ au voisinage de $+\infty$. En effet, exp est supérieure à $10$ sur $]\ln(10), +\infty[$.

**Proposition 144**

Soient $l$ un réel et $a$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f$ est définie au voisinage de $a$ et admet $l$ comme limite en $a$ alors on a :

- Sa limite est unique.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (|f(x)|) = |l|$.
- $f$ est bornée au voisinage de $a$.

☛ **Remarque :**

Reprenons les notations de la précédentes définition. Si on modifie la fonction $f$ en dehors d'un voisinage de $a$, cela ne modifiera pas la valeur, si elle existe, de $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$. Cela traduit le caractère local de la notion de limite.

☞ **Mise en garde :**

Reprenons les notations de la précédente définition. Si $f$ est bornée au voisinage de $a$, cela ne signifie pas pour autant que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$ existe. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{(x-a)^2}\right)$.

**Proposition 145**

Soient $l$ un réel et $a$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $f$ est définie au voisinage de $a$ alors on a :

$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = l \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} (f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} (|f(x) - l|) = 0.$$

En particulier, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow a} (|f(x)|) = 0$.

**Proposition 146**

Soient $l$ et $a$ deux réels. On suppose que $f$ est une fonction définie au voisinage de $a$ et aussi en $a$.

- Si $f$ admet $l$ comme limite en $a$ alors on a nécessairement $l = f(a)$.
- On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x \to a} (f(x))$ existe et vaut $f(a)$.
- On dit que $f$ est discontinue en $a$ si $f$ n'est pas continue en $a$.

✌ **Exemple :**

- Toutes les fonctions de référence de bcpst, sauf la partie entière, sont continues en tous points de leurs ensembles de définition.
- Pour tout entier $m$, la fonction partie entière est discontinue en $m$ puisque ses limites à gauche et à droite en $m$ sont différentes.

☞ **Mise en garde :**

- Une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle est définie puisqu'il faut comparer $\lim_{x\to a}(f(x))$ et $f(a)$. Prouver qu'une fonction est continue en $a$ revient donc à s'assurer que $f(a)$ existe puis à prouver que $\lim_{x\to a}(f(x))$ existe et vaut $f(a)$.
- Si $f(a)$ existe, on n'est pas sûr pour autant que $\lim_{x\longrightarrow a}(f(x))$ existe. Par exemple, $\lim_{x\longrightarrow 0}(\lfloor x\rfloor)$ n'existe pas mais $\lfloor 0\rfloor$ existe. Pour prouver facilement que $\lim_{x\longrightarrow 0}(\lfloor x\rfloor)$ n'existe pas, on utilisera la notion de limite à gauche et de limite à droite.
- Si $f(a)$ n'existe pas, $\lim_{x\longrightarrow a}(f(x))$ peut tout de même exister. C'est le cas par exemple de $\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ qui existe et vaut $1$. On le prouvera plus tard avec un taux d'accroissements.

✌ **Exemple :**

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$ n'est pas définie en $0$ et n'est donc pas continue en $0$. En revanche, elle est prolongeable par continuité, nous allons voir maintenant cette notion.

**Proposition 147**

Soit $h$ une fonction numérique à variable réelle définie sur $I\backslash\{a\}$ avec $I$ un intervalle réel non réduit à un point et $a$ un point de $I$. Si $\lim_{x\to a}(h(x))$ existe et vaut $L$, un réel, alors la fonction $g$ suivante :

$$g : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in I\backslash\{a\} \\ L & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de $h$ en $a$. $g$ est une fonction continue en $a$.

☛ **Remarque :**

Utilisons les notations précédentes.

- Pour montrer que $h$ est prolongeable par continuité en $a$, il suffit de constater que $h(a)$ n'est pas définie (si $h(a)$ est définie, $h$ n'est pas prolongeable en $a$ et n'est pas en particulier prolongeable par continuité en $a$) et que $\lim_{x\to a}(h(x))$ existe et est finie. On prolonge $h$ alors en posant $h(a) = \lim\limits_{x \to a}(h(x))$ si on se permet, ce qui est normal en bcpst, de confondre $h$ et son prolongement.

- Le prolongement par continuité est unique : poser $h(a) = \lim\limits_{x \to a}(h(x))$ est le seul moyen de prolonger $h$ en une fonction continue en $a$.

✌ **Exemple :**

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. On prolonge $f$ par continuité en posant $f(0) = 1$ car $f$ n'est pas définie en $0$ et on prouve facilement (taux d'accroissements) que $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ existe et vaut $1$.

## ➤ *Exercice :*

*Peut-on prolonger par continuité en $0$ la fonction suivante :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2+2x^5}{2x^2+3x^3} & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{7x^2+2x^4}{14x^2+3x^7} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On va se permettre d'utiliser les équivalents (qu'on verra en fin de chapitre), on prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}(f(x)) = \dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{x^2+2x^5}{2x^2+3x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2}$ et donc $f(x) \underset{0^-}{\sim} \dfrac{1}{2}$. De même, on prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}(f(x)) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}(f(x))$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}$. De plus $f$ n'est pas définie en $0$, on peut donc prolonger $f$ par continuité en $0$ en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

**Définition 148**

- Soit $h$ une fonction numérique à variable réelle définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$. On dit que $h$ est continue sur $D$ si $h$ est continue en tout point de $D$.
- On note $\mathcal{C}^0(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$.

☛ **Remarque :**

Si $D$ est un intervalle de réels, dire que $h$ est continue sur $D$ revient à dire qu'on trace sa courbe représentative sans lever le crayon.

**Notion de limite à gauche et à droite**

**Définition 149**

Soient $a$ un réel et $l$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ est définie au voisinage de $a$ et on note $D_f$ son ensemble de définition.

- Si $]a,+\infty[\cap D_f$ n'est pas l'ensemble vide, alors on dit que $f$ admet $l$ comme limite à droite en $a$ si la restriction de $f$ à $]a,+\infty[\cap D_f$ admet $l$ comme limite. On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}}(f(x)) = l$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+}(f(x)) = l$ ou $\lim\limits_{a^+} f = l$. Si de plus $a$ est un élément de $D_f$ alors on dit que $f$ est continue à droite en $a$ si $\lim\limits_{x\to a^+}(f(x))$ existe et vaut $f(a)$.
- Si $]-\infty,a[\cap D_f$ n'est pas l'ensemble vide, alors on dit que $f$ admet $l$ comme limite à gauche en $a$ si la restriction de $f$ à $]-\infty,a[\cap D_f$ admet $l$ comme limite. On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}}(f(x)) = l$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+}(f(x)) = l$ ou $\lim\limits_{a^+} f = l$. Si de plus $a$ est un élément de $D_f$ alors on dit que $f$ est continue à gauche en $a$ si $\lim\limits_{x\to a^-}(f(x))$ existe et vaut $f(a)$.

✌ **Exemple :**

On peut ainsi prouver que :

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$.

2. Pour tout entier $m$, $\lim\limits_{x\longrightarrow m^+}(\lfloor x\rfloor) = m$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow m^-}(\lfloor x\rfloor) = m-1$.

Signalons de nouveau qu'en pratique, pour démontrer de tels résultats, on n'utilisera pas la définition précédente mais les propositions de ce chapitre...

☛ **Remarque :**

Dans le concept de limite à gauche et de limite à droite, le fait que $f(a)$ (en reprennant les notations de la précédente définition) existe n'a aucune importance puisque $a$ n'appartient ni à $]-\infty,a[\cap D_f$ ni à $]a,+\infty[\cap D_f$. Il n'y a peut-être aucun rapport entre $f(a)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-}(f(x))$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+}(f(x))$. Par contre, on a vu que si $f(a)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x))$ existaient alors, nécessairement, on avait $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)) = f(a)$.

**Proposition 150**

Soient $a$ un réel et $l$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f$ est définie au voisinage de $a$ et on note $D_f$ son ensemble de définition. On suppose que $a$ n'est pas un élément de $D_f$.

- Si $]a, +\infty[\cap D_f$ et $]-\infty, a[\cap D_f$ ne sont pas des ensembles vides alors :
$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = l \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a^+} (f(x)) = l \text{ et } \lim_{x \longrightarrow a^-} (f(x)) = l.$$
- Si $]a, +\infty[\cap D_f$ est un ensemble vide et $]-\infty, a[\cap D_f$ n'est pas un ensemble vide alors :
$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = l \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a^-} (f(x)) = l.$$
- Si $]-\infty, a[\cap D_f$ est un ensemble vide et $]a, +\infty[\cap D_f$ n'est pas un ensemble vide alors :
$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = l \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a^+} (f(x)) = l.$$

☛ **Remarque :**
On utilise les notations de la précédente proposition. Si on suppose que $a$ est un élément de $D_f$, la proposition est la même mais il faut remplacer $l$ par $f(a)$car, on vous rappelle que si une fonction $f$ est définie en $a$, sa seule limite possible en $a$ et $f(a)$ (si jamais sa limite existe (ce qui n'a rien d'évident), elle vaut nécessairement $f(a)$). Par exemple, si $a \in D_f$ et si $]a, +\infty[\cap D_f$ et $]-\infty, a[\cap D_f$ ne sont pas des ensembles vides alors :

$$\lim_{x \longrightarrow a}(f(x)) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a^+}(f(x)) = f(a) \text{ et } \lim_{x \longrightarrow a^-}(f(x)) = f(a).$$

On vous laisse faire les deux autres cas, celui où tout se passe à gauche ou celui où tout se passe à droite.

✌ **Exemple :**

On introduit les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, h : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } w : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. $g$ admet une limite à gauche en $0$ et une limite à droite en $0$ (valant respectivement $-1$ et $1$). Cependant, comme $\lim_{x \longrightarrow 0^-}(g(x)) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+}(g(x))$, on peut affirmer que $\lim_{x \longrightarrow 0}(g(x))$ n'existe pas.

2. $h$ admet une limite à gauche en $0$ et une limite à droite en $0$ (valant toutes les deux $1$). Cependant, $\lim_{x \longrightarrow 0}(h(x))$ n'existe pas car $\lim_{x \longrightarrow 0^-}(h(x)) \neq h(0)$.

3. $w$ admet une limite à gauche en $0$ et une limite à droite en $0$ (valant toutes les deux $1$). De plus, $w$ n'étant pas définie en 0, on peut affirmer que $\lim_{x \longrightarrow 0}(w(x))$ existe et vaut $1$.

## 3.3.2 Opérations sur les limites

### Opérations algébriques sur les limites

Dans les tableaux de la prochaine proposition, $a$ est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, $L_1$,$L_2$ et $\lambda$ désignent trois réels, $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie $D$ de $\mathbb{R}$ tel que $f$ et $g$ sont définies sur un voisinage de $a$. F.I signifie que la forme est indéterminée.

**Proposition 151**

### Limite d'une somme

| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $L_2$ | $L_1+L_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | F.I | $-\infty$ |

### Limite du produit par un scalaire

| $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | |
|---|---|---|---|
| | $L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda>0$ | $\lambda L_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| si $\lambda=0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| si $\lambda<0$ | $\lambda L_1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

### Limite du produit

<table>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$</td><td colspan="5">$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$L_1>0$</td><td>$L_1=0$</td><td>$L_1<0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$L_2>0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$L_1L_2$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$L_2=0$</td><td>F.I</td><td>F.I</td></tr>
<tr><td>$L_2<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>F.I</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>F.I</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

### Limite de l'inverse

| | $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L\neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ | $\frac{1}{L}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | F.I |

☞ **Mise en garde :**

Attention à deux erreurs classiques lorsque l'on utilise ce tableau.

1. F.I veut dire forme indéterminée. Cela ne signifie pas que la limite n'existe pas. Cela signifie qu'on ne peut affirmer par opérations ce que vaudra le résultat. Il est possible que la limite existe et soit finie, il est possible que la limite n'existe pas, il est possible que l'on obtienne l'infini.
2. Dans les tableaux précédents, il y a des hypothèses et des conclusions. La case par exemple $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1+L_2$ doit se lire : si $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$ existe et vaut $L_1$ et $\lim\limits_{x\to a}(g(x))$ existe et vaut $L_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe et vaut $L_1+L_2$. Il faut faire attention car il est

possible que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ existe sans que ni $\lim_{x \to a} (f(x))$ ni $\lim_{x \to a} (g(x))$ n'existe. Par exemple $\lim_{x \to -\infty} (\cos(x) - \cos(x))$ existe mais $\lim_{x \to -\infty} (\cos(x))$ n'existe pas !

☛ **Remarque :**

- Les quatre formes indéterminées peuvent donc se résumer par :

$$"\infty - \infty" \text{ , } "0 \times \infty", "\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}"$$

- Puisque $a^b$ est, sous réserve d'existence, $\exp(b \ln(a))$ et que "$0 \times \infty$" est une forme indéterminée, on en déduit que "$1^\infty$", "$0^0$" et "$\infty^0$" sont trois formes indéterminées.
- Pour obtenir la limite d'un quotient, il faut se servir de la proposition sur la limite de l'inverse et celle sur la limite du produit.
- Cette proposition est valable aussi avec des à droite et à gauche. La plupart des propositions vues dans la suite se généralisent sans difficulté aux limites à droite et à gauche.

**Proposition 152**

Soient $\lambda$ un réel, $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur I, I intervalle de réel non réduit à un point, et $a$ un point de I.

- Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ alors $f + g$, $fg$ et $\lambda f$ sont continues en $a$.
- Si $f$ et $g$ sont continues sur I alors $f + g$, $fg$ et $\lambda f$ sont continues sur I.
- Si $f$ est continue en $a$ et si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en $a$.
- Si $f$ est continue sur I et si $f$ ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

☛ **Remarque :**

En conséquence, un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.

### Composition

#### Limite de fonctions composées

**Proposition 153**

Soit $(a, l_f, l_g) \in (\overline{\mathbb{R}})^3$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$. On suppose que $f$ est définie au voisinage de $a$ et $f(D_f) \subset D_g$. Si $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = l_f$ et $\lim_{x \longrightarrow l_f} (g(x)) = l_g$ alors $\lim_{x \longrightarrow a} ((g \circ f)(x))$ existe et :

$$\lim_{x \longrightarrow a} ((g \circ f)(x)) = l_g.$$

**Proposition 154**

Soient $f$ une fonction numérique définie sur I, I intervalle de réel non réduit à un point et $a$ un point de I. Soient $h_1$ et $h_2$ deux fonctions définies respectivement au voisinage de $f(a)$ et sur D une partie de $\mathbb{R}$. Si $f(I) \subset D$ alors :

- si $f$ est continue en $a$ et si $h_1$ est continue en $f(a)$ alors $h_1 \circ f$ est continue en $a$.
- si $f$ est continue sur I et si $h_2$ est continue sur D alors $h_2 \circ f$ est continue sur I.

**Exemple :**

1. On sait que $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\ln(1+y)}{y}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (e^x - 1) = 0$. Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1}\right) = 1$, soit $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{e^x-1}\right) = 1$. $1 \neq 0$, par quotient, on obtient donc la limite suivante :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1.$$
2. Soit $\alpha$ un réel non nul. On sait que $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \left(\dfrac{e^y-1}{y}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\alpha \ln(1+x)) = 0$. Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\exp(\alpha \ln(1+x)) - 1}{\alpha \ln(1+x)}\right) = 1$, soit :
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha \ln(1+x)}\right) = 1.$$

## ➤ *Exercice :*

*Étudier la continuité de* $f$ *avec :* $f : x \mapsto \sin(\ln(x+1)) \times \ln(|x|)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Soit $x$ réel, on a :
$$f(x) \text{ est définie } \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ |x| > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi $f$ est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.Par composée et somme, $f$ est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
On a :
$$f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x+1) \times \ln(|x|) \text{ car } \lim_{x \to 0} (\ln(x+1)) = 0$$
$$\underset{0}{\sim} x \times \ln(|x|)$$

Or $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln(|x|)) = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)) = 0$. Comme $f$ n'est pas définie en $0$, on va poser $f(0) = 0$ ce qui garantira la continuité de $f$ en $0$. $f$ est donc finalement continue sur $]-1;+\infty[$.

### Critère séquentiel

**Proposition 155**

- Soit $(a, L_f) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$. Soient $f$ une fonction numérique définie sur $D_f$, une partie de $\mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D_f$. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)) = L_f$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = a$ alors $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(f(U_n)) = L_f$.
- Soient $f$ une fonction numérique définie sur I, I intervalle de réel non réduit à un point et $a$ un point de I. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I. Si $f$ est continue en $a$ et si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = a$ alors $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(f(U_n)) = f(a)$.

☞ **Mise en garde :**

Reprenons les notations de la précédente définition. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x))$ n'existe pas et si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D_f$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(U_n) = a$ alors il est possible que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(f(U_n))$ existe. On peut prendre $(\sin(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ comme contre-exemple car $(\sin(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(n\pi) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(\sin(x))$ n'existe pas. On peut prendre aussi n'importe quelle fonction définie en $a$ admettant une limite à gauche et une limite à droite en $a$ différentes toutes les deux de $f(a)$ et prendre tout simplement comme suite la suite constante $(f(a))_{n\in\mathbb{N}}$. $(f(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(a) = a$ mais $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x))$ n'existe pas.

☛ **Remarque :**

- Soit $f$ une fonction numérique d'une variable réelle. Appelons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Si $f$ tend vers une limite en $+\infty$ alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x))$. L'étude de $f$ permet donc de conclure sur la nature de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soient $l$ un réel et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $l$. On peut alors affirmer d'après cette proposition, que $(\cos(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $\cos(l)$, $(|U_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $|l|$...
- On se sert de cette proposition pour l'étude des suites définies par récurrence par $(U_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu que si L était la limite d'une telle suite et si $f$ est continue en L alors on a : $f(L) = L$.

■ **Méthode:**

On utilise fréquemment la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point donné ou bien n'est pas continue. Reprenons les notations de la proposition. On peut conclure que $f$ n'a pas de limite en $a$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. On trouve deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $a$ alors que les suites $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et n'ont pas la même limite.
2. On trouve une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $a$ telle que $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

**Proposition 156**

- Soient $(a, l_f) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et $f$ une fonction numérique définie sur $D_f$ une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est définie au voisinage de $a$. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$ existe et vaut $l_f$ si et seulement si, pour toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D_f$ convergeant vers $a$, $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $l_f$.
- Soient $f$ une fonction numérique définie sur I, I intervalle de réel non réduit à un point et $a$ un point de I. $f$ est continue en $a$ si et seulement si, pour toute suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers $a$, $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et converge vers $f(a)$.

## ➤ *Exercice* :

*Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cos(x))$ *n'existe pas.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

- On va chercher deux suites tendant vers l'infini dont les cos ne donnent pas la même chose. Prenons les suites suivantes :

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\pi n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (V_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

  $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. D'autre part :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } \cos(U_n) = 1 \quad \text{et} \quad \cos(V_n) = 0.$$

  On en déduit que $(\cos(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1$ et $(\cos(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $0$.
- Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cos(x))$ existe, on appelle $L$ cette quantité. Comme $(\cos(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on en déduit, par le critère séquentiel, que $L$ vaut $1$. Comme $(\cos(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on en déduit, par le critère séquentiel, que $L$ vaut $0$. Par unicité de la limite, on en déduit que c'est absurde. cos n'admet donc pas de limite en $+\infty$.

Vous pouvez de la même manière montrer qu'une fonction périodique non constante n'admet pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$, c'est un exercice très classique !

### 3.3.3 Limite et ordre

Toute cette partie ressemble fortement au paragraphe "Limite et ordre" du chapitre "Suite". Les propositions sont très similaires. La grande différence est qu'on s'intéresse aux problèmes de convergence en $+\infty$ pour les suites et en n'importe quel point de l'ensemble de définition pour les fonctions.

#### Limite et monotonie

Ne pas hésiter à relire le théorème de la limite monotone des suites avant de lire les proposition ci-dessous (qui porte d'ailleurs le nom de théorème de la limite monotone)

**Proposition 157**

Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tel que $a < b$ et $f : ]\,a,b\,[ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante. On a :

- Si $f$ est majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} (f(x))$ existe et vaut $\sup\limits_{]a,b[}(f)$.
- Si $f$ n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} (f(x)) = +\infty$.
- Si $f$ est minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} (f(x))$ existe et vaut $\inf\limits_{]a,b[}(f)$.
- Si $f$ n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} (f(x)) = -\infty$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Prenons désormais une fonction décroissante sur $]\,a,b\,[$, on l'appelle $g$. $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} (g(x))$ existe, c'est $\inf\limits_{]a,b[}(g)$ en cas de minoration, $-\infty$ sinon. $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} (g(x))$ existe, c'est $\sup\limits_{]a,b[}(g)$ en cas de majoration, $+\infty$ sinon.

**Proposition 158**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f : ]\,a,b\,[ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit $x_0 \in ]\,a,b\,[$. $f$ admet en $x_0$ une limite à gauche et une limite à droite et :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} (f(x)) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \longrightarrow x_0^+} (f(x)).$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Avec $g$ décroissante sur $]\,a,b\,[$, on obtient que $g$ admet en $x_0$ une limite à gauche et une limite à droite et :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} (g(x)) \leqslant g(x_0) \leqslant \lim_{x \longrightarrow x_0^-} (g(x)).$$

### Information apportée par la limite

On va voir dans cette partie comment exploiter, localement, les informations que l'on aurait sur une éventuelle limite.

**Proposition 159**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f$ une fonction numérique à variable réelle définie au voisinage de $a$.

- Si $f$ a une limite finie, notée $L$, en $a$ et si $L$ est non nul alors $f$ ne s'annule pas et garde le signe de $L$ sur un voisinage de $a$.
- En particulier, si $a$ est un réel et $f$ est continue en $a$ et $f(a)$ est non nul alors $f$ ne s'annule pas et garde le signe de $f(a)$ sur un voisinage de $a$.

☛ **Remarque :**

Reprenons les notations de la précédente proposition. Cette dernière est très utile pour diviser par $f(x)$ pour tout $x$ d'un voisinage de $a$ lorsque $f$ a une limite finie non nulle en $a$. Proposition à retenir !

♣) **Corollaire 160 :**

Soient $(a, b, c) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^2$ et $f$ une fonction numérique à variable réelle définie au voisinage de $a$.

- On suppose que $f$ a une limite finie, notée $l$, en $a$. Si $c < l < b$ alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $a$ tel que $\forall x \in \mathcal{V}, c < f(x) < b$.
- En particulier, si $a$ est un réel et $f$ est continue en $a$ et $c < f(a) < b$ alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $a$ tel que $\forall x \in \mathcal{V}, c < f(x) < b$.

### Passage à la limite dans les inégalités

Dans cette partie, on fait le contraire, on a des informations locales sur notre fonction et on voudrait en tirer quelques conséquences sur les limites.

**Proposition 161**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f$ une fonction numérique à variable réelle. Si $f$ a une limite finie en $a$ et si $f$ est positive sur un voisinage de $a$, on a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) \geqslant 0$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Si $f$ est une fonction strictement positive sur un voisinage de $a$ et admet une limite finie en $a$ , alors on n'a pas forcément $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) > 0$. De manière générale, on peut juste affirmer que : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x)) \geqslant 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ fournit un contre-exemple.

**Proposition 162**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que $f$ et $g$ soient définies au voisinage de $a$ et telles que $f \leqslant g$ sur un voisinage de $a$ alors :

1. Si $f$ et $g$ ont des limites finies en $a$, on a alors :
$$\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) \leqslant \lim_{x \longrightarrow a} (g(x)).$$
2. Si $\lim_{x \longrightarrow a} (g(x)) = -\infty$ alors $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = -\infty$.
3. Si $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) = +\infty$ alors $\lim_{x \longrightarrow a} (g(x)) = +\infty$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition.

- Si $f$ et $g$ vérifient que $f < g$ sur un voisinage de $a$ et que $f$ et $g$ ont des limites finies en $a$ alors on n'a pas forcément $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) < \lim_{x \longrightarrow a} (g(x))$. De manière générale, on peut juste affirmer que : $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) \leqslant \lim_{x \longrightarrow a} (g(x))$. On peut prendre $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ en $+\infty$ comme contre-exemple.
- On utilise souvent la première partie de cette proposition en prenant pour fonction $f$ (ou pour $g$) une constante. Ainsi, si $b_1$ et $b_2$ sont deux réels et si $f$ est une fonction telle que $\forall x \in \mathcal{V}, b_1 \leqslant f(x) \leqslant b_2$ avec $\mathcal{V}$ un voisinage de $a$ alors si $f$ a une limite finie en $a$ , on a :
$$b_1 \leqslant \lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) \leqslant b_2.$$
De nouveau, si on sait en plus que $\forall x \in \mathcal{V}, b_1 < f(x) < b_2$ alors on ne peut pas dire qu' a priori $b_1 < \lim_{x \longrightarrow a} (f(x)) < b_2$ soit vrai.
- Dire que $\lim_{x \longrightarrow a} (g(x)) = +\infty$ n'entraîne rien sur une éventuelle convergence de $f$ en $a$. On peut prendre les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto x$ comme contre-exemple.

### Limite par encadrement

**Théorème 163**

**Théorème des gendarmes (ou d'encadrement).**
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient $f, g$ et $h$ trois fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que $f$, $g$ et $h$ soient définies au voisinage de $a$. Si $f \leqslant g \leqslant h$ sur un voisinage de $a$ et si $\lim_{x \longrightarrow a} (f(x))$ et $\lim_{x \longrightarrow a} (h(x))$ existent, sont finies et égales alors $g$ admet une limite fine en $a$ et $\lim_{x \longrightarrow a} (g(x))$ vaut $\lim_{x \longrightarrow a} (h(x))$.

☞ **Mise en garde :**

On reprend les notations de la précédente proposition. Si $f$ et $h$ ne convergent pas vers la même limite, on ne peut appliquer le théorème des gendarmes. On ne peut pas affirmer que $g$ admet une limite fine en $a$. Par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}^+, -2 \leqslant (-1)^x \leqslant 1$ et $x \mapsto (-1)^x$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

**Proposition 164**

Soit $(a, l) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ telles que $f$ et $g$ soient définies sur un voisinage de $a$.

- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$ existe et vaut $0$ et s'il existe $\mathcal{V}$, un voisinage de $a$, telle que $\forall x \in \mathcal{V}, |f(x) - l| \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f(x))$ existe et vaut $l$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x))$ existe et vaut $0$ et si $f$ est bornée au voisinage de $a$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} (g(x)f(x))$ existe et vaut $0$.

☛ **Remarque :**

Utiliser le théorème des gendarmes ou ses corollaires est très classique lorsque la fonction fait une notion de partie entière, du cosinus, du sinus. Ce sont des fonctions qu'on a souvent l'habitude d'encadrer.

## ➤ *Exercice :*

*Évaluer, si elle existe,* $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On vous rappelle que, pour tout réel $\alpha$, on a : $\lfloor \alpha \rfloor \leqslant \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1$ ce qui entraîne en particulier que : $\alpha - 1 \leqslant \lfloor \alpha \rfloor \leqslant \alpha$ pour tout réel $\alpha$. Pour tout réel $x$ strictement positif, on a donc :

$$\frac{1}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

ce qui donne, par positivité de $x$, ces inégalités : $1 - x \leqslant x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$. Or $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = \lim\limits_{x \to 0} (1) = 1$ donc, par le théorème des gendarmes, on peut affirmer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$ existe et vaut $1$. De même, en jouant un peu à gauche de $0$, on obtient que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$ existe et vaut $1$. Comme $x \mapsto x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ n'est pas définie en $0$ et qu'elle a la même limite à gauche et à droite, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$ existe et vaut $1$. Par somme, la limite recherchée existe et vaut donc $0$.

### 3.3.4 Théorèmes généraux de continuité

**Image d'un intervalle**

**Théorème 165**

**Théorème des valeurs intermédiaires**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Soit $h$ une fonction numérique à variable réelle continue sur $[a, b]$. Si $z$ est un réel compris entre $h(a)$ et $h(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = z$.

☛ **Remarque :**

- Ne pas oublier l'hypothèse de continuité. Par exemple, on a $\lfloor 0 \rfloor \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \lfloor 1 \rfloor$ et pourtant : $\forall x \in [0, 1], \lfloor x \rfloor \neq \dfrac{1}{2}$.
- Notons cependant que ce théorème ne caractérise pas les fonctions continues. Cela signifie qu'il peut être vraie pour des fonctions non continues même si il n'est pas vraie en général pour les fonctions non continues.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est donc un intervalle. La nature de l'intervalle n'est pas nécessairement préservée. Par exemple, $[0, 2\pi[$ est un intervalle ouvert, $[-1, 1]$ est fermé et $\cos([0, 2\pi[) = [-1, 1]$.
- Ce théorème permet donc de démontrer l'existence d'une solution à une équation en utilisant juste la continuité (ce qui est assez facile à obtenir en général) sans avoir à calculer la solution. C'est particulièrement utile pour démontrer qu'une équation a une solution dans le cas où l'on n'a pas d'expression explicite de cette solution. Cela permet de définir une suite implicite.
- On déduit aussi de ce théorème que, sur un intervalle, alors une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant et une fonction continue qui change de signe s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

♣) **Corollaire 166 :**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Soit $h$ une fonction numérique à variable réelle continue sur $[a, b]$. Si $h(a) \times h(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$.

✌ **Exemple :**

On déduit facilement de ce corollaire que tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

### Image d'un segment

**Théorème 167**

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leqslant b$ et $h$, une fonction numérique à variable réelle, continue sur $[a, b]$.

- $h$ possède alors un maximum $M$ et un minimum $m$ sur $[a, b]$. Il existe donc $x_0$ dans $[a, b]$ tel que $h(x_0) = M$ et $y_0$ dans $[a, b]$ tel que $h(y_0) = m$, autrement dit, il existe deux éléments $x_0$ et $y_0$ de $[a, b]$ tels que $h([a, b]) = [h(y_0), h(x_0)]$.
- On dit que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment ou qu'une fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.
- Le cas particulier des fonctions monotones est classique :
  - Si on sait en plus que $h$ est croissante alors $h([a, b])$ est $[h(a), h(b)]$.
  - Si on sait en plus que $h$ est décroissante alors $h([a, b])$ est $[h(b), h(a)]$.

### Théorème de la bijection

**Théorème 168**

**Théorème de la bijection continue**
Soit $f$ une fonction numérique définie sur $I$. Si $f$ est strictement monotone et continue sur $I$ alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. $f$ est réalise une bijection de $I$ sur $f(I)$.
3. $f^{-1}$ est strictement monotone et son sens de variation est celui de $f$.
4. $f^{-1}$ est continue.
5. $\forall\, y \in f(I), \exists\,!\, x \in I$ tel que $f(x) = y$.

☞ **Mise en garde :**

Deux mises en garde concernant ce théorème :

1. N'oubliez pas la condition "$y \in f(I)$". L'équation, d'inconnue $x$ réel positif, $\sqrt{x} = -2$ n'a pas de solution même si $x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective !
2. Le $y$ du précédent théorème ne doit pas dépendre de $x$. En introduisant la fonction $g : x \mapsto f(x) - y$, on peut toujours se ramener à un problème de recherche d'antécédent de $0$ et éviter ainsi ce danger. On utilise alors le théorème de la bijection continue dans ce cas particulier : si $g$ est continue et strictement monotone sur $D$ alors l'équation, d'inconnue $x$ élément de $D$, $g(x) = 0$ a une unique solution si $0$ appartient à $g(D)$ et zéro solution si $0$ n'appartient pas à $g(D)$.

■ **Méthode:**

Résumons un peu les choses. Voici trois idées qui vous permettront de prouver qu'une équation a (ou non) des solutions :

- **On la résout !**
  C'est la base et c'est à essayer avant de se jeter sur le théorème de la bijection continue. On essaye tout simplement de résoudre notre équation ce qui est facile si c'est une équation du second degré ou une équation faisant intervenir une fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques comme ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x \mapsto x^2$. Si cela n'aboutit pas, on passe à la suite !
- **Avec le TVI.**
  On réécrit notre équation sous la forme $f(x) = 0$, on prouve la continuité de $f$, on cherche deux réels $a$ et $b$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé. On pourra alors conclure que notre équation a au moins une solution. Par contre, si on se demande combien de solutions a notre équation alors inutile de s'attarder, le TVI ne donne pas le nombre de solution.
- **Le théorème de la bijection continue**
  Si on veut savoir le nombre de solution de notre équation, le TVI ne suffira pas. Vous aurez besoin du théorème de la bijection continue. Suivez simplement ces quelques étapes :

  1. Écrivez votre équation sous la forme $y = f(x)$ avec $y$ fixé (i.e. $y$ ne dépendant pas de $x$, le plus simple étant $0$) et $x$ l'inconnue balayant un certain ensemble $(c, d)$.

  2. Prouvez la continuité et la stricte monotonie de $f$.

  3. Expliciter $f((c, d))$ et notez si $y$ appartient ou non à $f((c, d))$.

  Vous pourrez alors conclure que votre équation a précisément une et une seule solution si $y$ appartient à $f((c, d))$ et n'a pas de solution sinon.

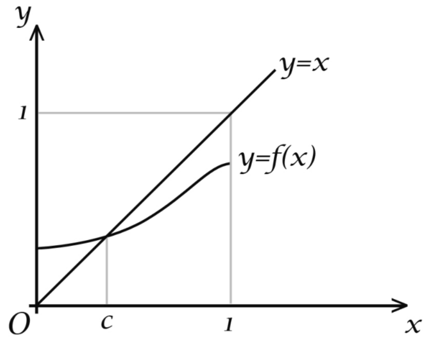
➤ ***Exercice :***

1. *Soit* $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ *une fonction continue. Montrer que* $f$ *admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément* $x$ *de* $[0, 1]$ *tel que* $f(x) = x$.
2. *Soient* $n$ *un entier naturel non nul et* $(E_n)$ *l'équation suivante d'inconnue* $x$ *:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} = 1.$$

*Montrer que* $(E_n)$ *admet des solutions et déterminer le nombre de solutions de* $(E_n)$.

1. Un dessin pour illustrer notre propos :




On voit très bien dessus que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{id}$ se croisent. Pour le prouver, on introduit la fonction suivante : $g : x \mapsto f(x) - x$. Soit $x$ un élément de $[0,1]$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Or $g(0)$ est positif car $f(0)$ l'est puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$ par définition de $f$ et $g(1)$ est négatif puisque $f(1) - 1$ l'est car $f([0,1]) \subset [0,1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, applicable à $g$ car $g$ est continue sur $[0,1]$, il existe $x$ appartenant à $[0,1]$ tel que $g(x) = 0$ ce qui entraîne que $f$ a au moins un point fixe.

2. On veut compter le nombre de solutions, on va donc partir sur du théorème de la bijection continue. On introduit la fonction $f$ suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - 1$$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0;-1;\cdots;-2n\}$ (ensemble que l'on va noter $A$) par quotient et somme et, pour tout réel $x$ de $A$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+2n)^2}.$$

Par somme, $f'$ est donc strictement négative (Ne pas conclure pour autant que $f$ est strictement décroissante car $A$ n'est pas un intervalle) ce qui justifie ce tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2n$ | | $-2n+1$ | $\cdots$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $\cdots$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $-1$ |

On vous laisse justifier toutes les limites, après tout vous êtes grands ! Poursuivons :

- Soit $k \in \{-2n;-2n+1;\cdots;-1\}$. $f$ est continue et strictement décroissante sur $]k;k+1[$ donc d'après le théorème de la bijection continue, $f$ établit une bijection de $]k;k+1[$ sur $\left]\lim\limits_{\substack{x\to k+1\\x<k+1}}(f(x));\lim\limits_{\substack{x\to k\\x>k}}(f(x))\right[$ i.e. $\mathbb{R}$. Or $0$ est un réel (en voilà un scoop !), il existe donc un unique $x_k$ dans $]k;k+1[$ tel que $f(x_k) = 0$.
- Pour les mêmes raisons, $f$ établit une bijection de $]-\infty;-2n[$ sur l'intervalle $]-\infty;-1[$. Or $-1 < 0$ donc $0$ n'appartient pas à $]-\infty;-1[$ et $(E_n)$ n'a pas de solution sur $]-\infty;-2n[$.
- Et toujours pour les mêmes raisons, $f$ établit aussi une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-1;+\infty[$. Or $0$ appartient à $]-1;+\infty[$ donc $(E_n)$ a une unique solution sur $]0;+\infty[$.

On n'a plus qu'à compter : $(E_n)$ a exactement $2n+1$ solutions.

## 3.4 Notions de dérivabilité

Désormais et jusqu'à la fin de cette partie, $D$ sera une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $I$ non réduit à un point. Cet intervalle contient un élément appelé $a$ ($a$ peut donc être éventuellement une borne de $I$).

### 3.4.1 Dérivabilité en un point

**Définition**

**Définition 169**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On appelle taux d'accroissement de $f$ en $a$ la fonction définie sur $D\backslash\{a\}$ par :
$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
- On dit que $f$ est dérivable en $a$ si son taux d'accroissement en $a$ admet une limite finie en $a$.
- Si $f$ est dérivable en $a$, alors on appelle nombre dérivé de $f$ en $a$ la limite en $a$ du taux d'accroissement de $f$ en $a$. Cette quantité se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\left[\frac{d}{dx}(f(x))\right]_{x=a}$. Sous réserve d'existence, on a donc :
$$f'(a) = \lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

☛ **Remarque :**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Par composition, on prouve que $f$ est dérivable en $a$ si $\lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ existe et on a alors : $f'(a) = \lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$. A vous de choisir entre $\lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ et $\lim_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$, cela revient au même !

☞ **Mise en garde :**

Il faut bien noter que l'opération de dérivation agit sur les fonctions et non sur les nombres. Pas de $(\cos(1))'$ mais du $\cos'(1)$, pas de $(x\cos(x))'$. D'ailleurs $\cos'(2^2)$ est $-\sin(4)$ et pas $-4\sin(4)$ qui serait obtenu en dérivant $x \mapsto \cos\left(x^2\right)$ en 2.

✌ **Exemple :**

En cherchant les limites des taux d'accroissements, on prouve aisément que :

1. la fonction $f$ constante sur $D$ est dérivable en tout point de $D$ et pour tout $a \in D$, on a : $f'(a) = 0$.

2. la fonction identité sur D, notée $\mathrm{id}_D$, est dérivable en tout point de D et pour tout $a \in D$, on a : $\mathrm{id}_D'(a) = 1$.
3. la fonction racine carrée est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour tout réel strictement positif $a$, on a : $\left[\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right]_{x=a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
4. $f : x \mapsto ax+b$ ( avec $a$ et $b$ deux réels) est dérivable en tout point et, pour tout réel $x$, on a : $f'(x) = a$.
5. $f : x \mapsto x^n$ ( avec $n$ un entier naturel) est dérivable en tout point et, pour tout réel $x$, on a : $f'(x) = nx^{n-1}$.

On va faire la preuve pour la racine carrée : On prend un réel $a$ strictement positif et on introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\times(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

Cela prouve que $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. On en déduit que $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

### Dérivabilité à gauche et à droite

Ne pas hésiter à faire le parallèle avec la notion de continuité à gauche et à droite ! Dans ce paragraphe, $f : D \to \mathbb{R}$ désignera une fonction.

**Définition 170**

On dit que $f$ est dérivable à droite en $a$ (resp. à gauche en $a$) si son taux d'accroissement en $a$ admet une limite finie à droite en $a$ (resp. à gauche en $a$). On note alors $f_d'(a) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ (resp. On note alors $f_g'(a) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^-}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$).

**Proposition 171**

- Si $a$ n'est pas une borne de I alors $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$ et $f_g'(a) = f_d'(a)$. On a alors $f'(a) = f_d'(a) = f_g'(a)$.
- Si $a$ est la borne inférieure (resp. supérieure) de I alors $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à à droite en $a$ (resp. dérivable à à gauche en $a$).

✌ **Exemple :**

$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$ est dérivable à gauche et à droite en $0$ mais n'est pas dérivable en $0$. En effet, à gauche, on obtient une limite de taux d'accroissements de $-1$ et on obtient $1$ à droite : On fait la preuve à gauche en prenant $x$ et $a$ deux réels strictement négatifs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} &= \frac{|x|-|a|}{x-a} \\ &= \frac{-x+a}{x-a} \\ &= -1. \end{aligned}$$

**Liens avec la continuité**

**Proposition 172**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
- Si $f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a$ alors $f$ est continue à droite (resp. à gauche) en $a$.

☛ **Remarque :**

La dérivabilité est une hypothèse beaucoup plus forte que celle de continuité. Si une fonction est continue en un point, elle n'est pas nécessairement dérivable en ce point, deux exemples :

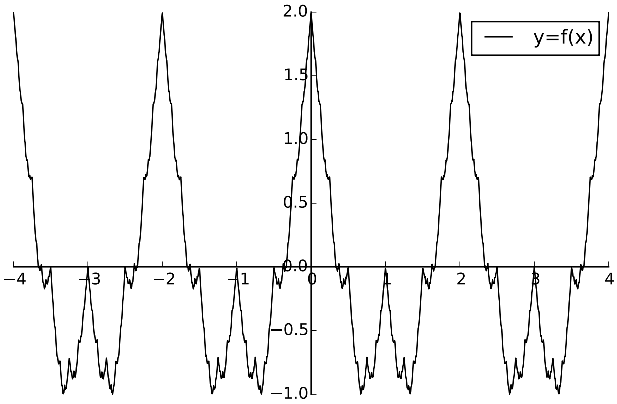
- La fonction racine carrée est continue en zéro mais n'y est pas dérivable.
- Il existe des fonctions continues en tout point mais nulle part dérivable. C'est le cas de la fonction Weierstrass qui peut être défini comme suit :

$$f : x \mapsto \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos\left(2^k \pi x\right) \right)$$

Voici son graphe :

**Interprétation graphique**

On munit jusqu'à la fin du chapitre le plan d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.




**Définition 173**

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a$ un élément de $D$, $M_0(a, f(a))$ un point du plan. Si $f$ est dérivable en $a$ alors on appelle tangente en $M_0$ à $C_f$, courbe représentative de $f$, la droite qui a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Proposition 174**

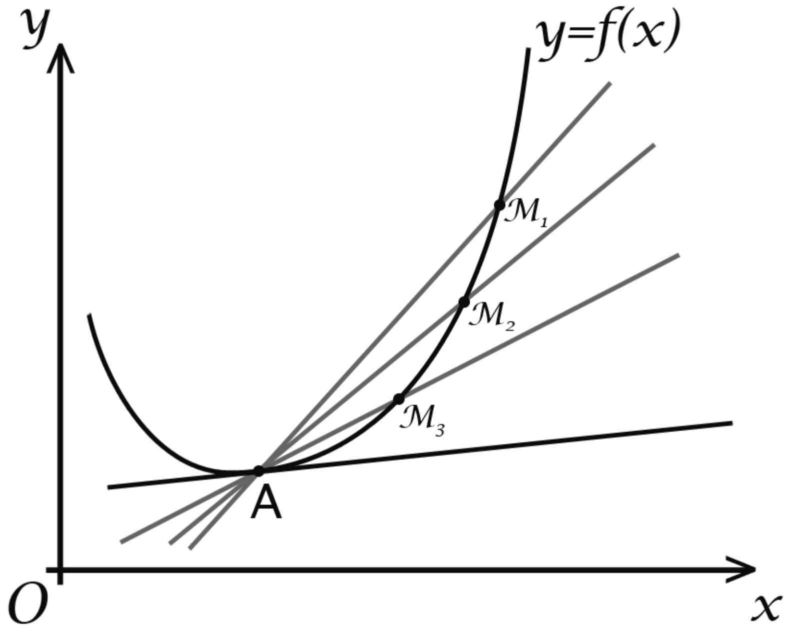
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $a$ et $x$ deux éléments de $D$, $M_0(a, f(a))$, $M(x, f(x))$ deux points de la courbe représentative de $f$.

- Si $f$ est dérivable en $a$ alors la famille de droite $(MM_0)$ admet une position limite quand $x$ tend vers $a$, c'est la tangente en $M_0$ à $C_f$. La position de cette dernière par rapport à $C_f$ est donnée par l'étude du signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ avec $x$ élément de $D$.
- Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \left( \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \pm\infty$ alors on dit que $C_f$ possède au point d'abscisse $a$ une tangente verticale d'équation $x = a$.

✎) **Illustration :**

☛ **Remarque :**

On utilise les notations précédentes. Quand $f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a$ alors la famille de droite $(MM_0)$ admet une position limite quand $x$ tend vers $a$ par valeur supérieure (resp. par valeur inférieure), c'est la demi-tangente à droite (resp. à gauche) en $M_0$ à $C_f$ qui est la droite d'équation : $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$ (resp. $y = f(a) + f'_g(a)(x - a)$).




### 3.4.2 Dérivabilité sur un ensemble

**Fonction dérivée**

**Définition 175**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D.
- Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f, la fonction, notée $f'$ ou $\frac{df}{dx}$, définie sur D par :

$$f' : \begin{cases} D & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f'(x) \end{cases}$$

- On note $\mathcal{D}^1(D)$ l'ensemble des fonctions dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Voici un lien fort entre dérivabilité et continuité :

**Proposition 176**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable sur D alors f est continue sur D.

**Dérivées usuelles**

On note dans le tableau suivant des fonction usuelles f, elles sont définies sur $D_f$ et dérivables sur $D_{f'}$. On donne aussi l'expression des dérivées $f'$ des ces fonctions. On pourra constater que $D_f$ et $D'_f$ sont souvent confondues mais que ce n'est pas le cas pour les fonctions racine carrée et valeur absolue.

On fera donc particulièrement attention pour donner des ensembles de dérivabilité de fonction qui font intervenir dans leur expression une racine carrée ou une valeur absolue
Avant de donner ce tableau, signalons que $s$ désignera un réel, $n$ un entier naturel et $a$ un réel strictement positif.

| $D_f$ | $f$ | $D_{f'}$ | $f'$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \|x\|$ | $\mathbb{R}^\star$ | $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ |
| $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto x^s$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto sx^{s-1}$ |
| $\mathbb{R}_+$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\sin(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ |
| $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $x \mapsto \tan(x)$ | $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ |
| $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto a^x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \ln(a)a^x$ |

## ➤ *Exercice :*

*Calculer la dérivée de* $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x^2+2})}\right)^2$.

Pour tout réel $x$, on a $x^2+2 > 0$ (la racine ne pose pas de problème de dérivabilité), $\sqrt{x^2+2} > 0$ (pas de souci avec le ln) et $\sqrt{x^2+2} \neq 1$ (cela passe donc pour le dénominateur). Par composition, $f$ est donc dérivable. Soit $x$ réel, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{\left(\ln(\sqrt{x^2+2})\right)^3} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \times 2x \\ &= -\frac{2x}{(x^2+2) \times \left(\ln(\sqrt{x^2+2})\right)^3} \end{aligned}$$

### 3.4.3 Dérivabilité et opérations

**Opérations algébriques sur les fonctions dérivables**

**Proposition 177**

Soit $\lambda$ un réel. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $a$ alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda f$ sont dérivables en $a$. D'autre part, on a :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\ ,\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \text{ et}$$

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a).$$

- On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables sur $D$ alors $f+g$, $f \times g$ et $\lambda f$ sont dérivables sur $D$. D'autre part, on a :

$$(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f' \text{ et } (f \times g)' = f' \times g + g' \times f.$$

**Composition**

**Proposition 178**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $h_1$ et $h_2$ deux fonctions définies respectivement au voisinage de $f(a)$ et sur $D_2$ une partie de $\mathbb{R}$. Si $f(D) \subset D_2$ alors :

- si $f$ est dérivable en $a$ et si $h_1$ est dérivable en $f(a)$ alors $h_1 \circ f$ est dérivable en $a$ et on a : $(h_1 \circ f)'(a) = h_1'(f(a)) \times f'(a)$.
- si $f$ est dérivable sur $D$ et si $h_2$ est dérivable sur $D_2$ alors $h_2 \circ f$ est dérivable sur $D$ et on a : $(h_2 \circ f)' = (h_2' \circ f) \times f'$.

✌ **Exemple :**

$s$ désigne un réel, $n$ un entier naturel. Soient $u, v$ et $w$ trois fonctions dérivables sur $D$. On suppose que $v$ est strictement positive sur $D$ et que $w$ ne s'annule pas sur $D$. On a :

1. $u^n$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $nu' \times u^{n-1}$.
2. $\exp(u)$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $u' \times \exp(u)$.
3. $\sqrt{v}$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $\dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$.
4. $v^s$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $sv' \times v^{s-1}$.
5. $\ln(|w|)$ est dérivable sur $D$, sa dérivée est $\dfrac{w'}{w}$.

### Quotient et dérivée

**Proposition 179**

Soit $\lambda$ un réel. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- On suppose que $f$ est dérivable en $a$ et que $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en $a$. D'autre part, $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)$ est $-\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.
- On suppose que $f$ est dérivable sur $D$ et que $f$ ne s'annule pas sur $D$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur $D$. De plus, $\left(\frac{1}{f}\right)'$ est $-\frac{f'}{f^2}$.
- On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $a$ et que $f(a) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en $a$. D'autre part, on a :

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - f'(a)g(a)}{f(a)^2}.$$

- On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables sur $D$ et que $f$ ne s'annule pas sur $D$ alors $\frac{g}{f}$ est dérivable sur $D$. D'autre part, on a :

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2}.$$

☞ **Mise en garde :**

- Il est tout à fait possible de composer, d'additionner, de multiplier ou de quotienter des fonctions non dérivables et d'obtenir une fonction dérivable ! Un exemple tout bête : $x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{x}$ est dérivable en $0$ alors que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $0$.
- Les théorèmes généraux ne permettent donc pas systématiquement de dire si une fonction est dérivable ou non. Il faut alors, pour certains points de l'ensemble de définition, revenir à l'étude de la limite du taux d'accroissement.

### ➤ *Exercice :*

*Étudier la dérivabilité de $f$ avec :* $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{(\sin(\pi x))^2}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$

Pour tout $x$ différent de $1$, on a $x-1 \neq 0$. Par quotient, $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout réel $x$ différent de $1$, on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \left(\frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right)^2 \quad \text{avec } h : x \mapsto \sin(\pi x).$$

Or $h$ est dérivable, par produit de limites, on en déduit :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = (h'(1))^2$$

Ceci prouve que $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = \pi^2$. $f$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

### Dérivée d'une fonction réciproque

**Proposition 180**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Posons $b = f(a)$.

- Si $f$ est dérivable en $a$ et si $f'(a) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$ et on a : $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
- Si $f$ est dérivable sur $D$ et si $f'$ ne s'annule pas sur $D$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur $f(D)$ et on a :

$$\forall\, x \in f(D), \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

### ➤ *Exercice* :

*Étudier la dérivabilité de* arcsin. *On rappelle que* arcsin *est la réciproque de* sin *restreinte à* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

.............................................................................................................

On appelle $f$ la fonction sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de la bijection continue (applicable car $f$ est continue et strictement croissante). $f$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'$ est cos. Pour tout $x$ de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) \neq 0 &\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[. \end{aligned}$$

Cela prouve que arcsin est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$ soit $]-1; 1[$. D'après la formule précédente, pour tout $x$ de $]-1; 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

✌ **Exemple :**

- Pour tout entier naturel non nul $n$, $g_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout réel strictement positif $x$, on a : $g_n'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
- arccos et arcsin sont dérivables sur $]-1,1[$ et pour tout $y$ de $]-1,1[$, on a :

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{et} \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(On rappelle que arcsin comme arccos ne sont plus au programme des BCPST, ces formules ne sont donc pas au programme).

On prendra bien garde aux fonctions arcsin et arccos dont l'ensemble de dérivabilité n'est pas l'ensemble de définition. En résumé, pour un bcpst, il y a donc quatre fonctions particulièrement dangereuses concernant la dérivabilité : racine carrée, valeur absolue, arcsin et arccos.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition.

1. Sous réserve d'existence, $\left(f^{-1}\right)'$ est $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
2. Cette proposition est assez intuitive graphiquement quand on se souvient que les courbes représentatives de $f$ et $f^{-1}$ dans un repère orthonormée sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
3. On peut retrouver aussi facilement cette proposition en dérivant (attention à la composition !) l'égalité suivante : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$. Cela donne :

$$((f^{-1})' \circ f) \times f' = 1.$$

Ainsi, si $f'(x) \neq 0$, on obtient : $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$. On remplace après $f(x)$ par $y$ (et donc $x$ par $f^{-1}(y)$).

**Proposition 181**

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

### 3.4.4 Dérivées successives

**Définition 182**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que $f$ est deux fois dérivable en $a$ si $f$ est dérivable sur un voisinage de $a$ et si $f'$ est dérivable en $a$. On note $f''(a)$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}(a)$ ou $\left[\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))\right]_{x=a}$ la dérivée de $f'$ en $a$. On a donc sous réserve d'existence :
$$f''(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}\right).$$
- On dit que $f$ est deux fois dérivable sur I si $f$ est dérivable sur I et si $f'$ est dérivable sur I. On note $f''$ (ou $f^{(2)}$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ ) la dérivée de $f'$. On a alors : $f'' = (f')'$.

Après avoir défini dérivée et dérivée seconde, on définit par récurrence la notion de dérivée troisième, quatrième, cinquième...

**Définition 183**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n$ un entier naturel non nul. On définit par récurrence la dérivée $n$-ième de $f$. On pose $f^{(0)} = f$ et on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur I si $f$ est $n-1$ dérivable sur I si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$. On pose donc :
$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

✌ **Exemple :**

On peut dériver $\ln'$ (fonction dérivable par quotient) puis $\ln''$ (fonction dérivable par quotient) puis..., cela donne :
$$\ln' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}, \quad \ln'' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{-1}{x^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \ln''' : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{2}{x^3} \end{cases}$$

**Définition 184**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n$ un entier naturel.

- On dit que $f$ est de classe $\mathcal{D}^n$ sur $D$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $D$ et on note $\mathcal{D}^n(D)$ l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables sur $D$.
- On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $D$ (ou est $n$ fois continûment dérivable sur $D$ ) si $f$ est $n$ fois dérivable sur $D$ et si $f^{(n)}$ est continue sur $D$.
- On note $\mathcal{C}^n(D)$ l'ensemble des fonctions $n$ fois continûment dérivables. Ainsi, $\mathcal{C}^0(D)$ est l'ensemble des fonctions continue sur $D$ et $\mathcal{C}^1(D)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur $D$ dont la dérivée est continue sur $D$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions qui possède pour tout entier naturel $n$ une dérivée $n$-ième définie sur $D$.

✌ **Exemple :**

Toutes les fonctions usuelles (sauf la partie entière, les racines $n$-ième et la valeur absolue) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition. A noter que les racines $n$-ième et la valeur absolue sont tout de même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition privés de $0$.

☞ **Mise en garde :**

Une fonction dérivable est continue, cela ne signifie pas forcément qu'une fonction $f$ dérivable sur $D$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$. Pour que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$, il faut non seulement que $f'$ existe mais en plus que $f'$ (et pas $f$ qui serait automatique) soit continue sur $D$ : Cela n'est pas évident ! Prenons par exemple la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour prouver la dérivabilité en $0$, il faut revenir aux taux d'accroissements, on obtient que $f'(0)$ existe et vaut $0$) mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car on prouve que $f'$ n'est pas continue en $0$). En effet : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right)$ existe car c'est $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ qui vaut $0$ par le théorème des Gendarmes car on a le produit d'une fonction qui tend vers $0$, $x \mapsto x$, par une fonction bornée, $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit que :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Comme $\cos$ n'admet pas de limite en l'infini, on peut affirmer que $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $0$. Or $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ existe et vaut $0$ (encore le théorème des Gendarmes avec la forme

"produit de fonction bornée par fonction tendant vers 0). Par l'absurde, on en déduit $\lim_{x\longrightarrow 0}(f'(x))$ n'existe pas et en particulier que $f'$ n'est pas continue en $0$
Les fonctions dérivées ne sont donc pas nécessairement continues (ne pas confondre avec le fait que la dérivabilité d'une fonction entraîne sa continuité !).

☛ **Remarque :**

- On peut dire d'une fonction $f$ qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ ou bien qu'elle appartient à $\mathcal{C}^1(D)$ mais on ne dira pas qu'elle est $\mathcal{C}^1(D)$, $\mathcal{C}^1(D)$ est un ensemble de fonctions (même remarque bien sûr avec les autres ensembles).
- On peut dire d'une fonction $f$ qu'elle appartient à $\mathcal{C}^1(D)$ avec $D$ un ensemble, on ne dira pas qu'elle est $\mathcal{C}^1(a)$ pour dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a$ (même remarque bien sûr avec les autres ensembles).
- On n'a pas défini $\mathcal{D}^\infty(D)$ car c'est en réalité $\mathcal{C}^\infty(D)$.
- A noter tout de même que les fonctions dérivées sont continues sur un ensemble dense de leur ensemble de définition et qu'elles vérifient le théorème des valeurs intermédiaires (Remarque bien au-delà du programme).
- On a : $\mathcal{C}^0(D) \supset \mathcal{D}^1(D) \supset \mathcal{C}^1(D) \supset \mathcal{D}^2(D) \supset \mathcal{C}^2(D) \supset \mathcal{D}^3(D) \supset \mathcal{C}^3(D) \supset \dots$
- Par contre, si $D \subset D_1$, le lien entre $\mathcal{D}^1(D_1)$ et $\mathcal{C}^1(D)$ n'est, par exemple, pas évident. On peut avoir des fonctions qui sont dérivable sur $D_1$ et ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$, des fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ mais qui ne sont pas dérivable sur $D_1$...

**Proposition 185**

Soient $\lambda$ un réel, $n$ un entier naturel et $I \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si $f$ et $g$ sont dérivables $n$ fois sur $I$ alors $f+g$, $f\times g$, $\lambda f$ sont aussi dérivables $n$ fois sur $I$ et on a :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

☛ **Remarque :**

On sait évaluer, sous réserve d'existence, la dérivée $n$-ième du produit, c'est la formule de Leibniz (qui n'est plus au programme des BCPST et qui se prouve facilement par récurrence) :

$$(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

**Proposition 186**

Soit $n$ un entier naturel. Soient $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ deux fonctions.
Si $f$ et $g$ sont dérivables $n$ fois sur leur intervalle de définition alors $g\circ f$ est $n$ fois dérivable sur $I$.

**Proposition 187**

Soient $\lambda$ un réel, $n$ un entier naturel et $I \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors $f+g$, $f\times g$, $\lambda f$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
- Si $f$ ne s'annule pas sur I et est dérivable $n$ fois sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable $n$ fois sur I.
- Si $f$ ne s'annule pas sur I et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

## ➤ *Exercice :*

*Soit* $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. *Montrer que* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *puis que, pour tout entier naturel* $n$, *il existe deux réels* $u_n$ *et* $v_n$ *(à expliciter) tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}.$$

..........................................................................................

$f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit. Pour tout entier naturel $n$, on appelle $P_n$ l'hypothèse suivante :

$$\text{" Il existe deux réels } u_n \text{ et } v_n \text{tels que :} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}} \text{ "}.$$

On pose $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Pour tout réel strictement positifs $x$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_0 + v_0 \ln(x)}{x^{0+1}} &= \frac{\ln(x)}{x}\\ &= f^{(0)}(x).\end{aligned}$$

$P_0$ est donc vraie. On suppose $P_n$ vraie pour un certain entier naturel $n$. Ainsi il existe deux réels $u_n$ et $v_n$ tels que $f^{(n)} : x \mapsto \dfrac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$. $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel strictement positif $x$, on a alors en dérivant $f^{(n)}$ les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{v_n \dfrac{x^{n+1}}{x} - (n+1)x^n u_n - (n+1)x^n v_n \ln(x)}{x^{2n+2}}\\ &= \frac{(v_n - (n+1)u_n) - (n+1)v_n \ln(x)}{x^{(n+1)+1}}\\ &= \frac{u_{n+1} + v_{n+1}\ln(x)}{x^{(n+1)+1}}\end{aligned}$$

en posant $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$. $P_{n+1}$ est donc vraie. Par le principe de récurrence, on vient donc de prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 /\ f^{(n)} : x \mapsto \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$$

avec $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$ et $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ pour tout entier naturel $n$. Pour tout entier naturel $n$, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{(n+1)!} &= -\frac{-(n+1)v_n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{v_n}{n!}\end{aligned}$$

$\left(\frac{v_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $-1$ et de premier terme $1$. On peut donc conclure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $((-1)^n \times n!)_{n\in\mathbb{N}}$. On injecte directement dans $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= v_n - (n+1)u_n \\ &= (-1)^n n! - (n+1)u_n.\end{aligned}$$

Introduisons la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{u_n}{n!}(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\begin{aligned}W_{n+1} - W_n &= \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+1} - \frac{u_n}{n!}(-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n n! - (n+1)u_n}{(n+1)!}(-1)^{n+1} + \frac{(n+1)u_n}{(n+1)!}(-1)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

et donc, par télescopage, pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$\begin{aligned}W_n &= \left(\sum_{k=1}^{n}(W_k - W_{k-1})\right) + W_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}\right) + \frac{u_0}{0!}(-1)^0 \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-n!}{k+1}\right)(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

### 3.4.5 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

#### Extremum et dérivé

**Proposition 188**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si $b$ n'est pas une borne de $I$ et si $f$ possède un extremum local en $b$ alors $f'(b) = 0$.

☛ **Remarque :**

1. La réciproque est fausse. $f_3 : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f_3'(0) = 0$ mais $f_3$ ne possède pas un extremum local en $0$.
2. Il faut bien vérifier la condition " $b$ n'est pas une borne de $I$ " de la proposition. Soit $h$ : $\begin{cases} [1,4] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3 \end{cases}$ admet un minimum en $1$ et un maximum en $4$ mais $h'(1) \neq 0$ et $h'(4) \neq 0$.

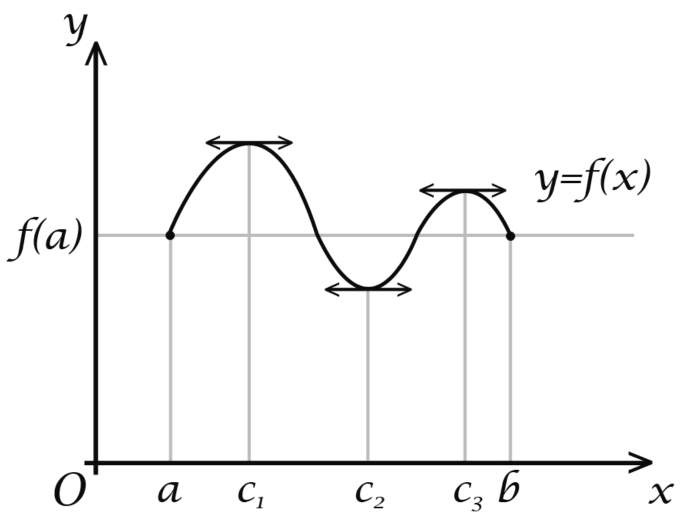
**Théorème de Rolle**

**Théorème 189**

**Théorème de Rolle**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$, soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
On suppose que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c$ dans $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Graphiquement, cela veut dire que la courbe représentative de $f$ possède au moins une tangente horizontale comme le montre le dessin de la page suivante :




➤ ***Exercice :***

*Soient* $a$ *et* $b$ *deux réels tels que* $0 < a < b$*. Soit* $f$ *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f$ *soit continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$ *et telle que* $f(a) = f(b) = 0$*. Montrer qu'il existe* $c \in ]a,b[$ *tel que* $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Comme on a un problème d'existence et qu'il y a de la dérivée qui traîne, on va chercher une dérivée qui s'annule. On ne veut pas appliquer le théorème de Rolle à $f$ car on ne veut pas de $f'(d) = 0$ mais du $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$. Comme $c$ est non nul, cela équivaut à :

$$\frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$$

et là, on pense à la dérivée d'un quotient ! Posons $\phi : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. On a $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc, par quotient, $\phi$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Or $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = 0$ puisque $\phi(a) = \dfrac{f(a)}{a}$ et $\phi(b) = \dfrac{f(b)}{b}$. On a donc $\phi(a) = \phi(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un élément $c$ de $]a, b[$ tel que :

$$\phi'(c) = 0$$

ce qui signifie que $\dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$ et entraîne que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$. Et voilà le travail !

☛ **Remarque :**

Il faut faire très attention aux hypothèses de ce théorème.

1. Le théorème de Rolle n'est généralement pas vrai si $f$ est dérivable sur $]a, b[$ mais simplement continue sur $]a, b]$.
2. Le théorème de Rolle n'est généralement pas vrai si $f$ est continue sur $[a, b]$ mais simplement dérivable sur $]a, b[\setminus\{\alpha\}$ avec $\alpha \in ]a, b[$.

### Théorème des accroissements finis

On généralise le théorème de Rolle avec le théorème suivant :

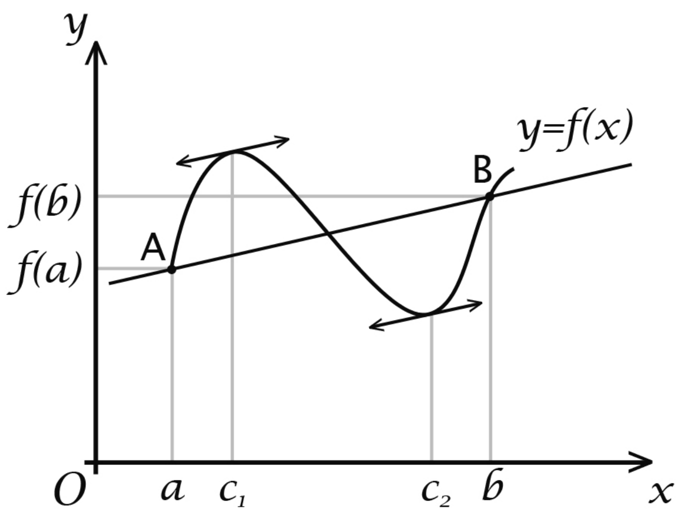
**Théorème 190**

**Théorème des accroissements finis**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c$ dans $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Graphiquement, cela veut dire qu'on peut trouver un point $C$ tel que la tangente en $C$ à la courbe représentative de $f$ soit parallèle à $(AB)$ comme le montre le dessin ci-dessous :




Une conséquence immédiate est l'inégalité des accroissements finis :

**Proposition 191**

**Inégalités des accroissements finis. (Hors-programme)**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe de plus un réel positif $M$ tel que $\forall x \in ]a, b[, |f'(x)| \leqslant M$ alors on peut affirmer que :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|\,.$$

☛ **Remarque :**

L'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme des BCPST1. Il faut donc savoir la démontrer si on veut l'utiliser.

## ➤ *Exercice :*

*Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :*

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

..........................................................................................

On reconnaît de la dérivée de la racine carrée et du taux d'accroissements de la racine carrée. On va probablement utiliser le théorème des accroissements finis. On pose :

$$f : x \mapsto \sqrt{x}.$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel strictement positifs $x$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. $f$ est continue sur $[n; n+1]$ et dérivable sur $]n; n+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe

$c_n \in ]n; n+1[$ tel que :

$$f'(c_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$f'$ est décroissante et $n < c_n < n+1$ donnent : $f'(n+1) \leqslant f'(c_n) \leqslant f'(n)$ d'où :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

### 3.4.6 Variations d'une fonction et signe de sa dérivée

Dans cette partie $J$ est un intervalle dont les extrémités sont $c$ et $d$ (qui ne sont pas forcément des éléments de $J$) avec $(c, d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. On note $\mathring{J}$ l'intervalle $]c, d[$.

**Proposition 192**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$ et dérivable sur $\mathring{J}$. On a :

- $f$ est constante sur $J$ si et seulement si $\forall x \in \mathring{J}, f'(x) = 0$.
- $f$ est croissante sur $J$ si et seulement si $\forall x \in \mathring{J}, f'(x) \geqslant 0$.
- $f$ est décroissante sur $J$ si et seulement si $\forall x \in \mathring{J}, f'(x) \leqslant 0$.

☞ **Mise en garde :**

- On est donc amené à résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathring{J}$ (ou bien l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathring{J}$ , inutile de faire les deux si on raisonne par équivalence) pour avoir les variations de $f$. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathring{J}$ n'a pas d'intérêt !
- Si le signe de $f'$ est difficile à obtenir et si $f$ est une fonction deux fois dérivable alors penser éventuellement à $f^{(2)}$ dont le signe donne le tableau de variations de $f'$ et peut faciliter l'étude du signe de $f'$.
- Ne pas oublier que la condition $J$ intervalle est fondamentale et nécessaire pour, à partir d'information sur le signe de la dérivée, trouver les variations de la fonction. Par exemple, la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement négative mais $f$ n'est pas décroissante. Autre exemple, la dérivée de la fonction $g$ suivante : $g : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est nulle mais $g$ n'est pas constante. On peut aussi prendre l'exemple de la fonction partie entière qui n'est pas constante mais dont la dérivée est nulle.

➤ ***Exercice :***

*Étudier les variations de* $f : x \mapsto x^2 \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f$ est impaire (à faire rapidement), on va donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit et composée. On a :

$$f' : x \mapsto 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Autant dire que le signe de $f'$ n'est pas évident à obtenir, explicitons $f''$ :

$$f'' : x \mapsto 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-2x}{1+x^2} + \frac{-2x(1+x^2)+2x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Quelle horreur ! ! ! On remarque qu'on n'a pas besoin de $f''$ pour avoir le signe de $f'$, on va factoriser d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = x \times \left(2 \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}\right).$$

On pose $h : x \mapsto \frac{f'(x)}{x}$, $h$ est dérivable par produit sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel strictement positif $x$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{2}{x^2+1} + \frac{-(1+x^2)+2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-3-x^2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $h'$ est strictement négative et donc que $h$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme, on a $\lim_{x\to+\infty}(h(x)) = 0$ car :

- On a $\frac{x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, on a donc : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = 0$.
- Par composition, on a $\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$.

On en déduit que $h$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par produit, $f'$ aussi sur $\mathbb{R}_+^*$. $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ par imparité).

**Proposition 193**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$ et dérivable sur $\mathring{J}$. On a :

- $f$ est strictement croissante sur $J$ si $\forall\, x \in \mathring{J}, f'(x) > 0$.
- $f$ est strictement décroissante sur $J$ si $\forall\, x \in \mathring{J}, f'(x) < 0$.

☛ **Remarque :**

On voit que la condition de stricte monotonie donnée dans la condition précédente n'est pas une condition nécessaire. la fonction $x \mapsto x^3$ est continue, dérivable et strictement croissante mais sa dérivée s'annule en $0$.

**Proposition 194**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$ et dérivable sur $\overset{\circ}{J}$. On a :

- Si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points alors $f$ est tout de même strictement croissante sur $J$.
- Si $f' < 0$ sauf en un nombre fini de points alors $f$ est tout de même strictement décroissante sur $J$.

# Partie 4

# Equivalents et développements limités

Dans tout ce chapitre, $a$ sera un réel, $\mathcal{V}$ un voisinage de $a$ et $n$ un entier naturel.

## 4.1 Les équivalents

Relire ce que donnent les relations de comparaisons pour les suites avant de relire ce paragraphe peut être très profitable !

### 4.1.1 Définitions

**Définition 195**

**Notations de Landau.**
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ sont définies au voisinage de $a$ et que $g$ ne s'annule pas sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $a$ ou, si jamais on a $g(a) = 0$ alors $f(a) = 0$ et $g$ ne s'annule pas sur $\mathcal{V} \setminus \{a\}$. On dit que $f$ est équivalente à $g$ et l'on note $f \underset{a}{\sim} g$ lorsque $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ existe et vaut $1$.

✌ **Exemple :**

Soit $f : x \mapsto -x^2 + 3x^4 + 7x^5$.
On a alors :

1. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 7x^5$
2. $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 7x^5$
3. $f(x) \underset{0}{\sim} -x^2$
4. $f(x) \underset{2}{\sim} 268$

car on prouve facilement que :

1. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{-x^2 + 3x^4 + 7x^5}{7x^5}\right)$ existe et vaut $1$ (Pour lever la forme indéterminée, on factorise par $7x^5$ au numérateur comme au dénominateur).

2. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{-x^2+3x^4+7x^5}{-x^2}\right)$ existe et vaut $1$ (Pour lever la forme indéterminée, on simplifie d'abord la fraction).
3. $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{-x^2+3x^4+7x^5}{268}\right)$ existe et vaut $1$ (Facile, ce n'est même pas une forme indéterminée).

**Proposition 196**

Soient $a$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, $n$ un entier naturel et $\lambda$ un réel non nul. On suppose qu'il existe un voisinage de $a$ sur lequel les fonctions utilisées dans cette proposition sont définies et ne s'annulent pas.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, on a alors :
  1. $g \underset{a}{\sim} f$
  2. $f^n \underset{a}{\sim} g^n$
  3. $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$
  4. $|f| \underset{a}{\sim} |g|$
  5. $f\times h \underset{a}{\sim} g\times k$
  6. $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{k}$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, on a alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $f$ et $g$ sont strictement positive sur un voisinage de $a$ alors : $(f)^\lambda \underset{a}{\sim} (g)^\lambda$.

■ **Méthode:**

On vient de voir qu'un équivalent d'un produit est le produit des équivalents. Les équivalents marchent donc très bien avec le produit et donc avec les puissances et les quotients. Ainsi, quand vous avez du produit, du quotient ou des puissances, commencez par chercher des équivalents des petits blocs puis faites vos produits, quotients, puissances.

☛ **Remarque :**

Un élève de BCPST ne possède pas de théorèmes généraux ni sur les sommes d'équivalents, ni sur le passage des équivalents au logarithme ni sur le passage des équivalents à l'exponentielle.

✌ **Exemple :**

- $x^4+5x \underset{0}{\sim} 5x$ et $x^3-5x \underset{0}{\sim} -5x+x^2$ mais on n'a pas : $x^4+5x+x^3-5x \underset{0}{\sim} x^2$
- $x^2+x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais on n'a pas : $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$.
- $1-\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} 1-\dfrac{1}{x}$ mais on n'a pas : $\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

☛ **Remarque :**

Équivalent et somme ne fonctionnent pas très bien ensemble, on a tout de même une petite proposition, c'est la prochaine !

**Proposition 197**

Soient $a$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, $f$ et $g$ deux fonctions numériques à variables réelles définies au voisinage de $a$ telles que $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$ existe et vaut $0$. On a alors :

$$f+g \underset{b}{\sim} f.$$

✌ **Exemple :**

Des croissances comparées, on déduit : $\exp(x)+x \underset{+\infty}{\sim} \exp(x)$.

**Proposition 198**

- Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré.
- Un polynôme est équivalent en zéro à son monôme de plus bas degré.

☛ **Remarque :**

Conséquence de la proposition précédente : A vous de réfléchir ! Equivalent et composition ne fonctionnent pas très bien ensemble, on a tout de même une petite proposition, la voici :

**Proposition 199**

Soit $(a,b)\in\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie $D$ de $\mathbb{R}$.
Si $f$ et $g$ sont définies au voisinage de $a$ et équivalentes au voisinage de $a$ et si $h$, une fonction définie sur une partie $D_h$ de $\mathbb{R}$ telle que $h(D_h)\subset D$ et $b\in D_h$, vérifie que $\lim\limits_{x\longrightarrow b}(h(x))$ existe et vaut $a$, alors :

$$f\circ h \underset{b}{\sim} g\circ h.$$

✌ **EXEMPLE :**

On va voir que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

### 4.1.2 Comparaison classique

**Proposition 200**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f$ une fonction numérique définie sur un voisinage de $a$. Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$ existe, est finie et non nulle alors :

$$f(x) \underset{a}{\sim} \lim_{x\to a}(f(x)).$$

Reprenons les notations de la précédente proposition. Ainsi, si $\lim\limits_{x\to a}(f(x))$ existe, est connue (ou facile à calculer) et est non nulle et non infinie alors le plus simple des équivalents à prendre pour $f$ en $a$ est tout simplement sa limite.

➤ ***Exercice :***

*Soit* $f : x \mapsto 2x^4 - 8x^3 + 6x^2$. *Donner un équivalent en* $+\infty$, $-\infty$, $0$, $2$ *et* $3$ *de* $f$.

...........................................................................................

On a sans difficulté en appliquant la proposition sur les équivalents des polynômes en $0$ et en l'infini les résultats suivants :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x^4,\ f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x^4 \ \text{ et } \ f(x) \underset{0}{\sim} 6x^2.$$

En appliquant la proposition précédente, comme $f$ est continue en $2$ et $f(2) = -8$, on obtient que $f(x) \underset{2}{\sim} -8$. On a $f(3) = 0$ et on ne pas écrire $f(x) \underset{3}{\sim} 0$, on va factoriser : Pour tout réel $x$, on a : $f(x) = 2x^2 \times (x-1) \times (x-3)$ ce qui donne $f(x) \underset{3}{\sim} 36(x-3)$.

**Proposition 201**

Soit $\alpha$ un réel non nul. On a :

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
5. $\exp(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
6. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Ce sont les équivalents usuels, ils sont à connaître sur le bout des doigts.

♣) **Corollaire 202 :**
Soit $\alpha$ un réel non nul. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f$ une fonction numérique définie au voisinage de $a$. Si $\lim_{x \to a}(f(x)) = 0$ alors :

1. $\sin(f(x)) \underset{a}{\sim} f(x)$
2. $\tan(f(x)) \underset{a}{\sim} f(x)$
3. $\ln(1+f(x)) \underset{a}{\sim} f(x)$
4. $1-\cos(f(x)) \underset{a}{\sim} \frac{f(x)^2}{2}$
5. $\exp(f(x)) - 1 \underset{a}{\sim} f(x)$
6. $(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{a}{\sim} \alpha x$

## ➤ *Exercice :*

*Trouvez un équivalent en* $0$ *de* $x \mapsto \frac{(x^3+x^2)(\exp(x)+\exp(-x))^3}{(\sqrt{1+x}-1)(\exp(x)-1)^5}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Sans difficulté, on a :

$$\frac{(x^3+x^2)(\exp(x)+\exp(-x))^3}{(\sqrt{1+x}-1)(\exp(x)-1)^5} \underset{0}{\sim} \frac{x^2 \times (\exp(0)+\exp(-0))^3}{\frac{x}{2} \times x^5}$$
$$\underset{0}{\sim} \frac{16}{x^4}.$$

Voici une nouvelle façon de formuler les croissances comparées :

**Proposition 203**

Soient $\alpha$ et $\beta$ des réels strictement positifs. On a alors :

1. $(\ln(x))^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$
2. $(\ln(x))^\alpha = \underset{0}{o}\left(x^{-\beta}\right)$
3. $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(e^{\beta x}\right)$

### 4.1.3 Utilisations des équivalents

**Proposition 204**

Soit $(a, L) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ sont définies au voisinage de $a$ et qu'elles sont équivalentes au voisinage de $a$. On a alors :

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ alors $\lim_{x \to a} g(x)$ existe et vaut $L$.
- Si $f$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, il en est de même pour $g$.
- Si $f$ est positive au voisinage de $a$, il en est de même pour $g$.
- Si $f$ est négative au voisinage de $a$, il en est de même pour $g$.

☛ **Remarque :**

Avec les notations de la proposition ci-dessus, on peut dire que la réciproque de la première proposition est vraie si $L$ est un réel non nul. La réciproque est fausse si $L$ est infini ou nul. Un contre-exemple est fourni par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

☞ **Mise en garde :**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions équivalentes au voisinage de $a$, il n'y a aucune raison que les deux aient même monotonie ! $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 2\sin(x)$ sont équivalentes en $+\infty$ mais seule la première est monotone.

## ➤ *Exercice* :

*Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(x))} \right)$.

Ah les équivalents, c'est tellement simple. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{0}{\sim} \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \\
&\underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \text{ car } \lim_{x \to 0} (\cos(x) - 1) = 0 \\
&\underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Comme les équivalents passent au quotient, on prouve ainsi que :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(x))} &\underset{0}{\sim} \frac{-\dfrac{(2x)^2}{2}}{-\dfrac{x^2}{2}} \\
&\underset{0}{\sim} 4
\end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc 4.

## 4.2 Notions de négligeabilité

### 4.2.1 Notations de Landau

**Définition 205**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies sur un voisinage de $b$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $b$ (ou que $g$ est prépondérante devant $f$ au voisinage de $b$) et l'on note $f = \underset{b}{o}(g)$ (ou $f(x) = \underset{b}{o}(g(x))$ ou $f(x) = \underset{x \longrightarrow b}{o}(g(x))$) lorsque il existe un voisinage de $b$, noté $\mathcal{W}$, et une fonction $\varphi$ définie sur $\mathcal{W}$ telle que :

$$\forall x \in \mathcal{W}, f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \longrightarrow b} (\varphi(x)) = 0.$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition.

- On rappelle que $b \in \overline{\mathbb{R}}$ signifie que $b$ est un réel ou bien $+\infty$ ou bien $-\infty$.
- Pour la notion de voisinage, n'hésitez pas à relire le chapitre 11 intitulé "Limite et continuité".
- Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $b$ (ou si $g(b) = 0$ et $f(b) = 0$ et que $g$ ne s'annule pas sur $\mathcal{W} \backslash \{b\}$ ) alors :
$$f = \underset{b}{o}(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to b} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0.$$
- Si $f = \underset{b}{o}(g)$ et $h = \underset{b}{o}(g)$, on n'a pas nécessairement $f = h$. Par exemple, $\ln(x) = \underset{+\infty}{o}(\exp(x))$ et $x = \underset{+\infty}{o}(\exp(x))$ (par croissances comparées pour ces deux limites) et ln n'est pas la fonction identité !

### 4.2.2 Fonctions polynomiales

**Proposition 206**

Pour tout entier naturel non nul $p$, on a :

1. $x^{n+p} = \underset{0}{o}(x^n)$ et $x^n = \underset{\infty}{o}(x^{n+p})$.
2. $\left(\frac{1}{x}\right)^{n+p} = \underset{\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ et $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \underset{0}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{n+p}\right)$.

☛ **Remarque :**

$\infty$ signifie que la propriété est vraie en $+\infty$ et en $-\infty$.

### 4.2.3 Négligeabilité et Opérations

**Proposition 207**

On suppose que les fonctions utilisées dans cette proposition sont des fonctions numériques définies sur un voisinage de $b$ (avec $b$ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$), que $\lambda$ est un réel non nul et $\lambda_1, \lambda_2$ sont deux réels. On a :

1. $f = \underset{b}{o}(g)$ et $g = \underset{b}{o}(h) \Rightarrow f = \underset{b}{o}(h)$.
2. $f = \underset{b}{o}(k)$ et $g = \underset{b}{o}(h) \Rightarrow f \times g = \underset{b}{o}(h \times k)$.
3. Si $f = \underset{b}{o}(g)$ alors $f^n = \underset{b}{o}(g^n)$.
4. Si $f = \underset{b}{o}(g)$ alors $\lambda_1 f = \underset{b}{o}(g)$.
5. Si $f = \underset{b}{o}(g)$ alors $f = \underset{b}{o}(\lambda g)$.
6. Si $f_1 = \underset{b}{o}(g)$ et $f_2 = \underset{b}{o}(g)$ alors on a : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \underset{b}{o}(g)$.

☛ **Remarque :**

On ne possède pas de théorèmes généraux sur les sommes de fonctions négligeables.
Si $f_1 = \underset{a}{o}(g_1)$ et $f_2 = \underset{a}{o}(g_2)$ alors on n'a pas forcément $f_1 + f_2 = \underset{a}{o}(g_1 + g_2)$. Par exemple, on a : $x = \underset{+\infty}{o}\left(x^2+1\right)$ et $2x = \underset{+\infty}{o}\left(-x^2\right)$. Pourtant, $3x \neq \underset{+\infty}{o}(1)$.

**Proposition 208**

Soit $(b, c) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques définies au voisinage de $b$ et $h$ une fonction numérique telle qu'au voisinage de $c$ les fonctions $f \circ h$ et $g \circ h$ soient définies.
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow c}(h(x)) = b$ et $f = \underset{b}{o}(g)$, on a alors $f \circ h = \underset{c}{o}(g \circ h)$

✌ **Exemple :**

On se sert des notations de la précédente proposition. Si $f(x) = \underset{0}{o}\left(x^5\right)$ alors :

1. $f(x-1) = \underset{1}{o}\left((x-1)^5\right)$
2. $f(x^3) = \underset{0}{o}\left(x^{15}\right)$
3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \underset{\infty}{o}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^5\right)$
4. $f\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = \underset{+\infty}{o}\left(\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^5\right)$

En effet, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1}(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0}(x^3) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

### 4.2.4 Négligeabilité et Équivalents

**Proposition 209**

Soient $m$ un entier naturel non nul, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f_1, \cdots, f_m$ $m$ fonctions numériques définies au voisinage de $b$. Si $f_2 = \underset{b}{o}(f_1), \cdots, f_m = \underset{b}{o}(f_1)$, on a alors :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1} + f_m \underset{b}{\sim} f_1.$$

Voici une proposition particulièrement utile pour les développements limités (en particulier quand on les composera) :

**Proposition 210**

Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g, h$ 3 fonctions numériques définies au voisinage de $b$.
Si $f = \underset{b}{o}(g)$ et $g \underset{b}{\sim} h$, on a alors $f = \underset{b}{o}(h)$.

✌ **Exemple :**

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $0$. Si $f(x) = \underset{0}{o}\left((1-\cos(x))^3 \sin(x) + x^9\right)$, on a alors $f(x) = \underset{0}{o}\left(x^7\right)$.

En effet, $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $(1-\cos(x))^3 \sin(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^7}{8}$ .

D'autre part, $x^9 = \underset{0}{o}\left(x^7\right)$ donc $x^9 = \underset{0}{o}\left((1-\cos(x))^3 \sin(x)\right)$ et donc :

$$\begin{aligned}(1-\cos(x))^3 \sin(x) + x^9 &\underset{0}{\sim} (1-\cos(x))^3 \sin(x) \\ &\underset{0}{\sim} \frac{x^7}{8}\end{aligned}$$

## 4.3 Développement limité au voisinage d'un point

### 4.3.1 Définition

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur à $n$.

**Définition 211**

Soit $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au point $a$ s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$(f(x) - P(x-a)) = \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

On note alors : $f(x) = P(x-a) + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right)$.

**Définition 212**

Soit $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ une fonction avec $\mathcal{W}$ un voisinage de zéro.
On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au point $0$ s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(x) = P(x) + \underset{0}{o}\left((x)^n\right)$.

☛ **Remarque :**

I faut bien comprendre que l'écriture $f(x) = P(x) + \underset{0}{o}\left((x)^n\right)$ siginifie que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-P(x)}{x^n}\right) \text{ existe et vaut } 0.$$

✌ **Exemple :**

$x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité d'ordre $n$ en $0$.
En effet, $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{0}{o}(x^n)$. Pour démontrer ceci, il faut juste prouver que $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)}{x^n}\right)$ existe et vaut $0$ ce qui est évident car $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = 0$ et, pour tout $x$ de $]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\\ &= x^n \times \frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

### 4.3.2 Unicité du développement limité au voisinage d'un point

**Proposition 213**

Soit $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au point $a$ alors il existe un unique polynôme $P$ tel que :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \forall x \in \mathcal{V}, f(x) = P(x-a) + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

- $P$ est appelé la partie régulière du développement limité à l'ordre $n$ au point $a$ de $f$.

Voici une première conséquence de l'unicité du développement limité à l'ordre $n$ en zéro :

**Proposition 214**

Soit $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ une fonction avec $\mathcal{W}$ un voisinage de $0$.
On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en zéro. On appelle $P$ la partie régulière de son développement limité à l'ordre $n$ en zéro.

- Si $f$ est une fonction paire alors $P$ est un polynôme pair.
- Si $f$ est une fonction impaire alors $P$ est un polynôme impair.

☛ **Remarque :**

- Pour pouvoir exploiter cette dernière proposition, il faut se souvenir de la tête des polynômes pairs et impairs. On verra dans le chapitre sur les polynômes qu'un polynôme $P$ pair peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto a_0 + a_2X^2 + a_4X^4 + \dots + a_{2m}X^{2m} \end{cases}$$

  avec $m$ un entier naturel et $(a_0, a_2, \dots, a_{2m}) \in \mathbb{K}^{m+1}$. Autrement dit, un polynôme pair est la somme de monômes de degré pair. Un polynôme impair est lui la somme de monômes de degré impair. Un polynôme $P$ impair peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto a_1X + a_3X^3 + a_5X^5 + \dots + a_{2m+1}X^{2m+1} \end{cases}$$

  avec $m$ un entier naturel et $(a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}) \in \mathbb{K}^{m+1}$

- La réciproque est fausse. Il suffit de prendre $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 + x^3 \end{cases}$. $f$ est un polynôme, la partie régulière de son développement limité au voisinage de $0$ d'ordre $2$ est $1$ puisque $\lim_{x \to 0} \left( \frac{f(x) - 1}{x^2} \right)$ existe et vaut $0$ car pour tout réel $x$, $f(x) - 1 = x^3$. On constate que la partie régulière du développement limité au voisinage de $0$ d'ordre $2$ de $f$ est un polynôme pair alors que $f$ n'est ni pair, ni impair.

✌ **Exemple :**

cos est paire, sin est impaire et on va prouver en autres que :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{0}{o}\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{0}{o}\left(x^5\right).$$

On constate que les parties régulières de ces développements limités sont bien de la forme attendue.

### 4.3.3 Théorème de Taylor-Young

Le développement limité à l'ordre $n$ en un point donné est unique. Si la fonction est suffisamment régulière, on connaît la forme de ce développement, c'est le théorème de Taylor-Young qui va nous le donner, le voici...

**Théorème 215**

**Théorème de Taylor-Young**
Soit $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{V}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right) \end{aligned}.$$

On se sert en général du Théorème de Taylor-Young pour avoir un développement limité au voisinage de zéro :

**Théorème 216**

**Théorème de Taylor-Young**
Soient $\mathcal{D}$ un voisinage de zéro et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) + \underset{0}{o}\left(x^n\right) \\ &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right) \end{aligned}.$$

☛ **Remarque :**

Une fonction f peut avoir un développement limité sans qu'on puisse lui appliquer le théorème de Taylor-Young. On peut prendre par exemple :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f n'est pas deux fois dérivable en 0 mais possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre 2. En effet, f est dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ est nulle car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$ et $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ est bornée. On vient donc de prouver que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$ ce qui signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. On a donc :

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f'$ n'admet pas de limite en 0 : En effet, comme $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 0$ alors, si $f'$ admettait une limite en 0, par différence, $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admettrait une limite en 0 et donc cos en $+\infty$ (ce qui n'est pas vrai !). Comme $f'$ n'admet pas de limite en 0, $f'$ n'est pas continue en 0 et en particulier non dérivable en 0. f n'est effectivement pas deux fois dérivable en 0. Pourtant, f possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre 2 car dire que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right) = 0$ (ce qui est vrai car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ est nulle) signifie que : $f(x) = \underset{0}{o}\left(x^2\right)$.

## ➤ *Exercice :*

*Donner le développement limité d'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* tan.

.............................................................................................

Pour tout réel x de $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ (cela suffit comme voisinage de 0, inutile d'en mettre plus), on a :

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ \tan''(x) &= 2\tan(x) \times (1 + \tan^2(x)) \\ \tan^{(3)}(x) &= 2(1 + \tan^2(x))^2 + 4\tan^2(x) \times (1 + \tan^2(x)) \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc : $\tan(0) = 0$, $\tan'(0) = 1$, $\tan''(0) = 0$ et $\tan^{(3)}(0) = 2$. tan étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, en particulier tan est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, par le théorème de Taylor-Young, on peut donc affirmer que :

$$\begin{aligned} \tan(x) &\underset{0}{=} \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right) \\ &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient les développements limités en zéro de fonctions usuelles. Ils sont à connaître par cœur.

**Proposition 217**

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{0}{o}\left(x^n\right).\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right).\\
\sin(x) &= \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+2}\right).\\
(1+x)^\alpha &= P(x)+\underset{0}{o}\left(x^n\right) \text{ avec } \alpha \text{ réel quelconque et } P \text{ défini par :}\\
P : x &\mapsto 1+\alpha\frac{x^1}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\
\sqrt{1+x} &= Q(x)+\underset{0}{o}\left(x^n\right) \text{ avec } \alpha \text{ réel quelconque et } Q \text{ défini par :}\\
Q : x &\mapsto 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n n!}x^n\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\underset{0}{o}\left(x^n\right).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\underset{0}{o}\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

☛ **Remarque :**

- Pour avoir un développement limité simple à retenir de la puissance (avec une formule rappelant celle du binôme de Newton), on peut utiliser cette définition du coefficient binomial : Pour tout entier $k$ et tout réel $\alpha$, on pose :
$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$
Cette définition est bien sûr cohérente avec ce qu'est $\binom{\alpha}{k}$ quand $k$ et $\alpha$ sont des entiers naturels. On a alors : $(1+x)^\alpha=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right)+\underset{0}{o}\left(x^n\right)$.
- On voit que la partie régulière du développement limité de cos en $0$ est paire et que la partie régulière du développement limité de sin en $0$ est impaire. Au passage, on a le développement limité à l'ordre $2n+1$ pour le cos et $2n+2$ du sin. Si vous voulez ceux à l'ordre $2n$ pour le cos et $2n+1$ pour le sin, les voici :
$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n}\right).\\
\sin(x) &= \frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

## 4.4 Opérations sur les développements limités

### 4.4.1 Troncature

**Définition 218**

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k$ un entier naturel. On note $\overline{P}^{(k)}$ le polynôme tronqué à l'ordre $k$ de $P$. Si $m$ est un entier naturel, $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ est un élément de $\mathbb{R}^{m+1}$ et $P$ est le polynôme $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \end{cases}$, on a alors :

$$\overline{P}^{(k)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \end{cases}$$

si $m > k$ et $\overline{P}^{(k)} = P$ si $m \leqslant k$.

✌ **Exemple :**

Soit $P : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 + 4x^2 - 5x^3 \end{cases}$. On a :

1. $\overline{P}^{(0)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$
2. $\overline{P}^{(2)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 + 4x^2 \end{cases}$
3. $\overline{P}^{(3)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 + 4x^2 - 5x^3 \end{cases}$
4. $\overline{P}^{(5)} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 + 4x^2 - 5x^3 \end{cases}$

**Proposition 219**

Soient $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant p$ et $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que $f$ admet un développement limité au voisinage de $a$ d'ordre $p$ de partie régulière $P$ alors $f$ admet un développement limité au voisinage de $a$ d'ordre $m$ de partie régulière $\overline{P}^{(m)}$.

✌ **Exemple :**

Soit $f$ une fonction telle que $f(x) = 1 + 5x - \pi x^5 + 3x^{13} + \underset{0}{o}\left(x^{13}\right)$. En particulier, on a :

1. $f(x) = 1 + 5x - \pi x^5 + \underset{0}{o}\left(x^{10}\right)$
2. $f(x) = 1 + 5x - \pi x^5 + \underset{0}{o}\left(x^{5}\right)$
3. $f(x) = 1 + 5x + \underset{0}{o}\left(x^{4}\right)$
4. $f(x) = 1 + 5x + \underset{0}{o}\left(x^{1}\right)$
5. $f(x) = 1 + \underset{0}{o}\left(1\right)$

Par contre, on ne peut pas affirmer que $f$ admet un développement limité d'ordre strictement supérieur à $13$ et on ne saurait pas ce que serait sa partie régulière si ce développement limité existait !

### 4.4.2 Produit et somme de développements limités

Pour faire ces opérations sur les développements limités, on va avoir besoin de ces résultats élémentaires :

**Proposition 220**

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels. On a :
- $\underset{0}{o}(x^n) + \underset{0}{o}(x^p) = \underset{0}{o}(x^p)$ si $p \leqslant n$ et $x^n + \underset{0}{o}(x^p) = \underset{0}{o}(x^p)$ si $p < n$.
- $\underset{0}{o}(x^n)\, \underset{0}{o}(x^p) = \underset{0}{o}(x^{n+p})$ et $\underset{0}{o}(x^n)\, x^p = \underset{0}{o}(x^{n+p})$.

Dans la prochaine proposition, on va se donner $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathcal{W}$ un voisinage de $0$, $m$ et $p$ deux entiers naturels, $\lambda$ et $\mu$ deux réels et supposer que $f$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $m$ de partie régulière $P$, $g$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $p$ de partie régulière $Q$.

**Proposition 221**

Si $m \leqslant p$ alors $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ admettent un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $m$.
- La partie régulière du développement limité au voisinage de zéro d'ordre $m$ de $\lambda f + \mu g$ est $\overline{\lambda P + \mu Q}^{(m)}$.
- La partie régulière du développement limité au voisinage de zéro d'ordre $m$ de $f \times g$ est $\overline{P \times Q}^{(m)}$.

### ➤ *Exercice :*

*Soient* $f : x \mapsto 2\exp(x) + \cos(x) + 5$ *et* $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{1-x}$. *Donner le développement limité au voisinage de zéro d'ordre* $3$ *de* $f$ *et de* $g$.

.....................................................................................................

De $\exp(x) = 1 + \dfrac{x^1}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \underset{0}{o}(x^3)$ et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}(x^3)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} 2\exp(x) + \cos(x) + 5 &= 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + 1 - \frac{x^2}{2} + 5 + \underset{0}{o}(x^3) \\ &= 8 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

Par produit, on obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1+x+x^2+x^3+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(8+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \left(8+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)+\left(8x+2x^2+\frac{x^3}{2}\right)+\left(8x^2+2x^3\right)+8x^3\\ &= 8+10x+\frac{21}{2}x^2+\frac{65}{6}x^3+\underset{0}{o}\left(x^3\right). \end{aligned}$$

☛ **Remarque :**

- Même en connaissant un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$ de $f$ et un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$ de $g$, on n'obtient pas un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $2n$ de $f\times g$ en multipliant la partie régulière du développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$ de $f$ par celle du développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$ de $g$. Pour savoir l'ordre obtenu, il faut faire le produit et chercher le "plus petit o" dans la somme obtenue.
- Certaines fonctions font "gagner des ordres" dans un produit. Pour savoir combien d'ordre on gagne, il suffit de prendre un équivalent. Par exemple, sin fait gagner 1 ordre dans un produit de développement limité car $\sin(x)\underset{0}{\sim}x^1$, $1-\cos$ fait gagner 2 ordres dans un produit de développement limité car $1-\cos(x)\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$. Par contre, $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ ne fait pas gagner d'ordre dans un produit de développement limité car $\frac{1}{1-x}\underset{0}{\sim}x^0$.

### 4.4.3 Composition et inverse

Ces deux opérations sont les plus pénibles. A éviter si vous pouvez (si on fait un développement limité pour lever une forme indéterminée, il vaut mieux composer des limites que des développements limités).

**Proposition 222**

Soient I et J deux intervalles réel dont les intérieurs contiennent chacun zéro, $p$ un entier naturel non nul, $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: J\to\mathbb{R}$ deux fonctions.
On suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\lim_{x\to 0}(f(x))=0$.
2. $f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $p$ de partie régulière $P$.
3. $g$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $p$ de partie régulière $Q$.

Si tel est le cas alors $g\circ f$ est définie au voisinage de zéro et $g\circ f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $p$ de partie régulière $\overline{Q\circ P}^{(p)}$.

## ➤ *Exercice :*

*Donner le développement limité de* $\exp \circ \cos$ *au voisinage de zéro d'ordre* 3

...........................................................................................................

De $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$, on déduit que : $\exp\left(\cos(x)\right) = e \times \exp\left(f(x)\right)$ avec $f(x) = -\frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
On compose les deux développements suivants :

$$\exp(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \text{ et } f(x) = -\frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$$

On peut le faire car, par somme, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (f(x)) = 0$. Ainsi, en notant $g$ la fonction $\exp \circ f$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)\right)^3}{3!} + \underset{0}{o}\left(x^6\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

On a donc : $\exp\left(\cos(x)\right) = e - \frac{ex^2}{2!} + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.

**Proposition 223**

Soient I un intervalle dont l'intérieur contient zéro et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $g(0) \neq 0$
2. $g$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$

Si tel est le cas alors $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de zéro et possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$. Pour l'expliciter, on utilise la proposition sur la composition et le développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$ de $\frac{1}{1-x}$.

## ➤ *Exercice :*

*Donner le développement limité d'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\exp\left(\cos(x)\right)}$ *puis celui d'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$ *et enfin celui d'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}$.

...........................................................................................................

1. On vient de voir que : $\exp(\cos(x)) \underset{0}{=} e - \dfrac{ex^2}{2!} + o\left(x^3\right)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\exp(\cos(x))} &\underset{0}{=} \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)}\right)\\ &\underset{0}{=} \frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{1 - f(x)}\right)\end{aligned}$$

avec $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)$. Notez qu'on pourrait poser $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2!} - o\left(x^3\right)$, ça ne changerait rien car $\lambda o\left(d(x)\right) = o\left(d(x)\right)$ si $d$ est une fonction et $\lambda$ un réel non nul. On compose les deux développements suivants :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)$$

On peut le faire car $\lim\limits_{x \to 0}(f(x)) = 0$ par somme.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{e}{\exp(\cos(x))} &\underset{0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right)^2 + o\left(\left(f(x)\right)^2\right)\\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right) + o\left(x^4\right)\\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

On a donc : $\dfrac{1}{\exp(\cos(x))} \underset{0}{=} \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right)\right)$. Pour terminer, il faut multiplier ce développement limité par celui d'ordre 4 en zéro de sin pour obtenir le développement limité qui nous intéresse. Vous remarquerez qu'on s'est contenté d'un ordre 3 pour le développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{\exp(\cos(x))}$ car sin fait gagner un ordre. Poursuivons :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\exp(\cos(x))} &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \times \left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\right)\\ &\underset{0}{=} \frac{1}{e} \times \left(x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right) - \frac{x^3}{6}\right)\\ &\underset{0}{=} \frac{1}{e} \times \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)\right)\end{aligned}$$

2. Déjà, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ donc par quotient, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Une fonction admettant un développement limité d'ordre 2 en zéro admet en particulier un développement limité d'ordre 0 en zéro et est donc continue en zéro. Ce n'est pas le cas de $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et donc, par équivalence, ce n'est pas le cas non plus de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$. Le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$ n'existe donc pas.

3. Pour $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)}$, le dénominateur s'annule, en utilisant les équivalents, on voit qu'on va partir de :
$$\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)} \underset{0}{=} \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}$$
Choisissons des bons ordres :
   - On va prendre un ordre 4 de $x \mapsto 1-\cos(x)$ à cause du $x$ au dénominateur dans $\dfrac{1-\cos(x)}{x}$ qui va faire perdre un ordre au $1-\cos$.
   - D'autre part, on va factoriser par $x$ le $x \mapsto \ln(1+x)$ pour faire apparaître la forme $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$, on va donc perdre un ordre au $x \mapsto \ln(1+x)$ mais la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ fait gagner un ordre en produit (d'après les équivalents) : Un ordre 3 pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ suffira donc !

   On a :
$$\begin{aligned}\frac{x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} \frac{x}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}\\ &\underset{0}{=} \frac{1}{1-f(x)}\end{aligned}$$
avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$. Composons les développements limités de $f$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ ce qui est possible car (on vous laisse compléter !), on en déduit :
$$\begin{aligned}\frac{x}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)^2+o\left((f(x))^2\right)\\ &\underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\\ &\underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\end{aligned} .$$
Enfin, la voici, la voilà, c'est la dernière phase :
$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{\ln(1+x)} &\underset{0}{=} \frac{1-\cos(x)}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}\\ &\underset{0}{=} \left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

☞ **Mise en garde :**

En utilisant la précédente proposition, on se rend compte que $\dfrac{1+x+\underset{0}{o}(x)}{1+x+\underset{0}{o}(x)}$ n'est pas $1$ mais, après calcul, $1+\underset{0}{o}(x)$. Attention à rester rigoureux quand vous faites des développements limités.

### 4.4.4 Intégration des développements limités

**Proposition 224**

Soient I un intervalle réel contenant zéro et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
2. $g'$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$. On appelle $P$ sa partie régulière.

Si tel est le cas alors $g$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n+1$ de partie régulière $x \mapsto g(0) + \displaystyle\int_0^x P(t)dt$.
Ainsi, si on a :

$$g'(x) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) + \underset{0}{o}(x^n).$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors :

$$g(x) = \left(g(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \underset{0}{o}\left(x^{n+1}\right).$$

☞ **Mise en garde :**

Ne pas oublier la constante d'intégration, c'est-à-dire le $g(0)$ dans la formule précédente !

En utilisant cette proposition, on peut intégrer le développement limité en $0$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ afin d'obtenir le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$, il est aussi à connaître par cœur. C'est l'objet de la prochaine proposition.

**Proposition 225**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{0}{o}(x^n).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit alors :

**Proposition 226**

Soient I un intervalle réel contenant zéro et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
2. $g'$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$. On appelle P sa partie régulière.
3. $g$ admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n+1$. On appelle Q sa partie régulière.

On peut alors affirmer que : $Q = P'$.

☛ **Remarque :**

Attention aux réciproques hasardeuses ! Il existe des fonctions $h$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant zéro tel que $h$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n+1$ sans que $h'$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$. On peut citer par exemple :

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim_{x\to 0}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ car $\lim_{x\to 0}(x) = 0$ et sin est bornée, on en déduit que :

$$h(x) = 1 + x + x^2 + \underset{0}{o}\left(x^2\right)$$

$h$ possède donc un développement limité d'ordre 2. En revenant aux taux d'accroissements, on prouve aisément que $h'(0)$ existe et vaut 1. On a donc :

$$h' : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 1 + 2x + +3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Pour tout réel $x$ non nul, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} &= \frac{1 + 2x + +3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x - 0} \\ &= 2 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to 0}\left(2 + 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2$ et $\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ n'existe pas. Par l'absurde, on en déduit que $h'$ n'est pas dérivable en 0. On verra plus tard dans ce chapitre que cela implique que $h'$ n'admet pas de développement limité d'ordre 1. $h$ possède donc un développement limité au voisinage de zéro d'ordre 2 sans que $h'$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre 1.

➤ ***Exercice :***

*Calculer le développement limité d'ordre* 5 *de* tan *en* 0 *sans utiliser ni ceux de* cos *et de* sin*, ni le théorème de Taylor-Young !*

........................................................................................................

Par imparité de tan, son développements limités d'ordre 5 en 0 est de la forme :

$$\tan(x) \underset{0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right)$$

avec $a_1, a_3$ et $a_5$ trois réels à déterminer. En utilisant ce développement limité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} 1+\tan^2(x) &\underset{0}{=} 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + 2a_1 a_5 x^6 + o\left(x^6\right) + a_3^2 x^6 \\ &\underset{0}{=} 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Et par intégration (en se souvenant du fait que $\tan' = 1 + \tan^2$), on a :

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right) \underset{0}{=} \tan(0) + x + \frac{a_1^2}{3} x^3 + \frac{2a_1 a_3}{5} x^5 + o\left(x^5\right)$$

Par unicité du développement limité, on a : $a_1 = 1, a_3 = \dfrac{a_1^2}{3}$ et $a_5 = \dfrac{2a_1 a_3}{5}$. On trouve donc les valeurs de $a_1, a_3$ et $a_5$ et donc le développement limité d'ordre 5 de tan est :

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o\left(x^5\right)$$

En calculant le développement limité de $1+\tan^2$ à partir de ce développement limité et en intégrant, on trouve le développement limité d'ordre 7 en 0 de tan. En réitérant ce processus, on peut trouver tous les développements limités de tan (mais c'est un peu fastidieux !).

### 4.4.5 Obtentions des développements limités en un point quelconque

Jusque là, on a joué essentiellement avec des développements limités au voisinage de zéro. On va voir comment en déduire un développement limité ailleurs.

**Proposition 227**

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction.
Pour trouver le développement limité au voisinage de $a$ de $f$, on introduit la fonction suivante :

$$g : x \mapsto f(x+a).$$

$g$ est donc une fonction définie au voisinage de zéro. Si on a :

$$g(x) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) + \underset{0}{o}\left(x^n\right).$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors $f$ a un développement limité au voisinage de $a$ d'ordre $n$, le voici :

$$f(x) = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n\right) + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

☞ **Mise en garde :**

On a : $f(x) = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n\right) + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right)$ et pas ceci :

$$f(x) = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n\right) + \underset{0}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Attention à ce détail : le petit "o" est pris au voisinage de $a$ en quelque sorte, on affirme une limite en $a$, plus en $0$.

☛ **Remarque :**

Quand on a un développement limité en $a$, on laisse les termes en $(x-a)^n$, on ne dévelope pas : Cela n'aurait aucun d'intérêt, on ne pourrait ni identifier avec Taylor-Young ni lever des formes indéterminées. Par exemple, avec :

$$\tan(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \underset{\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

on peut affirmer, en ajoutant que tan est deux fois dérivables en $\dfrac{\pi}{4}$ et en parlant d'unicité du développement limité, que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \ \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \ \text{ et } \ \tan''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

➤ ***Exercice* :**

*Calculer le développement limité d'ordre d'ordre* $5$ *de* $x \mapsto \exp(-\cos(x))$ *en* $0$.
On a : $-\cos(0) = -1$ donc on a besoin d'un développement limité en $-1$ de exp. On peut le trouver grâce à Taylor et Young. Plus simple, plus astucieux, plus mieux, on sait que, pour tout réel $x$, on a :

$$\exp(-\cos(x)) = \frac{1}{e} \times \exp(-\cos(x)+1)$$

Et là, on rappelle que $\lim_{x\to 0}(-\cos(x)+1) = 0$, on va donc pouvoir utiliser le développement limité en $0$ de exp qu'on connaît bien. On retombe sur un exemple précédent, on avait obtenu : $\exp(-\cos(x)+1) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^5\right)$ et on en déduit que :

$$\exp(-\cos(x)) \underset{0}{=} \frac{1}{e} + \frac{x^2}{2e} - \frac{x^4}{24e} + \frac{x^4}{8e} + o\left(x^5\right)$$

Les plus attentifs noteront qu'on a vu aussi cet exemple lors de l'exercice sur le développement limité d'un quotient.

**Définition 228**

Soient $\mathcal{W}$ un voisinage de $+\infty$ et une fonction $\mathcal{W} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
On dit que $f$ possède un développement limité au voisinage de $+\infty$ si $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $n$. Si on a :

$$g(x) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) + \underset{0}{o}\left(x^n\right).$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors :

$$f(x) = \left(a_0 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

$x \mapsto \left(a_0 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ est appelée la partie régulière du développement limité au voisinage de $+\infty$ d'ordre $n$ de $f$.

☛ **Remarque :**

La définition d'un développement limité au voisinage de $-\infty$ est similaire.

✌ **Exemple :**

On peut ainsi évaluer le développement limité au voisinage de $+\infty$ d'ordre $2$ de $x \mapsto \sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Comme $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{0}{o}\left(x^2\right)$, on en déduit que :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

## 4.5 Applications des développements limités

### 4.5.1 Calcul de limites

La principale utilisation des développements limités est le calcul de limites. On a vu un certains nombres d'outils jusque là pour calculer les limites parmi lesquels les équivalents. Voici un résumé des avantages et inconvénients de l'utilisation des développements limités ou des équivalents.

**Équivalents :**

- Permet de calculer rapidement et élégamment les limites
- Calcul rapide (surtout quand il s'agit d'un produit)
- Passage à la somme faux de manière générale
- Composition fausse de manière générale

**Développements limités :**

- Permet de calculer beaucoup plus de limites que les équivalents.
- Calculs lourds, erreurs de calcul possibles.
- Passage à la somme possible.
- Composition possible.

Ainsi, si vous avez une somme ou une composition, vous ne pourrez pas utiliser les équivalents. On évaluera alors ponctuellement des développements limités afin de palier au défaut des équivalents. La plupart du temps, on utilisera un développement limité afin d'obtenir un équivalent et calculer notre limite en utilisant globalement les équivalents. L'exercice suivant est dans cet esprit :

**➤ *Exercice* :**

*Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{g(x)}\right)$ *avec* $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+x^3}$.

Soit $x$ un réel. Sous réserve d'existence, on a :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{g(x)} = \exp\left(\frac{1}{x^2+x^3} \times \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right).$$

C'est bien une forme indéterminée. Utilisons un peu les équivalents : on sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit :

$$\ln\left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)\right) \underset{0}{\sim} \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

et donc, par quotient, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+x^3} \times \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &\underset{0}{\sim} \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x^2} \\
&\underset{0}{\sim} \frac{\sin(x)-x}{x^3}. \\
&\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \text{ car } \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x^3}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = -\frac{1}{6}$ puis, par continuité de exp en $-\frac{1}{6}$, on obtient que la limite recherchée vaut $\exp\left(-\frac{1}{6}\right)$.

### 4.5.2 Obtention d'équivalent

**Proposition 229**

Soient $f$ une fonction et $b$ un réel. Si $f$ admet un développement limité au voisinage de $b$ de la forme :

$$f(x) = a_k (x-b)^k + \underset{b}{o}\left((x-b)^k\right)$$

avec $k$ un entier naturel et $a_k \neq 0$, on a alors : $f(x) \underset{b}{\sim} a_k (x-b)^k$.

➤ ***Exercice :***

*Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)+2\exp(x)-3}{x}\right)$.

On a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ et un quotient, on pense donc aux équivalents... mais on est gêné par la somme : Compensons avec les développements limités. On a déjà prouvé que :

$$\cos(x) + 2\exp(x) \underset{0}{=} 3 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

et donc $\cos(x) + 2\exp(x) - 3 \underset{0}{=} 2x + o(x)$ et donc la limite recherchée vaut 2 car :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} \\
&\underset{0}{\sim} 2.
\end{aligned}$$

### 4.5.3 Développements limités et régularité des fonctions

**Proposition 230**

Soit $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- $f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $0$ si et seulement si $f$ est continue en zéro.
- $f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $1$ si et seulement si $f$ est dérivable en zéro.

☞ **Mise en garde :**

Ainsi, développement limité d'ordre $0$ et continuité, c'est la même chose ; dérivabilité et développement limité d'ordre $1$, c'est la même chose. Attention, des développements limités d'ordre supérieur n'entraîne pas plus de régularité sur notre fonction. On peut avoir par exemple $f$ non deux fois dérivable en $0$ mais possédant un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $2$. C'est le cas de la fonction $f$ suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a déjà vu que $f$ n'est pas deux fois dérivable en $0$ mais possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $2$ : De $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 0$, on avait déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right) = 0$ ce qui signifie que :

$$f(x) = \underset{0}{o}\left(x^2\right)$$

ce qui prouve que $f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $2$. On avait prouvé aussi que $f$ était dérivable (en introduisant le taux d'accroissement en $0$) et que :

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On avait vu que $f'$ n'admettait pas de limite en $0$ (conséquence du fait que cos n'a pas de limite en l'infini), $f$ n'est donc pas deux fois dérivable en $0$ et, pourtant, $f$ possède un développement limité au voisinage de zéro d'ordre $2$.

**➤ *Exercice :***

*Etudier la continuité et la dérivabilité en zéro de la fonction suivante :*

$$f : \begin{cases} [-1;1] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

..........................................................................................

Sur $[-1;1] \setminus \{0\}$, ça ne pose pas de problème : On vous laisse invoquer la composition et dire que, si $x$ appartient à cet ensemble, $x$ ne s'annule pas et $1+x$ et $1-x$ sont positifs.
Pour répondre à la question, on a donc besoin d'un développement limité d'ordre $1$ de $f$. On va perdre un ordre avec la division par $x$, on va donc partir sur un développement limité d'ordre 2. On sait que :

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$$

On en déduit les résultats suivants :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) - 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)}{x} \\ &\underset{0}{=} \frac{x + o\left(x^2\right)}{x} \\ &\underset{0}{=} 1 + 0 \times x + o\left(x\right) \end{aligned}$$

$f$ possède un développement limité d'ordre $1$ en $0$ donc $f$ est continue et dérivable en $0$. A l'aide de ce développement limité d'ordre $1$ en $0$, on peut aussi observer que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

### 4.5.4 Etude locale des courbes

**Proposition 231**

Soient $b$ un réel et $f$ une fonction numérique définie sur un voisinage de $b$. Si $f$ admet un développement limité au voisinage de $b$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x-b\right) + \underset{b}{o}\left(\left(x-b\right)\right)$$

alors la tangente en $(b, f(b))$ à $C_f$, courbe représentative de $f$, existe et a pour équation : $y = a_0 + a_1(x-b)$.

**Proposition 232**

Soient f une fonction et b un réel. Si f admet un développement limité au voisinage de b de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-b) + a_k (x-b)^k + \underset{b}{o}\left((x-b)^k\right)$$

avec k un entier égal ou supérieur à 2 et $a_k \neq 0$, on a alors :

1. la tangente en $(b, f(b))$ à $C_f$, courbe représentative de f, existe et a pour équation : $y = a_0 + a_1(x-b)$.
2. La position locale de la courbe $C_f$ par rapport à sa tangente dépend du signe de $a_k$ et de la parité de k.

## ➤ *Exercice :*

*Faire l'étude locale en zéro de* $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On va viser un ordre 3 au final (par sécurité mais aussi parce que f est impaire donc $a_2 = 0$). On perd un ordre avec ce x au dénominateur, on a donc besoin d'un ordre 4 pour $x \mapsto \sin^2(x)$. Au produit, sin fait gagner un ordre car $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc on va partir sur un ordre 3 pour sin. On a :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\end{aligned}.$$

On en déduit que : $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$. De là, on peut déduire que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc f est continue et dérivable en 0 et, en identifiant grâce au théorème de Taylor-Young, on peut affirmer que $f(0) = 0$ et que $f'(0) = 1$. La tangente en $(0,0)$ à $C_f$ a donc pour équation $y = x$. De :

$$f(x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

on en déduit que $f(x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$ ce qui prouve que $x \mapsto f(x) - x$ et $x \mapsto -\dfrac{x^3}{3}$ sont, au voisinage de 0, de même signe. On en déduit que $C_f$ est à gauche de 0 au-dessus de sa tangente en $(0,0)$ et en-dessous de sa tangente à droite de 0. Notez qu'on a bien fait de ne pas se contenter d'un ordre 2, on aurait dû alors tout recommencer pour avoir la position !

**Proposition 233**

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini. L'éventuel développement limité au voisinage de 0 de $x \mapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ permet de déterminer si la courbe $C_f$ possède des asymptotes en l'infini et la position de $C_f$ par rapport à celle-ci.

## ➤ *Exercice :*

*Soit* $f : x \mapsto x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$. *Déterminer l'asymptote en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *à la courbe représentative de* $f$ *dans le plan muni d'un repère orthonormé et préciser leurs positions relatives.*

.................................................................................................................

On introduit la fonction $g : x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour tout réel non nul $x$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= xf\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x\frac{1}{x^2}\sin^2(x) \\ &= \frac{\sin^2(x)}{x} \end{aligned}$$

D'après l'exercice précédent, on a : $g(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{\infty}{=} xg\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{\infty}{=} x \times \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)\right) \\ &\underset{\infty}{=} 1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) - 1 = -\frac{1}{3x^2} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ et donc :

$$f(x) - 1 \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{3x^2}$$

ce qui prouve que $\lim_{x\to 0}(f(x) - 1) = 0$ et que la droite d'équation $y = 1$ est l'asymptote de $C_f$ en l'infini. On en déduit aussi que $x \mapsto f(x) - 1$ et $x \mapsto -\frac{1}{3x^2}$ sont, au voisinage de l'infini, de même signe. On en déduit que $C_f$ est en $-\infty$ comme en $+\infty$ en-dessous de son asymptote.

# Partie 5

# Calcul Intégral

Dans tout ce chapitre, I désignera un intervalle de réels contenant notamment les deux éléments distincts $a$ et $b$. J désignera le segment $[a, b]$ si $a \leqslant b$ et le segment $[b, a]$ si $b \leqslant a$.

## 5.1 Notion de primitive

Dans toute cette partie, $a$ et $b$ seront deux réels et on notera I un intervalle de réels contenant notamment les deux éléments $a$ et $b$ et J le segment $[a, b]$ si $a \leqslant b$ et le segment $[b, a]$ si $b \leqslant a$.

### 5.1.1 Définition et existence

**Définition 234**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout $x$ de I, on a $F'(x) = f(x)$.

✌ **Exemple :**

1. sin est une primitive sur $\mathbb{R}$ de cos.
2. $x \mapsto \cos(x^2)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x\sin(x^2)$.

**Théorème 235**

**Théorème de Darboux.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue sur I alors f admet au moins une primitive sur I.

☛ **Remarque :**

1. La continuité pour l'existence d'une primitive n'est qu'une condition suffisante. Prenons la fonction suivante :
$$g : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
On peut démontrer facilement que $g$ n'est pas continue en $0$ mais admet tout de même une primitive sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $G$ suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g$ :
$$G : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
2. Si $f$ est continue sur I alors $f$ admet au moins une primitive sur I... mais ce n'est pas forcément évident de la trouver ! D'ailleurs, comme on ne savait pas trop, pour $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on leur a simplement donné un nom (ln et arctan respectivement). Ces deux dernières fonctions sont des fonctions transcendantes, c'est-à-dire qu'on ne peut pas les exprimer par opérations à partir des autres fonctions usuelles.

**Théorème 236**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ admet une primitive $F$ sur I alors :
1. $f$ admet une infinité de primitives sur I et l'ensemble des primitives de $f$ est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ avec $k$ un réel.
2. Pour tout réel $h$, il existe une unique primitive $G$ de $f$ telle que $G(a) = h$.

☛ **Remarque :**

1. Dans ce dernier théorème, le fait que I soit un intervalle est fondamental. Sinon, il y a autant de constante que d'intervalles disjoints. Par exemple, ces deux primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$ ne différent pas d'une constante :
$$x \mapsto \ln(x) \quad \text{et } x \mapsto \begin{cases} \ln(x) + 1851 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) + 8563 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
2. Quand on a une primitive, on en a une infinité : C'est pour ça qu'on parle d'**une** primitive et pas de **la** primitive d'une fonction donnée !

### 5.1.2 Primitives et opérations

**Proposition 237**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $\lambda$ un réel. On suppose que $f$ admet une primitive $F$ sur I et que $g$ admet une primitive $G$ sur I. On a alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- $\lambda F$ est une primitive de $\lambda f$.

☞ **Mise en garde :**

Intégrer une somme n'est pas difficile. Le produit est une opération plus délicate pour l'intégration. Utilisons les notations de la précédente proposition. Il faut absolument noter que :

- $F \times G$ n'est pas, en général, une primitive de $f \times g$.
- $\frac{F}{G}$ n'est pas, en général, une primitive de $\frac{f}{g}$.

### 5.1.3 Primitives de référence

Dans ces tableaux, $F$ est une primitive sur l' intervalle I de la fonction $f$ définie sur $D_f$. On a rassemblé dans ce premier tableau les fonctions puissances, logarithmes et exponentielles et noté $\lambda$ un réel, $n$ un entier naturel, $m$ un entier supérieur à $2$, $a$ un réel strictement positif et différent de $1$.

| $D_f$ | $f$ | I | $F$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \lambda$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \lambda x$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{x^m}$ | $\mathbb{R}_+^\star$ ou bien $\mathbb{R}_-^\star$ | $x \mapsto -\dfrac{1}{(m-1)x^{m-1}}$ |
| $\mathbb{R}^\star$ | $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^\star$ ou bien $\mathbb{R}_-^\star$ | $x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto a^x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)}$ |
| $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto \ln(x)$ | $\mathbb{R}_+^\star$ | $x \mapsto x\ln(x) - x$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \exp(x)$ |

Dans ce second tableau, on a rassemblé les fonctions trigonométriques et noté $k$ un entier.

| $D_f$ | $f$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \sin(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\cos(x)$ |
| $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $x \mapsto 1+\tan^2(x)$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ | $x \mapsto \tan(x)$ |
| $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ | $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ |
| $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $x \mapsto \tan(x)$ | $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ | $x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$ |
| $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ | $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $x \mapsto \ln(\lvert\sin(x)\rvert)$ |
| $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \arctan(x)$ |

On a rassemblé dans ce dernier tableau les primitivations obtenues par composition. On a noté $s$ un réel différent de $-1$, $n$ un entier naturel et $m$ un entier supérieur à 2. On introduit aussi $u$ , $v$ et $w$ trois fonctions dérivables sur D. On suppose que $v$ est strictement positive sur D et que $w$ ne s'annule pas sur D.

| $D_f$ | $f$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| D | $x \mapsto u'(x)\,(u(x))^n$ | $I \subset D$ | $x \mapsto \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$ |
| D | $x \mapsto \frac{w'(x)}{(w(x))^m}$ | $I \subset D$ | $x \mapsto -\frac{1}{(m-1)(w(x))^{m-1}}$ |
| D | $x \mapsto v'(x)\,(v(x))^s$ | $I \subset D$ | $x \mapsto \frac{(v(x))^{s+1}}{s+1}$ |
| D | $x \mapsto \frac{w'(x)}{w(x)}$ | $I \subset D$ | $x \mapsto \ln(\lvert w(x)\rvert)$ |
| D | $x \mapsto u'(x)\exp(u(x))$ | $I \subset D$ | $x \mapsto \exp(u(x))$ |

☞ **Mise en garde :**

Notons $n$ un entier naturel, $u$ une fonction dérivable sur un ensemble D.

- Une primitive de $x \mapsto u'(x)\,(u(x))^n$ est $x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$. Par contre, il est faux de dire qu'une primitive de $x \mapsto (u(x))^n$ est $x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{u'(x)(n+1)}$.
- De la même façon, si $u$ en plus ne s'annule jamais, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$

n'est pas $x \mapsto \dfrac{\ln(|u(x)|)}{u'(x)}$ même si une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto \ln(|u(x)|)$.

### 5.1.4 Lien avec l'intégration

Rappelons que l'on note $[h(t)]_a^b$ la quantité $h(b) - h(a)$ si $h$ est une fonction numérique définie sur $J$.

**Définition 238**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $J$. On note $F$ l'une des primitives de $f$ sur $J$.

- Le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de $a$ à $b$ de la fonction $f$.
- Cette quantité se note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ou $[F(t)]_a^b$.

☛ **Remarque :**

1. En réalité, c'est une proposition, c'est même le théorème fondamental de l'analyse car on construit la notion d'intégrale (par limite de somme de Riemann) et on introduit la notion de primitive comme en début de chapitre. Ce théorème permet donc de relier les notions de primitivation et d'intégration.
2. La valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de la primitive choisie de $f$. En effet, soient $F$ et $G$ deux primitives sur $J$ de $f$, on a : $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
3. L'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'implique pas nécessairement que $a \leqslant b$.
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que de trois choses : $f$, $a$ et $b$. En particulier, elle ne dépend pas de $t$ qui est une une variable muette. Au passage, on peut noter que :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(r)dr = \dots$$

Ainsi, une fois le calcul de l'intégrale effectué, il ne peut pas rester du $t$, obtenir :

$$\int_a^b f(t)dt = t^2$$

est tout simplement absurde. De la même façon, écrire, pour tout $t$ de $[a, b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \dots$ n'a pas de sens ! Écrire $\displaystyle\int_a^t f(t)dt$ encore moins !

✌ **Exemple :**

$\int_{2}^{-1} \cos(t)dt$ existe (car cos est continue) et est $[\sin(t)]_2^{-1}$, c'est-à-dire $\sin(-1) - \sin(2)$. Un exemple un peu compliqué, on peut essayer de calculer $\int_4^7 \frac{5}{\arctan(x)(1+x^2)}dt$. On reconnaît du $\frac{u'}{u}$, on a donc :

$$\int_4^7 \frac{5}{\arctan(x)(1+x^2)}dt = 5\ln\left(\frac{\arctan(7)}{\arctan(4)}\right).$$

## ➤ *Exercice* :

*Justifier l'existence de* $\int_5^3 \ln\left(t^2 - 3t + 2\right) dt$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cherchons les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$. C'est un polynôme de degré 2, un petit coup de discriminant et on trouve que 1 et 2 sont les deux racines de ce polynôme. On fait désormais un tableau de signe (jusque là, ça devrait aller !) :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x^2 - 3x + 2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, par composition, $t \mapsto \ln\left(t^2 - 3t + 2\right)$ est continue sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ et donc sur $[3, 5]$. $\int_5^3 \ln\left(t^2 - 3t + 2\right) dt$ est donc bien définie. Au passage, on remarque que dans $\int_a^b f(t)dt$, on n'a pas nécessairement $a \leqslant b$.

**Théorème 239**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est continue sur $I$ alors la fonction $F$ définie sur $I$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une fonction vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $F$ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, cela signifie que $F$ est dérivable et sa dérivée est continue.
- $F'$ est $f$.
- $F(a)$ est nulle.

$F$ est donc l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. On l'appelle intégrale fonction de sa borne supérieure (ou haute) en $a$ associée à $f$.

✌ **Exemple :**

1. La fonction $F : x \mapsto \int_\pi^x \cos(t^2)dt$ est dérivable et $F' : x \mapsto \cos(x^2)$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. f étant continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ est l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$, on l'appelle ln. On retrouve avec cette définition les propriétés classiques du ln.

☞ **Mise en garde :**

$F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} t^2 dt$ n'est pas une primitive de $f : t \mapsto t^2$ car, par composition, on a :

$$F' : x \mapsto 2 \times 4x^2$$

Pour généraliser la précédente proposition, on va introduire la fonction F définie sur J par :

$$F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

avec f une fonction continue sur J, $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que $u(K) \subset J$ et $v(K) \subset J$. F est alors une fonction dérivable sur J et sa dérivée est :

$$F' : x \mapsto f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Ne pas oublier $v'$ et $u'$ !

## ➤ *Exercice* :

*Calculer* $\displaystyle\lim_{T \longrightarrow 0} \left( \frac{\displaystyle\int_2^{3T+2} \exp(\sin(5t))dt}{T} \right)$.

On peut tenter d'abord de calculer $\displaystyle\int_2^{3T+2} \exp(\sin(5t))dt$ (à essayer mais ne vous attardez pas !) : Cela ne marche pas alors on pose :

$$G : x \mapsto \int_0^x \exp(\sin(5t))dt \quad \text{et} \quad Z : x \mapsto \int_0^{3x+2} \exp(\sin(5t))dt$$

La fonction $t \mapsto \exp(\sin(5t))$ est (par composition) continue sur $\mathbb{R}$ et 0 est un réel. Ainsi, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose : $u : x \mapsto 3x + 2$, pour tout réel $x$, sous réserve d'existence, $Z(x)$ est $G(u(x))$. Par composition, Z est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable en 0. On dérive une composée :

$$\begin{aligned} Z'(0) &= G'(u(0)) \times u'(0) \\ &= \exp(\sin(5(3 \times 0 + 2)) \times 3 \\ &= 3\exp(\sin(10)) \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left( \frac{Z(x) - Z(0)}{x} \right)$ existe et vaut $Z'(0)$, c'est-à-dire $3\exp(\sin(10))$. La limite recherchée est donc $3\exp(\sin(10))$.

## 5.2 Intégration sur un segment

### 5.2.1 Interprétation graphique

Dans cette partie, $g$ et $h$ désignent deux réels tels que $g < h$, $f$ une fonction à valeur réelle, définie et continue sur $[g, h]$, $C_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**Proposition 240**

Supposons $f$ positive. Pour tout $t \in [g; h]$, on note $\mathcal{A}(t)$ l'aire du domaine $\mathcal{S}_t$ délimité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = g$ et $x = t$, $\mathcal{S}_t$ est donc l'ensemble suivant : $\left\{M(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } g \leqslant u \leqslant t \text{ et } 0 \leqslant v \leqslant f(u)\right\}$.

Pour tout élément $t$ de $[g, h]$, on prouve que $\mathcal{A}(t)$ est $\displaystyle\int_g^t f(x)dx$.

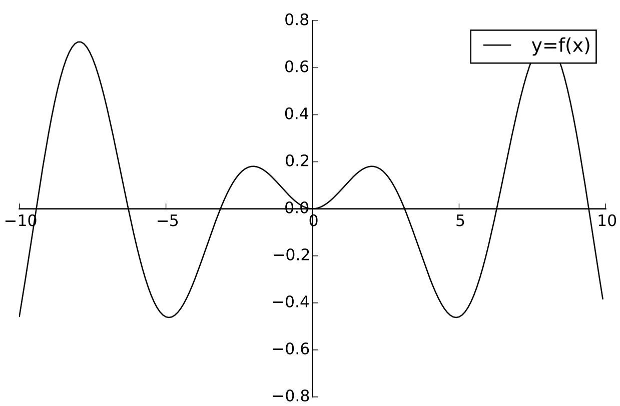
☛ **Remarque :**

Utilisons les notations de la proposition précédente. Autrement dit, si $f$ est positive et continue alors l'aire sous sa courbe (entre sa courbe et l'axe des abscisses) entre les droites d'équation $x = g$ et $x = t$ est $\displaystyle\int_g^t f(x)dx$.

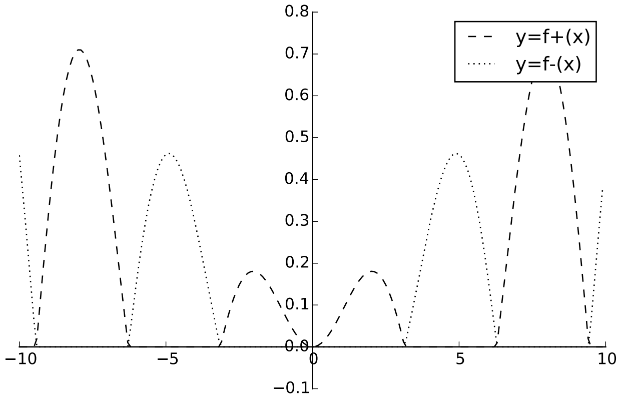
Pour généraliser, on va avoir besoin de décomposer une fonction en différence de deux fonctions positives. Pour cela, on introduit ces deux fonctions :

$$f_+ : \begin{cases} [g; h] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \max\left(f(x), 0\right) \end{cases} \quad \text{et } f_- : \begin{cases} [g; h] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \max\left(-f(x), 0\right) \end{cases}$$

Elles sont toutes les deux positives et $f$ est $f_+ - f_-$. Il est important de bien visualiser ces fonctions, si $f$ a ce graphe :




alors $f_+$ et $f_-$ ont ces têtes là (Quand $f(x)$ est positif, $f_-(x)$ est nul et $f_+(x)$ vaut $f(x)$. Quand $f(x)$ est négatif, $f_+(x)$ est nul et $f_-(x)$ vaut $-f(x)$) :


0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−10
−5
0
5
10
y=f+(x)
y=f-(x)

Comme $f_+$ et $f_-$ sont positives, on sait désormais interpréter géométriquement les deux quantités $\int_g^h f_+(t)dt$ et $\int_g^h f_-(t)dt$ :

- $\int_g^h f_+(t)dt$ est la somme des aires des domaines au-dessus de l'axe des abscisses délimités par $C_f$, les droites d'équation $x = g$ et $x = h$ et l'axe des abscisses.
- $\int_g^h f_-(t)dt$ est la somme des aires des domaines en-dessous de l'axe des abscisses délimités par $C_f$, les droites d'équation $x = g$ et $x = h$ et l'axe des abscisses.

Cela donne la proposition suivante :

**Proposition 241**

On a : $\int_g^h f(t)dt = \int_g^h f_+(t)dt - \int_g^h f_-(t)dt$. Cela prouve que $\int_g^h f(t)dt$ est la différence entre la somme des aires des domaines délimités par $C_f$ et l'axe des abscisses qui sont au-dessus de l'axe des abscisses et la somme de ceux délimités par $C_f$ et l'axe des abscisses qui sont en-dessous de l'axe des abscisses. $\int_g^h f(t)dt$ représente donc l'aire algébrique du domaine délimité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = g$ et $x = h$.

✌ **Exemple :**

Soient $a$ et $b$ deux réels. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels. Soit la fonction $f : x \mapsto \alpha x + \beta$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \left[\alpha\frac{x^2}{2} + \beta x\right]_a^b \\
&= \left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right) - \left(\alpha\frac{a^2}{2} + \beta a\right) \\
&= (b - a) \times \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}$$

On retrouve la formule de l'aire d'un trapèze : l'aire obtenue par calcul d'intégrale et les aires du cours de géométrie sont bien sûr les mêmes ! On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par le produit de la longueur d'une hauteur (ici, c'est le $b - a$) par la somme de la longueur des deux bases (ici, c'est le $f(a) + f(b)$) et le tout divisé par deux.

### 5.2.2 Cas des fonctions continues par morceaux

**Définition 242**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $[g, h]$. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[g, h]$ si $f$ est continue à droite en $g$ et à gauche en $h$ et si $f$ est continue en tout point de $]g, h[$ sauf en un nombre fini de point en lesquels $f$ possède tout de même des limites finies à gauche et à droite.

✌ **Exemple :**

1. Soit $f$ une fonction continue. $f$ est en particulier une fonction continue par morceaux.
2. Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. $f$ est une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. $f$ n'est pas une fonction continue par morceaux car $f$ n'admet pas de limite finie à droite de $0$.

**Définition 243**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$. Soit $f$ une fonction numérique continue par morceaux sur $[g, h]$. On note $a_1, \cdots, a_n$ (avec $n$ entier naturel non nul) ses points de discontinuités sur $]g, h[$. On suppose que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et on pose $a_0 = g$ et $a_{n+1} = h$. Pour tout $k$ de $[\![0, n]\!]$, on appelle $f_k$ la fonction suivante définie sur $[a_k, a_{k+1}]$ :

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{x \to a_k^+} f(x) & \text{si } x = a_k \\ f(x) & \text{si } x \in ]a_k, a_{k+1}[ \\ \lim\limits_{x \to a_{k+1}} f(x) & \text{si } x = a_{k+1} \end{cases}$$

Le réel $\sum_{k=0}^{n} \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt \right)$ est appelé intégrale de $g$ à $h$ de la fonction $f$ et est noté $\int_g^h f(t)dt$. On a donc :

$$\int_g^h f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \left( \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt \right).$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. Pour donner du sens aux intégrales de fonctions continues par morceaux quand les bornes ne sont pas dans le bon sens, on définit la quantité $\int_h^g f(t)dt$ est définie comme étant $-\int_g^h f(t)dt$.

✌ **Exemple :**

Soit $f$ la fonction suivante définie sur $[-3;5]$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [-3;1[ \\ 8563 & \text{si } x = 1 \\ \sin(x) & \text{si } x \in ]1;4[ \\ x^3 & \text{si } x \in [4;5] \end{cases}$$

$\int_{-3}^5 f(t)dt$ existe car $f$ est continue par morceaux sur $[-3;5]$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^5 f(t)dt &= \int_{-3}^1 t dt + \int_1^4 \sin(t)dt + \int_4^5 t^3 dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^1 + [-\cos(t)]_1^4 + \left[\frac{t^4}{4}\right]_4^5 \\ &= \frac{353}{4} + \cos(1) - \cos(4) \end{aligned}$$

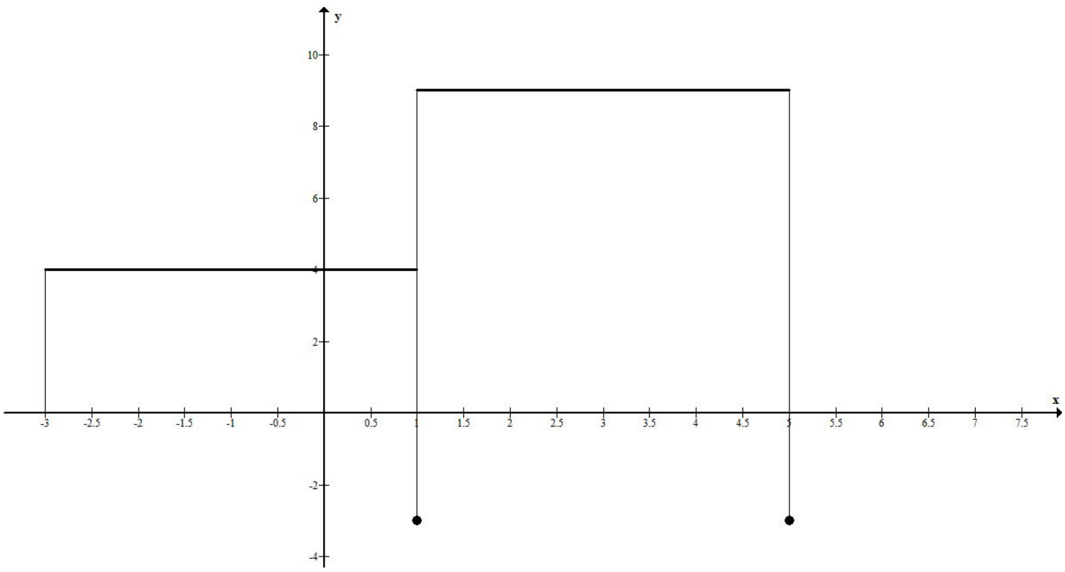
On va s'intéresser, dans la suite de ce paragraphe, à l'intégration de fonctions continues par morceaux particulièrement simples, les fonctions en escalier. Ce sont des fonctions constantes par morceaux, définissons-les plus rigoureusement :

**Définition 244**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$. On dit que $f$, une fonction numérique définie sur $[g,h]$, est une fonction en escalier sur $[g,h]$ s'il existe $n$, un entier naturel non nul, $a_1, \cdots, a_n$, $n$ éléments de $]g,h[$ tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et, en posant $a_0 = g$ et $a_{n+1} = h$, on ait $\bigcup_{k=0}^{n} ([a_k, a_{k+1}]) = [g,h]$ et, pour tout $k$ de $[\![0,n]\!]$, il existe $\lambda_k$ telle que pour tout $x$ appartenant à $]a_k, a_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$.

✌ **Exemple :**

Voici une fonction en escalier : $f : x \mapsto \begin{cases} 4 & \text{si } x \in [-3;1[ \\ -3 & \text{si } x = 1 \text{ ou } 5 \\ 9 & \text{si } x \in ]1;5[ \end{cases}$. Voici son allure :



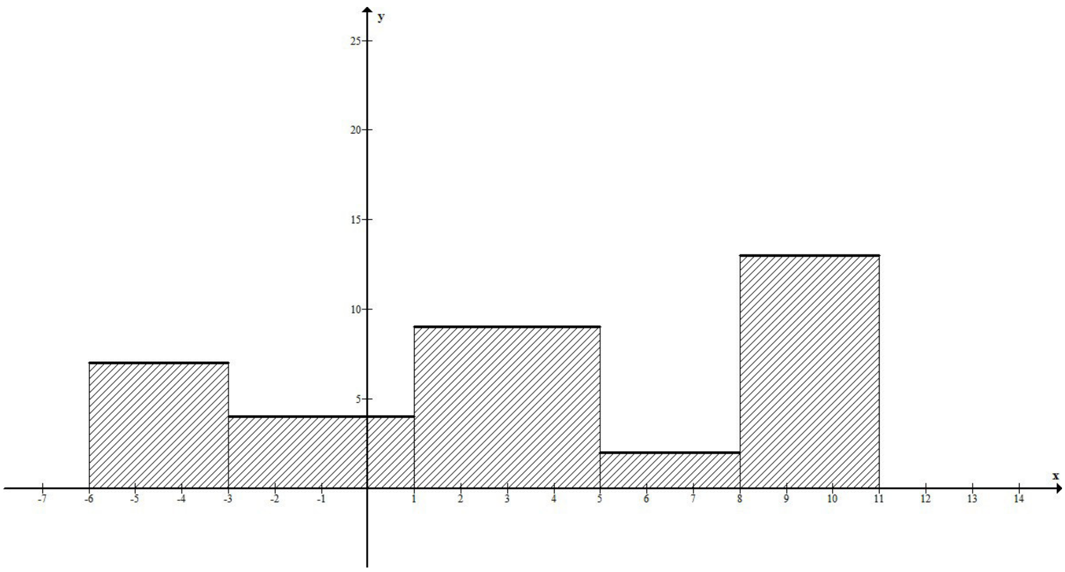
**Proposition 245**

On utilise les notations précédentes. On suppose qu'il existe, pour tout $k$ de $[\![0, n]\!]$, $\lambda_k$ telle que pour tout $x \in ]a_k, a_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$. On peut alors affirmer que $\displaystyle\int_g^h f(t)dt$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. $\displaystyle\int_g^h f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k$ se comprend très bien graphiquement. $\displaystyle\int_g^h f(t)dt$ représente l'aire algébrique du domaine délimité par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = g$ et $x = h$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \lambda_k$ est la somme, pour $k$ balayant $[\![1, n]\!]$, des aires algébriques des rectangles délimités par les droites d'équation $x = a_k$, $x = a_{k+1}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = \lambda_k$.

Voici un exemple de la représentation graphique d'une intégrale d'une fonction en escalier :



### 5.2.3 Cas des fonctions à variable réelle et à valeur dans $\mathbb{C}$.

**Définition 246**

Soit $f : J \to \mathbb{C}$ une fonction. Il existe deux fonctions $f_1 : J \to \mathbb{R}$ et $f_2 : J \to \mathbb{R}$ telles que :

Pour tout $x$ de $J$, on ait : $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

Si $f_1$ et $f_2$ sont continues sur $J$ alors on dit que $f$ est intégrable sur $[a, b]$ et on appelle intégrale de $a$ à $b$ de $f$ le complexe suivant :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt.$$

➤ ***Exercice :***

*Soit* $m$ *un réel non nul, expliciter* $\displaystyle\int_a^b \exp(imt)dt$ *puis calculer la quantité* $\displaystyle\int_1^0 \sin(2x)\exp(3x)dx$.

Vous pouvez vous permettre de dire que $\int_a^b \exp(imt)dt$ est $\left[\frac{\exp(imt)}{im}\right]_a^b$, cela se prouve ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^b \exp(imt)\ dt &= \left(\int_a^b \cos(mt)\ dt\right) + i\int_a^b \sin(mt)\ dt \\ &= \left[\frac{\sin(mt)}{m}\right]_a^b - i\left[\frac{\cos(mt)}{m}\right]_a^b \\ &= \left[\frac{i\sin(mt)+\cos(mt)}{im}\right]_a^b\end{aligned}$$

et on reconnaît bien $\left[\frac{\exp(imt)}{im}\right]_a^b$. Notons I la quantité $\int_1^0 \sin(2x)\exp(3x)dx$. Par continuité des intégrandes, I existe puis :

$$\begin{aligned}I &= \int_1^0 \operatorname{Im}\ (\exp(3x+2ix))\ dx \\ &= \operatorname{Im}\left(\int_1^0 \exp(3x+2ix)\ dx\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{\exp(3x+2ix)}{3+2i}\right]_1^0\right) \quad \text{car } 3+2i \text{ n'est pas nul} \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(1-\exp(3+2i))(3-2i)}{13}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{3-2i-3\exp(3+2i)+2i\exp(3+2i)}{13}\right) \\ &= \frac{-2-3e^3\sin(2)+2e^3\cos(2)}{13}.\end{aligned}$$

## 5.3 Propriétés de l'intégrale

### 5.3.1 Intégrale et bornes

**Proposition 247**

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue ou continue par morceaux sur J, on a alors :

1. $\int_a^a f(t)dt = 0$.
2. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

### 5.3.2 Relation de Chasles

**Proposition 248**

**Relation de Chasles**
Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est continue ou continue par morceaux sur $J$. Soient $r, u$ et $y$ trois éléments de $J$. On a :

$$\int_r^u f(t)dt = \int_r^y f(t)dt + \int_y^u f(t)dt.$$

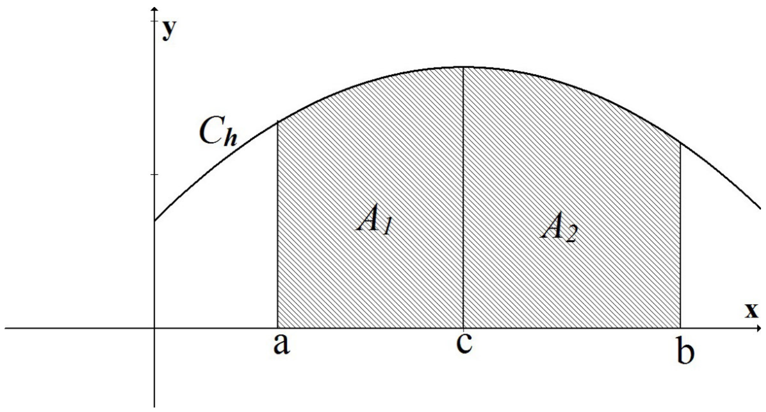
☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. On n'a pas forcément $r < y < u$. On peut écrire par exemple que :

$$\int_2^5 \cos(t)dt = \int_2^{-3} \cos(t)dt + \int_{-3}^5 \cos(t)dt.$$

☛ **Remarque :**

1. La relation de Chasles est évidente si on interprète l'intégrale en terme d'aire algébrique. Sur notre dessin, $\int_a^b h(t)dt$ est la somme de $\mathcal{A}_1$ et de $\mathcal{A}_2$, c'est -à-dire de $\int_a^c h(t)dt$ et de $\int_c^b h(t)dt$.




2. Penser à la relation de Chasles lorsqu'on veut calculer $\int_r^u f(t)dt$ et que l'expression de $f$ "change" sur son ensemble de définition. Par exemple, si $f$ fait intervenir une valeur absolue (si $f$ est $|g|$ alors, pour un élément $t$ de son ensemble de définition, $f(t)$ est $g(t)$ si $g(t)$ est positif et $-g(t)$ si $g(t)$ est négatif).

➤ ***Exercice :***

*Calculer* $\int_5^{-3} |t^2 - 3t + 2| dt$.

Sans difficulté, on trouve ce tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x^2 - 3x + 2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

et par la relation de Chasles, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_5^{-3} |t^2 - 3t + 2| dt &= \int_5^{2} |t^2 - 3t + 2| dt + \int_2^{1} |t^2 - 3t + 2| dt + \int_1^{-3} |t^2 - 3t + 2| dt \\ &= \int_5^{2} (t^2 - 3t + 2) dt - \int_2^{1} (t^2 - 3t + 2) dt + \int_1^{-3} (t^2 - 3t + 2) dt\end{aligned}$$

Intégrer un polynôme est loin d'être insurmontable ! Voici la réponse à obtenir : $-43$.

### 5.3.3 Linéarité de l'intégration

**Proposition 249**

**Linéarité de l'intégration**
Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soient $\nu$ et $u$ deux réels. On suppose que $f$ et $g$ sont continues ou continues par morceaux sur $J$, on a :

$$\int_a^b (\nu f(t) + u g(t))\, dt = \nu \int_a^b f(t) dt + u \int_a^b g(t) dt.$$

☛ **Remarque :**

De nouveau, la linéarité de l'intégration est évidente si on interprète l'intégrale en terme d'aire algébrique.

☞ **Mise en garde :**

1. Si $f$ et $g$ sont continues ou continues par morceaux sur $J$, la quantité $\int_a^b g(t) f(t) dt$ n'est a priori ni $\left(\int_a^b g(t) dt\right) \times \left(\int_a^b f(t) dt\right)$ ni $g(t) \int_a^b f(t) dt$ (qui d'ailleurs n'a pas de sens si $g$ n'est pas constante).
2. Le passage de $\int_a^b (\nu f(t) + u g(t))\, dt$ à $\nu \int_a^b f(t) dt + u \int_a^b g(t) dt$ n'est pas automatique. Il faut bien penser à vérifier que $f$ et $g$ sont toutes les deux continues ou continues par morceaux sur $J$ car $\int_a^b (\nu f(t) + u g(t))\, dt$ peut exister sans que ni $\nu \int_a^b f(t) dt$ ni $u \int_a^b g(t) dt$ n'existent !

☞ **Mise en garde :**

Ne pas confondre linéarité de l'intégration et relation de Chasles. Dans la relation de Chasles, il y a une seule fonction qu'on intègre sur deux domaines d'intégration jointif et dans la linéarité de l'intégration, il y a deux fonctions qu'on intègre sur un même domaine d'intégration.

➤ ***Exercice* :**

*Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$.

........................................................................................................

Bon, il y a du cos au-dessus. Pour rendre le problème plus symétrique, on introduit ces deux intégrales :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx.$$

Un petit mot d'abord pour dire que ces intégrales sont bien définies (ici, le problème vient du quotient, levez-le rapidement !). On a deux inconnues, il nous faut donc deux équations ! Additionnons et soustrayons, par linéarité de l'intégration, on a :

$$\begin{aligned} A+B &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= [\ln(|\cos(x)+\sin(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln\left(\frac{|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|}{|\cos(0)+\sin(0)|}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Deux équations et deux inconnues, cela ne pose plus de problème ! Finalement, on trouve que $A$ vaut $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln(2)$ et $B$ vaut $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln(2)$.

### 5.3.4 Croissance de l'intégration

**Proposition 250**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g \leqslant h$.
Soient $f_1 : [g,h] \to \mathbb{R}$ et $f_2 : [g,h] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues ou continues par morceaux sur $[g,h]$.

1. Si pour tout élément $t$ de $[g,h]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, on a $f_1(t) \geqslant 0$, alors on peut affirmer que $\int_g^h f_1(t)dt \geqslant 0$ (Positivité de l'intégration).
2. Si pour tout élément $t$ de $[g,h]$, sauf éventuellement en un nombre finis de points, on a $f_1(t) \geqslant f_2(t)$, alors on peut affirmer que : $\int_g^h f_1(t)dt \geqslant \int_g^h f_2(t)dt$ (Croissance de l'intégration).

**Proposition 251**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$.
Soient $f_1 : [g,h] \to \mathbb{R}$ et $f_2 : [g,h] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[g,h]$.

1. Si, pour tout $t \in [g,h]$, $f_1(t) \geqslant 0$ et si $f_1 \neq 0$, on a alors $\int_g^h f_1(t)dt > 0$.
2. Si, pour tout $t \in [g,h]$, $f_1(t) \geqslant 0$ et si $\int_g^h f_1(t)dt = 0$, $f_1$ est alors la fonction nulle (Positivité de l'intégration).
3. Si, pour tout $t \in [g,h]$, $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ et si $f_1 \neq f_2$, on a alors $\int_g^h f_1(t)dt > \int_g^h f_2(t)dt$ (Croissance de l'intégration).

☞ **Mise en garde :**

Deux mises en garde : Ne pas oublier d'hypothèse dans cette précédente proposition :

1. - On a $\int_0^\pi \cos(t)dt = 0$ et pourtant $\cos \neq 0$. On a oublié en disant ça l'hypothèse de positivité de la fonction.
   - On a $\int_0^{10} f(t)dt = 0$ avec $f$ fonction non nulle et positive suivante :

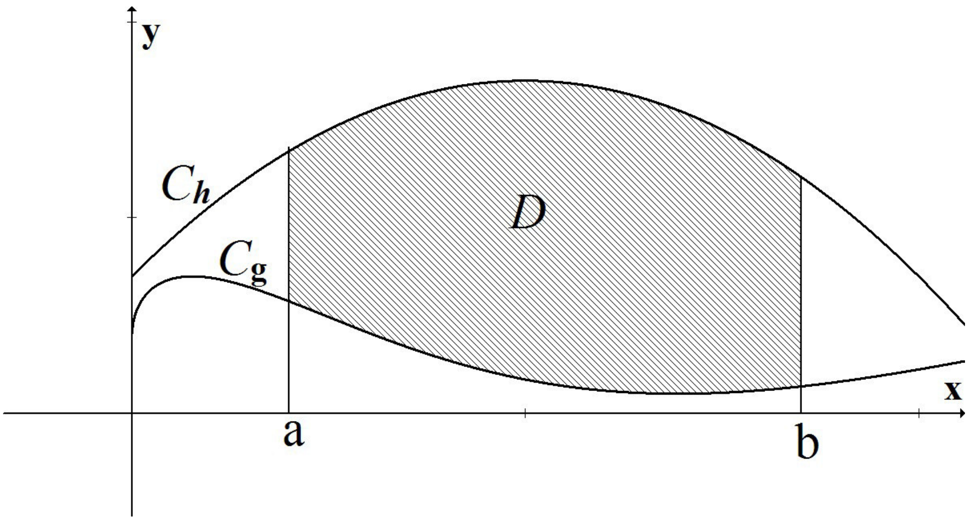
$$f : \begin{cases} [0,10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 2 \\ 8563 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Cette fois-ci, on a oublié l'hypothèse de continuité !

2. On peut donc intégrer les inégalités si les bornes sont dans le bon sens. Attention , il ne faut pas oublier d'inverser dans le cas contraire. Si pour tout $t \in [g, h]$, on a : $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ et que $f_1$ et $f_2$ sont continues sur $[g, h]$, on a alors $\int_h^g f_1(t)dt \leqslant \int_h^g f_2(t)dt$.

☛ **Remarque :**

De nouveau, la croissance de l'intégration est évidente si on se rappelle de la définition de l'intégrale comme aire algébrique. Sur notre dessin, $\int_a^b h(t)dt$ est supérieure à $\int_a^b g(t)dt$. La différence $\int_a^b h(t)dt - \int_a^b g(t)dt$ est d'ailleurs l'aire de la partie grisée.




## ➤ *Exercice :*

*Évaluer* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n!} \times \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)dt\right)$.

..........................................................................................

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $I_n = \frac{1}{n!} \times \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)dt$. Pour tout $t \in [0, 1]$, de la croissance et la positivité de exp et de la positivité sur $[0, 1]$, on en déduit :

$$0 \leqslant (1-t)^n \exp(t) \leqslant (1-t)^n e.$$

Par croissance de l'intégration, que l'on peut invoquer car les bornes sont dans l'ordre croissant $(0 < 1)$ et $t \mapsto (1-t)^n \exp(t)$ et $t \mapsto (1-t)^n e$ sont continues sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n edt$$

Comme $\frac{1}{n!} > 0$, on en déduit que : $0 \leqslant I_n \leqslant e \times \frac{1}{n!} \times \left(-\frac{(1-1)}{(n+1)} + \frac{0}{(n+1)}\right)$ puis, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{(n+1)!}\right) = 0$, par le théorème des gendarmes, on peut donc affirmer que $\lim_{n\to+\infty}(I_n)$ existe et vaut $0$.

### 5.3.5 Inégalité triangulaire et inégalité de la moyenne

**Proposition 252**

**Inégalité triangulaire**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g \leqslant h$.
Soit $f : [g,h] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est continue ou continue par morceaux sur $[g,h]$, on a alors l'inégalité suivante :

$$\left|\int_g^h f(t)dt\right| \leqslant \int_g^h |f(t)|dt.$$

☛ **Remarque :**

Soient $f_n$ des fonctions continues sur un intervalle J. A priori, les quantités suivantes, $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_J f_n(t)dt\right)$ et $\int_J\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt$, ne sont pas les mêmes. Un contre-exemple est fourni par les applications $f_n$ (où $n$ est un entier naturel non nul) suivantes :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n(1-nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = 0$. Ne vous inquiétez pas, on va le démontrer.
En effet, posons $a_n = \frac{1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(t)dt &= \left[n \times \left(x - n\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{a_n} + [0]_{a_n}^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) = \frac{1}{2}$. $\lim_{n\to+\infty}(f_n(t))$ vaut $0$ ce qui entraîne que $\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = 0$.

**Définition 253**

Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$.
Soit $f : [g, h] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est continue ou continue par morceaux sur $[g, h]$, on appelle alors valeur moyenne de $f$ sur $[g, h]$ le réel $\dfrac{\displaystyle\int_g^h f(t)dt}{h-g}$.

✌ **Exemple :**

La valeur moyenne de la partie entière sur $[0, 2]$ est $\dfrac{0 \times (1-0) + 1 \times (2-1)}{2-0}$ soit $\dfrac{1}{2}$.

☛ **Remarque :**

Utilisons les notations de la précédente définition. La valeur moyenne de $f$ sur $[g, h]$ est la valeur que doit prendre $w$ une fonction constante sur $[g, h]$ pour que l'on ait $\displaystyle\int_g^h w(t)dt = \int_g^h f(t)dt$.

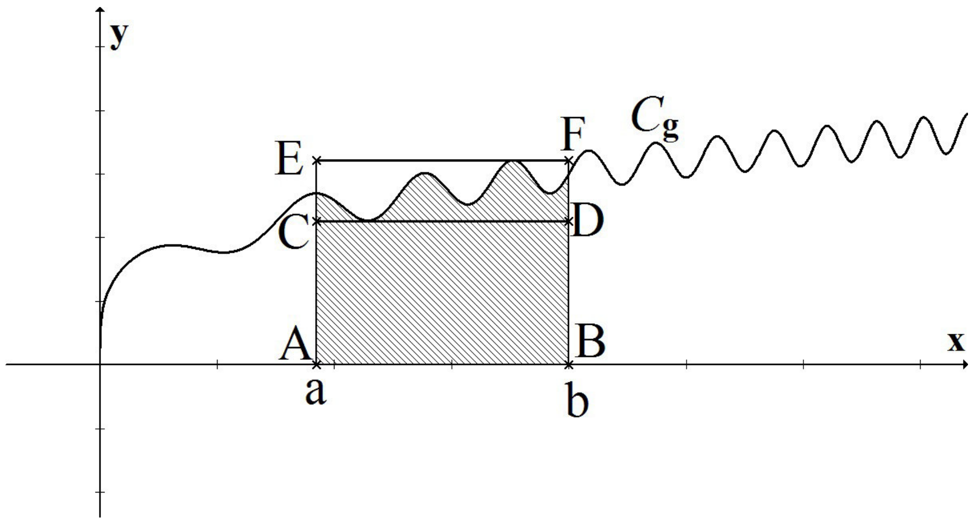
**Proposition 254**

**Inégalité de la moyenne**
Soient $g$ et $h$ deux réels tels que $g < h$.
Soit $f : [g, h] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est continue sur $[g, h]$. Appelons $m$ le minimum de $f$ sur $[g, h]$ et $M$ son maximum. On a alors :

$$m(h-g) \leqslant \int_g^h f(t)dt \leqslant M(h-g).$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. L'inégalité de la moyenne dit tout simplement que si $f$ est toujours comprise entre $m$ et $M$ alors sa valeur moyenne aussi. Ceci est de nouveau évident graphiquement. Sur notre dessin, $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est l'aire grisée. Elle est supérieure à l'aire du rectangle ABCD et inférieure à l'aire du rectangle ABEF.




## 5.4 Technique de calcul

### 5.4.1 Intégrations par parties

**Théorème 255**

Soient $u : J \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$ alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

■ **Méthode:**

Notons $U$ une primitive de $u$ et $V$ une primitive de $v$. Quand on veut évaluer $\int_a^b u(t)v(t)dt$ par intégration par parties, il faut penser à comparer les trois quantités suivantes :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt, \int_a^b U(t)v'(t)dt \text{ et } \int_a^b V(t)u'(t)dt.$$

Si l'une des deux dernières est plus évidente à évaluer que $\int_a^b u(t)v(t)dt$ alors on poursuit notre intégration par parties.
Quand on a un produit, essayez d'abord de reconnaître une primitive usuelle (en cherchant les $u$ et les $u'$ qui semblent être présents) et, si cela n'aboutit pas, essayez une intégration par parties. C'est en particulier le cas si :

- On veut se débarrasser d'un polynôme. On le dérive, cela abaisse son degré. S'il est de degré $n$, on fera donc $n$ intégrations par parties pour arriver à une constante.
- On veut se débarrasser d'une fonction dont la dérivée est plus simple que la fonction d'origine. C'est le cas du logarithme (dont la dérivée est une fraction rationnelle) et d'une arctangente (dont la dérivée est aussi une fraction rationnelle).

- On veut faire une récurrence (la plupart du temps, les formules de récurrence avec des intégrales se démontrent avec une intégration par parties).

## ➤ *Exercice :*

*Expliciter* $\left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$*. Petite indication, pour tout couple d'entiers naturels* $(n,p)$*, on pourra poser :* $B_{n,p}=\int_{-1}^{1}(1-t)^n(1+t)^p\mathrm{d}t.$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Soit $n$ un entier naturel non nul, $t\mapsto(1-t)^n$ et $t\mapsto\dfrac{(1+t)^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
B_{n,n} &= \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}(1-t)^n\right]_{-1}^{1}+n\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t\\
&= \frac{n}{n+1}B_{n-1,n+1}\\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}B_{n-2,n+2}\\
&= \cdots \text{ (On poursuit le processus)}\\
&= \frac{n!}{(n+1)\cdots(n+n)}B_{0,2n}\\
&= \frac{(n!)^2B_{0,2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Le calcul de $B_{0,2n}$, qui est $\int_{-1}^{1}(1+t)^{2n}\mathrm{d}t$, ne pose pas de problème. $B_{0,2n}$ vaut $\dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t &= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}\\
&= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}2^{2n+1}
\end{aligned}$$

Signalons que cette formule est aussi valable en $0$.

### 5.4.2 Changement de variable

**Proposition 256**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels. $K$ désignera le segment $[\alpha, \beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ et le segment $[\beta, \alpha]$ si $\beta \leqslant \alpha$.
Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $u : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f$ est continue ou continue par morceaux sur $u(K)$ et que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $K$. On a alors : $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$ existent et :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

On dit qu'on effectue le changement de variable $x = u(t)$ et que celui-ci est licite.

☞ **Mise en garde :**

On a besoin de $f$ continue ou continue par morceaux sur $u(K)$ et pas forcément sur $[u(\alpha), u(\beta)]$ ou sur $[u(\beta), u(\alpha)]$ ($u$ n'est pas nécessairement monotone).

☛ **Remarque :**

Vous aurez le plus souvent une indication vous disant d'effectuer un changement de variable, voire même vous donnant le changement de variable à faire. Avant d'essayer un changement de variable farfelu, commencez par essayer de reconnaître une forme usuelle (avec du $u'$ et du $u$) ou tentez une intégration par parties.

■ **Méthode:**

Il y a deux façons de lire la formule du changement de variable : de droite à gauche et de gauche à droite. En général, on n'a pas $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$ ou $\int_a^b f(u(t))u'(t)dt$ sous la main. On a tout simplement une intégrale du type $\int_\alpha^\beta g(x)dx$ à calculer. L'idée est de mettre cette intégrale sous la forme souhaitée, $\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$ ou $\int_a^b f(u(t))u'(t)dt$ puis d'utiliser la formule. Un peu plus de détails :

- **Égalité de gauche à droite :**
  On veut poser $x = u(t)$, cela signifie qu'on a envie de décrire notre variable d'intégration à l'aide d'une fonction intermédiaire. Par exemple, si $x$ décrit $[-1, 1]$, on peut penser à un cosinus. Pour faire ce changement de variable, il faut alors pouvoir écrire $\alpha$ et $\beta$ sous la forme $u(a)$ et $u(b)$ : à vous de déterminer $a$ et $b$ puis de vérifier que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(a, b)$ et que $g$ est continue sur $u((a, b))$.
- **Égalité de droite à gauche :**
  Une fonction se répète dans ce qu'on souhaite intégrer, par exemple, il y a plein de sinus. On interprète ce " bloc" $u(x)$ comme étant une variable $t$. C'est de cette façon que vous utiliserez

en général le changement de variable, ne serait-ce que pour les règles de Bioche (cf un peu plus loin dans le livre). Il faut alors que $u$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\alpha, \beta)$ et déterminer une fonction $f$ continue sur $u((\alpha, \beta))$ tel que pour tout $x$ de $(\alpha, \beta)$, on ait :

$$g(x) = f(u(x)) \times u'(x).$$

Pour trouver $f$, il faut donc factoriser $u'(x)$ dans $g(x)$ et exprimer ce qui reste comme une fonction de $u(x)$.

En pratique, quand on utilise l'égalité de droite à gauche, on pose $x = u(t)$ ce qui donne $dx = u'(t)dt$. Il reste donc à mettre en valeur $u'(t)dt$, le remplacer par $dx$ puis remplacer tous les $u(t)$ par des $x$. Ne pas oublier aussi de changer les bornes : Pendant que $t$ évolue de $a$ à $b$, $x$, qui est $u(t)$, évolue de $u(a)$ à $u(b)$. Ainsi, en posant $x = \sin(t)$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\cos(t)\sin^3(t)}{1+\sin^2(t)}dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(1)} \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

On a remplacé $\cos(t)dt$ par $dx$ et les $\sin(t)$ par $x$. Si vous faites ainsi, n'oubliez pas de vérifier les conditions qui vous permettent de faire le changement de variable. Ici, il faut dire que sin est de classe sur $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ est continue sur $\sin([0, 1])$.

## ➤ *Exercice* :

*Calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\exp(2t)}{1+2\exp(2t)+\exp(4t)}dt$.

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ existe car $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ par composition. On va faire un changement de variable, on va utiliser l'égalité de gauche à droite. On a :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}dx.$$

avec $u = \sin$. On va faire le changement de variable $x = \sin(t)$ car $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \subset [0, 1]$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0; 1]$. Par changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt \text{ car cos est positif sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2. La deuxième intégrale existe car $t \mapsto 1 + 2\exp(2t) + \exp(4t)$ ne s'annule pas sur $[0; 10]$. On va faire un changement de variable, on va utiliser l'égalité de droite à gauche (quelle surprise !). On introduit les fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \frac{1}{2(1+2x+x^2)} \text{ et } u : t \mapsto \exp(2t).$$

$u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,10]$, $u([0,10]) \subset [1, \exp(20)]$, $f$ est, par quotient continue sur $[1, \exp(20)]$. On peut faire le changement de variable $x = \exp(2t)$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \frac{\exp(2t)}{1+2\exp(2t)+\exp(4t)}dt &= \int_0^{10} f(u(t)) \times u'(t)dt \\
&= \int_{\exp(0)}^{\exp(20)} \frac{1}{2(1+2x+x^2)}dx \\
&= \int_1^{\exp(20)} \frac{1}{2} \times (1+x)^{-2}dx \\
&= \left[\frac{-1}{2(1+x)}\right]_1^{\exp(20)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\exp(20)}\right)
\end{aligned}$$

☞ **Mise en garde :**

Bien penser à vérifier toutes ces conditions, une belle bêtise avec ce changement de variable hâtif : Posons $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(x)}$. Par positivité de l'intégration, $I$ est strictement positive. Par le changement de variable $t = \tan(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\tan(0)}^{\tan(\pi)} \frac{dt}{1+t^2} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+t^2}} \\
&= \int_{\tan(0)}^{\tan(\pi)} \frac{dt}{1+1+t^2} \\
&= \int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Résultat faux car le changement de variable $t = \tan(x)$ sur $[0,\pi]$ n'est pas autorisée : En effet, $\tan(0)$ et $\tan(\pi)$ existent bien mais $\tan$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ à cause de son léger souci en $\dfrac{\pi}{2}$.

**Proposition 257**

Soit $r$ un réel strictement positif.
Soit $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f$ est continue ou continue par morceaux sur $[-r, r]$.

1. Si $f$ est paire sur $[-r, r]$ alors $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(t)dt = 2\int_0^r f(t)dt$.
2. Si $f$ est impaire sur $[-r, r]$ alors $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(t)dt = 0$.

**Proposition 258**

Soit $T$ un réel strictement positif.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction supposé continue et $T$-périodique, on a :

- $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$
- Pour tout entier $n$, on a : $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$

☛ **Remarque :**

De nouveau, ces deux propositions sont évidentes si on interprète l'intégrale en terme d'aire algébrique.

■ **Méthode:**

- Quand la fonction est $T$-périodique, si vous intégrez sur un intervalle de longueur $T$, vous pouvez donc choisir celui qui vous arrange.
- Quand vous intégrez sur un intervalle centré en zéro, regardez rapidement s'il n'y a pas une histoire de parité. Si la fonction est impaire alors c'est super car vous avez fini votre calcul, cela donne $0$. Si votre fonction est paire, vous avez divisé par deux votre intervalle d'intégration, cela peut être utile pour avoir des changements de variable licites.

Apprenez aussi la preuve de ces deux propositions, elle est basée sur les changements de variable, cela peut vous donner des idées pour d'autres exos !

➤ ***Exercice*** **:**

*Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\exp(\sin(x))}{1+\exp(\sin(x))}dx.$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Notons $A$ cette intégrale, elle est définie (par continuité obtenue par quotient de la fonction à intégrer, continuité à prouver rapidement par quotient), et $f$ la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1-\exp(\sin(x))}{1+\exp(\sin(x))}$.
Vous avez remarqué sans doute qu'elle était $2\pi$ périodique. De plus, cette fonction est impaire (cf exemple du chapitre 5 "Rappel d'analyse"). En exploitant la $2\pi$-périodicité puis l'imparité de $f$, on a donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\exp(\sin(x))}{1+\exp(\sin(x))}dx \text{ par } 2\pi\text{-périodicité de } f \\ &= 0 \text{ par imparité de } f \end{aligned}$$

Vous voyez que c'est pas mal ces histoires d'imparité... si vous avez chercher une primitive de $f$, vous avez probablement eu du mal !

### 5.4.3 Primitives de fractions rationnelles

**✘ Lemme 259 :**
Soient $K_1$ et $K_2$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $r$ un réel non nul. Soit $f$ une fonction numérique continue sur $K_1$. Si, pour tout élément $x$ de $K_2$, $rx+b$ appartient à $K_1$, alors une primitive de $x \mapsto f(rx+b)$ sur $K_2$ est $x \mapsto \dfrac{F(rx+b)}{r}$ en notant $F$ une primitive de $f$.
Voici les premières fractions rationnelles qu'on va intégrer :

**Proposition 260**

Soit $r$ un réel non nul. On a :

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)}$ sur tout intervalle de réels ne contenant pas $a$ est : $x \mapsto \ln(|x-a|)$
- Si $n$ est un entier différent de $1$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$ sur tout intervalle de réels ne contenant pas $a$ .
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+r^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{r}\arctan\left(\dfrac{x}{r}\right)$.

On va maintenant apprendre à primitiver une fonction du type $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$. Il faut d'abord qu'on sache décomposer avec une telle fraction :

**Proposition 261**

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\Delta = p^2-4q$ et $P = X^2+pX+q$. Si $\Delta > 0$, on note $x_1$ et $x_2$ les racines de $P$ et, si $\Delta = 0$, on note $x_0$ la racine double de $P$.
Soit $x$ un réel, sous réserve d'existence, on a :

$$\frac{1}{x^2+px+q} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2} & \text{si } \Delta < 0 \\ \dfrac{1}{x_1-x_2}\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right) & \text{si } \Delta > 0 \\ \dfrac{1}{(x-x_0)^2} & \text{si } \Delta = 0 \end{cases}$$

Dans le premier cas (celui où $\Delta < 0$), $\beta$ et $\alpha$ sont des réels à déterminer.

**☛ Remarque :**

Pour retrouver ces formules, il suffit de développer. Pour le cas où $\Delta < 0$, il suffit d'utiliser la forme canonique comme vous le faisiez en classe de première : On reprend les notations de la précédente proposition et on suppose que $\Delta < 0$. Pour tout réel $x$, on a :

$$\begin{aligned}
x^2+px+q &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \\
&= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} \\
&= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-4q+p^2}}{2}\right) \quad \text{ce que l'on peut écrire car } -4q+p^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

**Proposition 262**

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est donc (en utilisant les notations de la précédente proposition) :

- $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\arctan\left(\dfrac{x+\beta}{\alpha}\right)$ si $\Delta < 0$. C'est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x_1-x_2}\ln\left(\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right)$ si $\Delta > 0$. C'est une primitive de $f$ sur tout intervalle ne contenant ni $x_1$ ni $x_2$.
- $x \mapsto \dfrac{-1}{x-x_0}$ si $\Delta = 0$. C'est une primitive de $f$ sur tout intervalle ne contenant pas $x_0$.

☛ **Remarque :**

On sait primitiver toute fraction rationnelle. Pas de grande proposition ni de mystérieuse formule pour cela, il faut juste maîtriser la méthode exposée ci-dessous.

■ **Méthode:**

Prenons une fonction rationnelle (i.e. un quotient de polynômes) $F$ quelconque.

- Si $F$ n'est pas une fonction rationnelle vue dans les propositions précédentes, une mystérieuse théorie, la décomposition en éléments simples (théorie qui n'est pas au programme des bcspt), nous dit qu'on va pouvoir décomposer $F$ sous la forme d'une somme de fractions plus simples. Cette théorie de décomposition en éléments simples n'étant pas au programme, l'énoncé vous indiquera donc la forme à rechercher et il vous restera uniquement à identifier des coefficients.
- Si $F$ est déjà de la bonne forme, on applique les propositions précédentes :
  - Pour $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)}$, une primitive est $x \mapsto \ln(|x-a|)$.
  - Pour $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$, une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$ si $n$ est un entier différent de $1$.
  - On intègre $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$ ( $\alpha$ réel non nul) en $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha} \times \arctan\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$. Dériver pour retrouver cette forme !

- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$. Là, ça se complique. Vous allez distinguer les cas suivant le signe de $\Delta$ avec $\Delta$ le discriminant de $P = X^2 + pX + q$ :
  1. Si $\Delta$ est nul, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ avec $x_0$ la racine double de $P$, une primitive est alors $x \mapsto \dfrac{1}{x_0 - x}$.
  2. Si $\Delta$ est strictement positif, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ peut s'écrire comme étant la fonction $x \mapsto \alpha\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$ avec $\alpha$ réel à déterminer, $x_1$ et $x_2$ les racines réelles de $P$. Pour déterminer $\alpha$, il suffit de mettre au même dénominateur :
  $$\begin{aligned}\alpha \times \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) &= \alpha \times \frac{x - x_2 - x + x_1}{(x-x_1)\times(x-x_2)} \\ &= \alpha \times \frac{x_1 - x_2}{x^2+px+q}\end{aligned}$$
  puis d'identifier. On voit que $\alpha$ est $\dfrac{1}{x_1 - x_2}$ (inutile de retenir ce résultat par cœur, retenez la démarche !). Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est alors $x \mapsto \alpha \ln\left(\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right)$.
  3. Si $\Delta$ est strictement négatif, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2}$ avec $\beta$ et $\alpha$ des réels à déterminer. Pour déterminer $\beta$ et $\alpha$, il suffit d'utiliser la forme canonique :
  $$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$
  Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est alors $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\arctan\left(\dfrac{x+\beta}{\alpha}\right)$.
- $x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$ : C'est de pire en pire. L'idée est de se ramener au cas précédent (une constante au numérateur et un polynôme de degré 2 au dénominateur) à l'aide de la linéarité de l'intégration. On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, on a :
$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{\frac{2b}{a} - p}{x^2+px+q}\right)$$
Ne retenez pas la formule précédente mais simplement l'idée de faire apparaître, au numérateur, la dérivée du dénominateur. Vous remarquerez qu'on n'a pas fait ainsi :
$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{(a-2)x + b - p}{x^2+px+q}\right)$$
Dans les deux cas, on sait intégrer $\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$ ($x \mapsto \ln\left(|x^2+px+q|\right)$ en est une primitive) mais avec la première formule, il nous reste $\dfrac{\frac{2b}{a} - p}{x^2+px+q}$ à intégrer (ce qu'on sait faire

grâce au cas précédent) tandis que, dans le deuxième cas, on a encore une fraction d'un polynôme de degré 1 sur un polynôme de degré 2. Retenez bien cette philosophie d'utiliser le dénominateur et la linéarité pour simplifier le problème.

## ➤ *Exercice :*

*On pose* $I = \int_1^{10} \frac{1}{x \times (1+x+x^2)} dx$. *Calculer* I *après avoir trouvé des réels* $a$,$b$ *et* $c$ *tels que, pour tout réel non nul* $x$, *on ait :* $\frac{1}{x \times (1+x+x^2)} = \frac{a}{x} - \frac{bx+c}{1+x+x^2}$.

.................................................................................................

Soit $x$ un réel non nul, on note que $x \times (1+x+x^2)$ est non nul. Tout ce qu'on va manipuler dans la suite sera donc bien définie. On développe, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} - \frac{bx+c}{1+x+x^2} &= \frac{a + ax + ax^2 - bx^2 - cx}{x \times (1+x+x^2)} \\ &= \frac{(a-b)x^2 + (a-c)x + a}{x \times (1+x+x^2)}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $x$ non nul, on a : $\frac{1}{x \times (1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{1+x+x^2}$. Par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx - \int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2} dx \\ &= \ln(10) - \int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2} dx.\end{aligned}$$

Il reste donc uniquement $\int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2} dx$ à calculer, suivons la méthode ! On a :

$$\begin{aligned}\int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2} dx &= \frac{1}{2}\left(\int_1^{10} \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx + \int_1^{10} \frac{1}{1+x+x^2} dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\ln(|1+x+x^2|)\right]_1^{10} + \int_1^{10} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 + \frac{3}{4}} dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{111}{3}\right) + \frac{2}{3}\int_1^{10} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{111}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)\right]_1^{10}\end{aligned}$$

Bref, on obtient après pas mal de calcul que :

$$I = -\frac{5\sqrt{3}\arctan(7\sqrt{3})}{9} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{100}{37}\right) + \frac{5\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{37}.$$

### 5.4.4 Règles de Bioche

**Proposition 263**

Soit $F$ une fraction rationnelle de deux variables et $\alpha$ un réel non nul.
Les primitives de $x \mapsto F(\cos(\alpha x), \sin(\alpha x))$ peuvent s'obtenir par changement de variable.
On pose $w(x) = F(\cos(\alpha x), \sin(\alpha x))dx$ l'élément différentiel.

- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$ , un changement de variable adapté est $t = \cos(x)$
- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$ , un changement de variable adapté est $t = \sin(x)$
- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$ , un changement de variable adapté est $t = \tan(x)$
- Sinon, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

■ **Méthode:**

Si on veut intégrer $x \mapsto F(\cos(x), \sin(x))$ avec $F$ une fonction rationnelle de deux variables, on va effectuer un changement de variable et, une fois le bon changement de variable, vous n'aurez plus qu'à intégrer une fonction rationnelle : Vous savez le faire depuis que vous avez travaillé la terrible méthode précédente ! Pour savoir quel changement de variable faire, on va appliquer les règles de Bioche qu'on vient de voir. On introduit l'élément différentiel $w(x) = F(\cos(x), \sin(x))dx$ et on fait les tests suivants :

- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$ , le changement de variable $t = \cos(x)$ est adapté (Un autre pourra fonctionner mais on est sûr que celui-ci sera pertinent).
- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$ , le changement de variable $t = \sin(x)$ est adapté (Un autre pourra fonctionner mais on est sûr que celui-ci sera pertinent).
- Si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$ , le changement de variable $t = \tan(x)$ est adapté (Un autre...).
- Sinon, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (Un autre...).

Attention, dans ce dernier cas, les calculs vont être terribles ! Vérifiez à nouveau si une autre des transformations ne marche pas avant de vous lancer dans les calculs ! Pour retenir ces changements de variable, c'est très simple, vous choisissez la fonction trigonométrique qui est invariante par la transformation qui laisse invariante $w(x)$. Par exemple, la fonction trigonométrique qui est invariante par la transformation $x \mapsto \pi - x$ est sin et vous allez poser $t = \sin(x)$ si $w(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$.

☞ **Mise en garde :**

Attention, vous avez pu noté qu'on avait posé $w(x) = F(\cos(x), \sin(x))dx$ et pas $w(x) = F(\cos(x), \sin(x))$. N'oubliez pas ce $dx$, ça ne change rien si vous faites la transformation $x \mapsto \pi + x$ mais un signe $-$ apparaît si vous faites la transformation $x \mapsto \pi - x$ ou la transformation $x \mapsto -x$.

☛ **Remarque :**

Pour le calcul de $\displaystyle\int_a^b \sin^n(x)\cos^p(x)dx$ avec $n$ et $p$ entiers pairs, on préfère linéariser $x \mapsto \sin^n(x)\cos^p(x)$ et éviter le changement de variable $u = \tan(x)$.

## ➤ *Exercice :*

*Calculer* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\cos(u)+\sin(2u)}{4-2\cos^2(u)+2\sin(u)}du$ *et* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2(t)\sin^4(t)dt.$

On commence par expliquer rapidement pourquoi ces deux intégrales sont définies (il suffit d'invoquer la continuité des fonctions intervenantes). Ce sont des fonctions rationnelle en sinus et cosinus, on va donc utiliser les règles de Bioche.

1. Pour la première intégrale (que l'on va appeler $A$), un changement de variable adapté est $x = \sin(u)$ car l'élément différentiel est invariant par la transformation $u \mapsto \pi - u$. On a :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\cos(u)+2\sin(u)\cos(u)}{4-2+2\sin^2(u)+2\sin(u)}du \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+\sin(u)}{1+\sin^2(u)+\sin(u)} \times \sin'(u)du \end{aligned}$$

On pose $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2+x}$. Par quotient de polynôme dont le dénominateur ne s'annule pas, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\sin(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, on peut donc effectuer le changement de variable $\sin(u) = x$, on a donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(u))\sin'(u)du \\ &= \int_{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\sin(0)} f(x)dx \\ &= \int_1^0 \frac{1+x}{1+x^2+x}dx \end{aligned}$$

Dans l'exercice précédent, on a déjà calculé presque la même intégrale (la même mais avec les bornes changées) : On vous laisse finir le calcul !

2. Pour tout réel $x$, on a (en utilisant les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton) les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^4(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}\right)^4 \times \left(\frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\exp(4ix)+4\exp(2ix)+6+4\exp(-2ix)+\exp(-4ix)}{16}\right) \\ &\times \left(\frac{-\exp(2ix)+2-\exp(-2ix)}{4}\right) \\ &= \frac{-\exp(6ix)-2\exp(4ix)+\exp(2ix)+4}{64} \\ &+ \frac{\exp(-2ix)-2\exp(-4ix)-\exp(-6ix)}{64} \\ &= \frac{-\cos(6x)-2\cos(4x)+\cos(2x)+2}{32} \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos^2(t)\sin^4(t)dt &= \left[\frac{-\sin(6x)}{192} + \frac{-\sin(4x)}{64} + \frac{\sin(2x)}{64} + \frac{x}{16}\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{4+3\pi}{192}\end{aligned}$$

Avec les règles de Bioche, on aurait dû faire le changement de variable $u = \tan(t)$ ce qui transforme $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2(t)\sin^4(t)dt$ en $\displaystyle\int_{\tan(0)}^{\tan(\pi/4)} \frac{u^4}{(1+u^2)^4}du$. On aurait pu s'en sortir mais cela aurait été particulièrement pénible : Essayez pour voir !

## 5.5 Sommes de Riemann

**Définition 264**

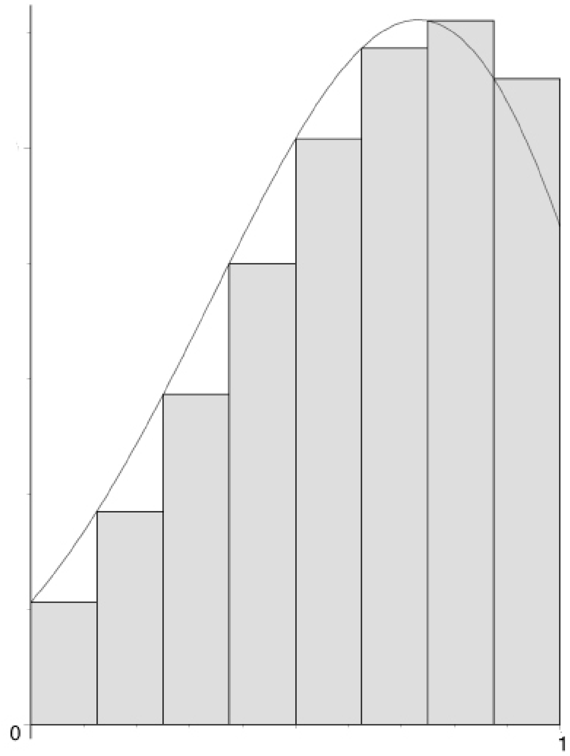
Soit $f$ une fonction numérique et continue sur $[0,1]$. Soit $n$ un entier naturel non nul. On appelle somme de Riemann de $f$ sur $[0,1]$ les deux réels suivants :

$$S_{1,n}(f) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } S_{2,n}(f) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ces quantités sont des sommes d'aires de rectangles associés à $f$.

☛ **Remarque :**

Il faut bien comprendre ce que représentent ces deux sommes. Prenons $f$ une fonction positive définie sur $[0,1]$ et découpons $[0,1]$ en $n$ intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$. On va se servir des rectangles suivants :




$\dfrac{1}{n}$ est la largeur de tous ces rectangles et $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ la hauteur du $k$-ième rectangle. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est tout simplement la somme des aires des rectangles représentés au-dessus.

**Proposition 265**

Soit $f$ une fonction numérique et définie sur $[0,1]$. Si $f$ est continue sur $[0,1]$ alors les sommes de Riemann de $f$ sur $[0,1]$ convergent et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(t)dt$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(t)dt$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. Cette dernière proposition se comprend très bien graphiquement. Elle signale qu'une bonne approximation de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est donnée par les sommes de Riemann de $f$. On imagine facilement qu'en augmentant le nombre de rectangles (i.e. $n$), on s'approche de l'aire sous la courbe. On peut faire la même remarque pour $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

■ **Méthode:**

Quand on manipule une somme sur $k$ variant de $0$ à $n-1$ ou de $1$ à $n$ et qu'on cherche à savoir si cette somme converge et calculer sa limite, on peut penser à une somme de Riemann. Pour cela, on procède en deux temps :

1. On factorise par $\dfrac{1}{n}$.
2. On cherche à faire apparaître le terme général de la somme comme étant une fonction de $\dfrac{k}{n}$. On explicite clairement cette fonction $f$.

Si $f$ est bien continue sur $[0,1]$, il suffit d'utiliser le rappel ci-dessus. Il reste alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ à calculer (ce qui peut s'avérer particulièrement pénible !).

☞ **Mise en garde :**

Quand on écrit $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $f$ est une fonction qui ne peut pas dépendre de $n$ (Sinon, quand vous augmentez $n$, vous augmentez le nombre de rectangle mais vous changez aussi de fonction !).

## ➤ *Exercice* :

*Déterminer, si elles existent, les limites de* $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Appelons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cette suite. Soit $n$ un entier naturel non nul, $v_n$ est strictement positif et on a :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \frac{1}{n}\times\ln\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} k}{n^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k}\right)\\
&= \frac{1}{n}\times\ln\left(\frac{\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k}{n^n}\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= \frac{1}{n}\times\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\times\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+n}{n}\right) \quad \text{par changement d'indice}\\
&= \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec } f : x\mapsto \ln(1+x)
\end{aligned}$$

Or $f$ est continue sur $[0,1]$ donc $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt$ i.e. $2\ln(2)-1$ après calcul.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\frac{4}{e}$.

# Partie 6

# Équations différentielles

## 6.1 Équations différentielles à coefficients constants

### 6.1.1 Définition

**Définition 266**

- On appelle équation différentielle linéaire une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et qui fait intervenir cette fonction et ses dérivées.
- Intégrer (ou Résoudre) une équation différentielle c'est trouver un ensemble de fonctions solutions du problème posé.

✌ **Exemple :**

Dans un circuit RC, on a vu en cours de physique que la charge du condensateur $q$ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q'(t) + \frac{1}{RC} \times q(t) = \frac{V}{R}.$$

Une solution de cette équation différentielle est la fonction suivante :

$$q : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) + VC \end{cases}$$

Il suffit de constater que cette fonction est dérivable et vérifie les conditions imposées.

### 6.1.2 Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Dans cette partie, $a$ et $b$ seront deux réels, I un intervalle de réels sans aucun rapport avec $a$ et $b$.

**Définition 267**

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation du type $y' + ay = b$ d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I.
- Résoudre la précédente équation revient à trouver une fonction $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ telle que $y$ est dérivable sur I et telle que, pour tout réel $x$ de I, on ait :

$$y'(x) + ay(x) = b.$$

✌ **Exemple :**

La fonction $\phi : t \longmapsto \dfrac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I. En physique, on interprète souvent cette solution comme la position d'équilibre ou le régime stationnaire. Par exemple, la charge d'équilibre dans un circuit RC est la constante $VC$, c'est la fonction constante de de l'équation différentielle

$$q' + \frac{1}{RC} \times q = \frac{V}{R}$$

d'inconnue $q$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$

**Proposition 268**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I est l'ensemble suivant :

$$\left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{b}{a} + \lambda \exp(-ax) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

✌ **Exemple :**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $q' + \dfrac{1}{RC} \times q = \dfrac{V}{R}$ d'inconnue $q$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble suivant :

$$\left\{ q : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) + VC \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si on rajoute la condition que la charge est nulle au début de l'expérience alors, on obtient que la solution est la fonction $q$ suivante :

$$q : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto -VC \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) + VC \end{cases}.$$

☛ **Remarque :**

On note que la solution générale d'une équation différentielle à coefficients constants $(E)$ est la somme d'une solution particulière de $(E)$, par exemple la fonction $x \mapsto \frac{b}{a}$ si on utilise les précédentes notations, et de la solution générale de l'équation suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :

$$y' + ay = 0$$

que l'on appelle équation homogène associée à $(E)$.

### 6.1.3 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

**Définition**

**Définition 269**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels.

- On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation du type $ay'' + by' + cy = d$ $(E)$ d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable sur I.
- Résoudre $(E)$, c'est trouver une fonction $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ telle que $y$ est deux fois dérivable sur I et telle que, pour tout réel $x$ de I, on ait :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d.$$

✌ **Exemple :**

L'équation d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable $2y'' + 3y' + 4y = 9$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la définition précédente. Si $a = 0$, $(E)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Comme on sait déjà les résoudre, on se permettra dans la suite de supposer que $a \neq 0$ et, par division par $a$, on peut supposer que $a = 1$.

Dans toute cette partie, on note :

- I un intervalle de réels. $b$, $c$ et $d$ trois réels. On suppose $c$ non nul.
- $(E)$ l'équation différentielle suivante d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable sur I : $y'' + by' + cy = d$ $(E)$.

**Résolution de l'équation homogène associée**

**Définition 270**

On appelle équation homogène associée à $(E)$ l' équation différentielle $(H)$ d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable suivante :

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (H)$$

Dans toute cette partie, $(H)$ désignera l'équation homogène associée à $(E)$.

**Proposition 271**

On va noter $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $(H)$. Pour l'expliciter, on résout l'équation caractéristique associée à $(H)$, c'est l'équation, d'inconnue $x$ complexe, $x^2 + bx + c = 0$. On distingue alors les cas suivants :

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1$ et $r_2$, on a alors :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Si l'équation caractéristique admet une racine double $r_0$, on a alors :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (\lambda + \mu x) \times \exp(r_0 x) \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes, elles seront de la forme $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \exp(\alpha x) \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

✌ **Exemple :**

1. Si $\phi(0) = 2$, $\phi(1) = 7e^3$ et $\phi$ vérifie l'équation suivante d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

alors, en utilisant la précédente proposition, on prouve que :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (2 + 5x) \exp(3x) \end{cases}.$$

2. Si $\phi(0) = 2$, $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\phi$ vérifie l'équation suivante d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ :

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

alors, en utilisant la précédente proposition, on prouve que :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (2\cos(2x) + \sin(2x))\exp(-x) \end{cases}.$$

**Solution générale de** $(E)$

**Proposition 272**

La solution générale de $(E)$ est la somme d'une solution particulière de $(E)$ et de la solution générale de $(H)$.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente proposition. On a une solution particulière de $(E)$, c'est $x \mapsto \frac{d}{c}$. Ainsi, si $\phi(0) = 9$ et $\phi'(0) = 22$ et $\phi$ vérifie l'équation suivante, d'inconnue $y$ fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $3y'' - 18y' + 24y = 24$ alors on commence par prouver, en utilisant la proposition 12, que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est :

$$\left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \lambda \exp(4x) + \mu \exp(2x) \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

puis on voit que $x \mapsto 1$ est une solution particulière et enfin, on identifie les constantes $\lambda$ et $\mu$ pour prouver que : $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 3\exp(4x) + 5\exp(2x) + 1 \end{cases}.$

## 6.2 Équations différentielles du premier ordre : généralisation

### 6.2.1 Définition

**Définition 273**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $I \xrightarrow{a,b} \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I.

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme résolue une équation du type :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

  d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I.
- Intégrer (ou Résoudre) $(E)$, c'est trouver une fonction $I \xrightarrow{y} \mathbb{R}$ telle que $y$ est dérivable sur I et telle que, pour tout réel $x$ de I, on ait : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

Dans toute cette partie, on note :

- I un intervalle de réels.
- $a$ et $b$ deux fonctions continues sur I.
- $(E)$ l'équation différentielle suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E).$$

☛ **Remarque :**

1. De manière générale, une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type $c(x)y' + a(x)y = b(x)$ avec :
   - I un intervalle de réels.
   - $a$, $b$ et $c$ trois fonctions continues sur I.
   - $y$ l'inconnue qui est une fonction dérivable sur I.

   En se plaçant sur un intervalle sur lequel $c$ ne s'annule pas, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme résolue. Ce sont les seules équations du premier ordre qui nous intéresseront cette année.
2. On ne verra pas les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients non constant, elles ne sont pas au programme !

✌ **Exemple :**

L'équation $(x^2-1)y' - xy = \sin(x)$ d'inconnue $y$ fonction dérivable est une équation différentielle linéaire du premier ordre. En se plaçant sur $]-\infty, -1[$ , sur $]-1, 1[$ ou sur $]1, +\infty[$, on se ramène à l'étude de :

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = \frac{\sin(x)}{x^2-1}$$

qui est l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme résolue associée.

### 6.2.2 Résolution de l'équation homogène associée

**Définition 274**

On appelle équation homogène associée à $(E)$ l' équation différentielle $(H)$ d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I suivante :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H)$$

Dans toute cette partie, $(H)$ désignera l'équation suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H)$$

**Proposition 275**

On utilise les notations de la définition précédente. L'ensemble des solutions de $(H)$ est l'ensemble suivant :

$$\left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto Ce^{-A(x)} \end{cases}, C \in \mathbb{R} \right\} \text{ avec } A \text{ une primitive de } a$$

☛ **Remarque :**

Soit $a$ une constante réelle. En particulier, on retrouve que l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I est :

$$\left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto Ce^{-ax} \end{cases}, \text{ avec } C \text{ une constante réelle} \right\}$$

➤ ***Exercice :***

*Résoudre l'équation différentielle* $(1+x^2)y' + \dfrac{y}{\arctan(x)} = 0$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

Cette équadiff a du sens car arctan ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. D'autre part, la fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas non plus sur $]0, +\infty[$. Ainsi, on a :

$$(1+x^2)y' + \frac{y}{\arctan(x)} = 0 \iff y' + \frac{y}{(1+x^2)\arctan(x)} = 0 \ (H)$$

Tout le problème est maintenant de primitiver $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$.On reconnaît du $\dfrac{u'}{u}$, $x \mapsto \ln(|\arctan(x)|)$ est donc une primitive de cette fonction. Les solutions de $(H)$ qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sont les fonctions de la forme :

$$f : \begin{cases} ]0,+\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto C\exp\left(-\ln\left(\arctan(x)\right)\right) \end{cases}, C \text{ constante réelle.}$$

soit $f : \begin{cases} ]0,+\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{C}{\arctan(x)} \end{cases}$, $C$ constante réelle.

### 6.2.3 Solution générale de $(E)$

**Proposition 276**

- $(E)$ a des solutions. Soit $y_0$ une solution particulière de $(E)$.
- La solution générale de $(E)$ est la somme d'une solution particulière de $(E)$ et de la solution générale de $(H)$.
- Soit $A$ une primitive de $a$. L'ensemble des solutions de $(E)$ est donc l'ensemble suivant :

$$\left\{ f : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto y_0(x) + Ce^{-A(x)} \end{cases}, C \in \mathbb{R} \right\}$$

■ **Méthode:**

Pour résoudre $(E)$, on respectera donc les deux étapes suivantes :

1. On commence par résoudre $(H)$.
2. On cherche ensuite une solution particulière de $(E)$ (une seule suffit !).

Cette dernière étape peut être particulièrement délicate. Nous allons voir quelques principes facilitant cette recherche.

➤ ***Exercice :***

1. *Résoudre les trois équations différentielles suivantes :*

$$y' + \sin(x)y = 2\sin(x)\ (E_1),\ y' + xy = x^2 + 1\ (E_2) \text{ et } (1+x^2)y' - 2xy = x\ (E_3).$$

2. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$-xy' + (x-1)y = x^3 \quad (E)$$

*sur l'intervalle* $]-\infty, 0[$ *en sachant qu'il existe* $a, b, c$ *et* $d$ *quatre réels tels que la fonction :* $x \mapsto ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x}$ *soit solution de* $(E)$ *sur* $]-\infty, 0[$.

3. *Calculer la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ *et en déduire la résolution de l'équation différentielle* $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

.................................................................................................................

1. On va commencer par chercher une solution particulière. On n'a pas encore vu de méthode pour en trouver une mais ici, elles sont évidentes !
   (a) Pour $(E_1)$, on voit facilement que $x \mapsto 2$ est une solution particulière de $(E_1)$. Il suffit de dériver pour s'en assurer !
   (b) Pour $(E_2)$, $x \mapsto x$ est une solution particulière de $(E_2)$. Il suffit de dériver pour s'en assurer !
   (c) Pour $(E_3)$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une solution particulière de $(E_3)$. Il suffit de dériver pour s'en assurer !

   Pour conclure, il suffit maintenant de résoudre leur équation homogène associée (cf partie précédente) puis d'ajouter une solution particulière à la solution générale. On vous donne les réponses : La solution générale de $(E_1)$ est :
$$x \mapsto 2 + C\exp(\cos(x)) \quad (C \text{ constante réelle})$$
   La solution générale de $(E_2)$ est :
$$x \mapsto x + C\exp\left(-d\frac{x^2}{2}\right) \quad (C \text{ constante réelle})$$
   La solution générale de $(E_3)$ est :
$$x \mapsto \frac{x^2}{2} + C(1+x^2) \quad (C \text{ constante réelle})$$
2. Déjà, sur $]-\infty, 0[$, $x \mapsto -x$ ne s'annule pas d'où l'équivalence :
$$-xy' + (x-1)y = x^3 \iff y' + \frac{1-x}{x}y = -x^2$$
   En primitivant $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$, on obtient que $x \mapsto C\dfrac{\exp(x)}{x}$ avec $C$ une constante réelle est la solution générale de $(H)$, l'équation différentielle homogène associée à $(E)$. On dérive $\phi : x \mapsto ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x}$ pour obtenir la solution particulière, c'est assez calculatoire ! Pour tout réel $x$, on a :
$$\begin{aligned} -x\phi'(x) + (x-1)\phi(x) &= -x\left(2ax + b - \frac{d}{x^2}\right) + (x-1)\left(ax^2+bx+c+\frac{d}{x}\right) \\ &= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-2b)x + (d-c) \end{aligned}$$
   Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient alors :
$$\begin{aligned} \phi \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -x\phi'(x) + (x-1)\phi(x) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-2b)x + (d-c) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ -3a+b & = 0 \\ c-2b & = 0 \\ d-c & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = 1,\ b = 3,\ c = 6 \text{ et } d = 6 \end{aligned}$$

La fonction suivante est donc une solution particulière de $(E)$ :

$$x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$$

On en déduit que la solution générale de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ est :

$$x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + C\frac{\exp(x)}{x} \quad (C \text{ constante réelle})$$

3. • Zut alors, c'est une équation du second ordre ! Pas de panique : On prend $y$ une fonction deux fois dérivable et on pose $z = y'$. Si $y$ est une solution, on a alors

$$(1+x^2)z' + 2xz - 2 = 0.$$

• La voilà notre équation du premier ordre ! Bon, le $1 + x^2$ ne nous fait même pas peur puisque $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a :

$$(1+x^2)z' + 2xz - 2 = 0 \Longleftrightarrow z' + \frac{2x}{1+x^2}z - \frac{2}{1+x^2} = 0 \quad (E)$$

$(E)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre $1$, son équation homogène associée est

$$z' + \frac{2x}{1+x^2}z = 0 \quad (H)$$

Résolvons $(H)$. $x \mapsto \ln(|1+x^2|)$ étant une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$, les solutions de $(H)$ sont les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto C\exp\left(-\ln\left(|1+x^2|\right)\right) \quad , C \text{ constante réelle}$$

soit $f : x \mapsto \dfrac{C}{1+x^2}$, $C$ décrivant $\mathbb{R}$.

• Il faut maintenant qu'on trouve une solution particulière de $(E)$. On nous a demandé de dériver une fonction : Ce doit probablement être une solution particulière de $(E)$. Et oui, ça marche ! Bref, les solutions de $(E)$ sont les fonctions de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{C+2x}{1+x^2} \quad , C \text{ constante réelle.}$$

Ainsi, si $y$ est solution de l'équadiff $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ alors il existe $C$ une constante réelle telle que :

$$y' : x \mapsto \frac{C+2x}{1+x^2}$$

soit, en intégrant, il existe $C$ et $D$ deux constantes réelles telles que :

$$y : x \mapsto C\arctan(x) + \ln(1+x^2) + D.$$

### 6.2.4 Recherche d'une solution particulière

**Méthode de variation de la constante**

**Proposition 277**

On trouvera une solution particulière de $(E)$ en la cherchant sous la forme suivante :

$$x \mapsto \lambda(x) \times \exp(-A(x))$$

où $A$ est une primitive de $a$ et $\lambda$ une fonction dérivable sur I. C'est la méthode de variation de la constante.

■ **Méthode:**

Cette méthode, au nom plus que curieux, consiste donc à chercher une solution sous la forme :

$$y : x \mapsto \lambda(x) \times \phi(x)$$

avec $\lambda$ une fonction dérivable sur I et $\phi$ une solution quelconque de $(H)$. La méthode garantit qu'on va pouvoir trouver une solution sous cette forme là.
Il suffit d'écrire que $y$ vérifie l'équation $(E)$ (on injecte donc ce $y$ dans notre équation) pour obtenir une équation ne faisant intervenir que la dérivée de $\lambda$ (il ne doit plus y avoir de $\lambda$). On intègre et le tour est joué ! Cette méthode est un peu calculatoire mais marche bien. La phase délicate est celle où on intègre !
Attention, à force de ne vous intéresser qu'à $\lambda$, vous avez tendance à écrire à la fin que c'est $\lambda$ la solution particulière qu'on vient de trouver. Et non, c'est $x \mapsto \lambda(x) \times \phi(x)$.

➤ ***Exercice :***

*Résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(que l'on notera* I*) :*

$$y' - \tan(x)y = -\cos^2(x)(E).$$

En primitivant $x \mapsto -\tan(x)$, on obtient que $x \mapsto C\exp(-\ln(\cos(x)))$ i.e. la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{\cos(x)}$, avec $C$ une constante réelle, est la solution générale de $(H)$, l'équation différentielle homogène associée à $(E)$, sur I.
Pour la solution particulière, on pose $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)}$ avec $\lambda$ une fonction dérivable sur I. On a :

$$\begin{aligned} y \text{ vérifie } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ y'(x) - \tan(x)y(x) = -\cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ \frac{\lambda'(x)}{\cos(x)} + \lambda(x)\left(\phi'(x) - \tan(x)\phi(x)\right) = -\cos^2(x) \end{aligned}$$

en notant $\phi : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ qui vérifie donc (H) d'où :

$$\begin{aligned} y \text{ est une solution de } (E) &\iff \forall x \in I,\ \frac{\lambda'(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = -\cos^3(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \end{aligned}$$

Pour cette dernière linéarisation, allez voir le chapitre de trigonométrie ! On introduit alors la fonction suivante :

$$\lambda : x \mapsto \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

$\lambda$ est bien une fonction dérivable sur I et on a : $\lambda' : x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{4} + \dfrac{3\cos(x)}{4}$. D'après les équivalences précédentes, on peut affirmer qu'une solution particulière de (E) est :

$$y : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12\cos(x)} + \frac{3\tan(x)}{4}.$$

On en déduit que la solution générale de (E) sur I est :

$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12\cos(x)} + \frac{3}{4}\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \quad (C \text{ constante réelle}).$$

**Principe de superposition des solutions**

**Proposition 278**

- Soit (E) l'équation différentielle suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :
$$y' + a(x)y = b_1 + b_2(x) + \cdots + b_n(x) \quad (E)$$
avec $n$ un entier naturel non nul et $I \xrightarrow{b_1,\ldots,b_n} \mathbb{R}$ $n$ fonctions continues sur I.
- Une solution particulière de (E) est :
$$x \mapsto y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$$
avec, pour tout $k$ appartenant à $[\![1, n]\!]$, $y_k$ une solution particulière supposée connue de $(E_k)$ l'équation différentielle suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :
$$y' + a(x)y = b_k(x) \ (E_k)$$

➤ ***Exercice* :**

*Résoudre sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *l' équation différentielle suivante :*

$$y' + \tan(x)y = \sin(2x) + \frac{1}{\cos(x)} \quad (E)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$x \mapsto -2\cos^2(x)$ est une solution particulière de :

$$y' + \tan(x)y = \sin(2x) \quad (E_1).$$

Dérivez pour vous en rendre compte. On trouve aussi que sin est une solution particulière de :

$$y' + \tan(x)y = \frac{1}{\cos(x)} \quad (E_2)$$

Par le principe de superposition des solutions, $x \mapsto \sin(x) - 2\cos^2(x)$ est une solution particulière de $(E)$. On sait aussi que $x \mapsto C\cos(x)$ avec $C$ une constante réelle est la solution générale de $(H)$, l'équation différentielle homogène associée à $(E)$. On en déduit que la solution générale de $(E)$ est :

$$x \mapsto \sin(x) - 2\cos^2(x) + C\cos(x) \quad (C \text{ constante réelle}).$$

### 6.2.5 Recollement

Dans ce paragraphe, on note :

- I un intervalle de réels.
- $a$, $b$ et $c$ trois fonctions continues sur I.
- $(F)$ l'équation différentielle suivante d'inconnue $y$ fonction dérivable sur I :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (F).$$

#### Solution sur un petit intervalle

■ **Méthode:**

Pour résoudre $(F)$, on cherche d'abord les points d'annulation de $a$. On trouve une liste qu'on ordonne $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Sur un intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$ (pour $i$ dans $[\![1, n-1]\!]$) ou sur $]-\infty, x_1[$ ou sur $]x_n, +\infty[$, l'équation $(F)$ équivaut à l'équation :

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

et ça, on sait faire !

➤ ***Exercice* :**

*Résoudre l'équation différentielle* $|x|y' + (x-1)y = x^3 (E)$ *sur des intervalles appropriés.*

On pose $I_1 = \mathbb{R}_-^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^\star$. Sur $I_1$, on a déjà résolu cette équation (cf paragraphe " Solution générale de $(E)$"). On avait trouvé que la solution générale de $(E)$ sur $I_1$ est :

$$x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + C\frac{\exp(x)}{x} \quad (C \text{ constante réelle})$$

Sur $I_2$, la démarche est similaire. On trouve que la solution générale de $(E)$ sur $I_2$ est :

$$x \mapsto x^2 - x + Dx\exp(-x) \quad (D \text{ constante réelle})$$

Attention, n'appelez pas de la même manière ces deux constantes, il n'y a aucune raison que $C$ et $D$ soient égales !

**Solution sur** $I$

Là, ça devient difficile voici la méthode :

■ **Méthode:**

Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les points d'annulation de $a$, on appelle, pour tout $i$ de $[\![1, n-1]\!]$, $I_i$ l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $I_0$ l'intervalle $]-\infty, x_1[$ et $I_n$ $]x_n, +\infty[$. On va faire ça en 3 étapes :

1. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, résoudre $(F)$ sur $I_i$ équivaut à résoudre :

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

   On trouve une solution du type :

$$y_i : \begin{cases} I_i & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto C_i v_i(x) + w_i(x) \end{cases}, \quad \text{avec } C_i \text{ une constante réelle.}$$

   où $v_i$ et $w_i$ sont des fonctions à expliciter.

2. Les solutions que l'on a pour l'instant de $(F)$ sont de la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} C_1v_1(x) + w_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ C_2v_2(x) + w_2(x) & \text{si } x \in I_2 \\ \cdots & \\ C_nv_n(x) + w_n(x) & \text{si } x \in I_n \end{cases}, \quad \text{avec } C_1, C_2, \cdots, C_n \text{ réels fixés.}$$

   Il reste à recoller les morceaux, i.e. regarder ce qui se passe aux différents points $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Pour tout réel $x$, on veut :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

   ce qui donne en particulier en l'un des $x_i$ :

$$b(x_i)y(x_i) = c(x_i)$$

   puisque $a(x_i) = 0$ d'où la valeur de $y(x_i)$ (si $b(x_i)$ est non nul).

3. Maintenant qu'on a les fonctions $y$ candidates (et on en a un paquet puisque les constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sont pour l'instant quelconques), on va les tester : Il faut s'assurer qu'elles sont bien continues et dérivables (ce qui pose problème en les $x_i$). Si besoin est, on ajuste les constantes $C_i$ pour que $y$ soit continue et dérivable.

Une fois qu'on a fait tout ce boulot, on fait une réciproque en précisant que les fonctions candidates à la fin vérifient bien $(F)$.

☞ **Mise en garde :**

On ne sait pas du tout a priori si on aura ou non des solutions. On peut très bien ne pas en avoir ou en avoir $1$, $2$, une infinité ! On peut à la fin avoir les constantes $C_i$ complétement déterminées ($C_1 = 0$, $C_2 = 3$...), des conditions du type $C_2 = 3C_4 + 2$ ou alors des constantes qui demeurent quelconques. Bref, c'est au cas par cas ! Ne vous aventurez pas seul dans ce genre de problème, ils ne sont pas au programme. Si la question n'est pas explicitement posée, ne vous intéressez pas au problème de recollement. Juste, vous divisez et vous résolvez votre équation sur l'un des intervalles sur lequel $a$ a la gentillesse de ne pas s'annuler. Regardez tout de même l'exercice qu'on a développé dans ce paragraphe car les problèmes de recollement tombent de temps en temps à l'oral : il vaut mieux en avoir vu un, ça aide !

## ➤ *Exercice* :

*Résoudre l'équation différentielle* $|x|y' + (x-1)y = x^3 (E)$ *sur* $\mathbb{R}$.

.........................................................................................................

- Si $y$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ alors on a en particulier en $0$ :
$$|0|y'(0) + (0-1)y(0) = 0^3$$
d'où $y(0) = 0$. D'autre part, la restriction de $y$ sur $\mathbb{R}_-^\star$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^\star$ et celle sur $\mathbb{R}_+^\star$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On peut donc affirmer, d'après l'exercice précédent, qu'il existe deux constantes $C_1$ et $C_2$ réelles telles que :
$$y : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6 + C_1 \exp(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - x + C_2 x \exp(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
- On vérifie d'abord la continuité de $y$ en $0$. A droite, ça ne pose pas de problème. Pour toutes les constantes $C_2$, on a :
$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} (y(x)) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(x^2 - x + C_2 x \exp(-x)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
En utilisant le taux d'accroissement $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{\exp(x) - 1}{x}\right) = 1$, on obtient que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (y(x)) = 0$ uniquement si $C_1$ vaut $-6$ (sinon, la limite à gauche n'est pas finie). On suppose donc que $C_1$ vaut $-6$.
- On passe à la dérivabilité de $y$ en $0$. A droite, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0}\right)$ vaut $C_2 - 1$. A gauche, avec un petit d.l. de l'exponentielle, on trouve $0$. Pour que $y$ soit dérivable en $0$, il faut donc que ces deux quantités soient égales i.e $C_2 = 1$.
- Bref, la seule fonction qu'on ait à tester est :
$$y : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6(1 - \exp(x))}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - x + x \exp(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

> Elle marche bien car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a bien, pour tout réel $x$, $|x|y'(x) + (x - 1)y(x)$ vaut $x^3$.

## 6.3 Introduction à la dynamique des populations

Dans tout ce chapitre, $N$ sera une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ telle que, pour tout réel positif $t$, $N(t)$ soit le nombre d'individus d'une certaine population à l'instant $t$.

### 6.3.1 Modèle de Malthus

**Définition 279**

Dans le modèle de Malthus, pour tout réel positif $t$, on a :

$$N'(t) = rN(t)$$

où $r$ est un réel strictement positif appelé taux de croissance per capita.

**Proposition 280**

Dans le modèle de Malthus, on a alors :

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto N(0)\exp(rt) \end{cases}$$

### 6.3.2 Modèle avec facteur limitant

**Définition 281**

Dans le modèle de Verhulst, pour tout réel positif $t$, on a :

$$N'(t) = r \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

où $r$ est un réel strictement positif appelé taux de croissance per capita et $K$ désigne la capacité d'accueil du milieu.

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. Cette équation différentielle n'est pas linéaire. Pour la résoudre on introduit la fonction $\frac{1}{N}$, on l'appelle $y$. On suppose que $N(0)$ est strictement compris entre 0 et K. Pour tout réel positif t, on a alors :

$$y'(t) = r \times \left(-y + \frac{1}{K}\right)$$

Cette dernière équation est linéaire, elle permet de démontrer la proposition qui suit.

**Proposition 282**

Dans le modèle de Verhulst, on a alors :

$$N : t \mapsto \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) \times \exp(-rt)}$$

La courbe représentative de N est appelée courbe logistique.

☛ **Remarque :**

1. Les réactions autocatalytiques sont modélisées par le modèle de Verhulst. C'est le cas par exemple quand on mélange le $MnO_4^-$ avec du $C_2H_2O_4$ autocaytalsée avec $Mn^{2+}$.
2. Pour tout réel positif t, on a dans ce modèle : $N'(t) = r \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$. Cela vient de l'idée suivante : en appelant $\mathrm{Nat}(N)$ le taux de natalité pour une valeur N de la population et $\mathrm{Mort}(N)$ le taux de mortalité pour une valeur N de la population, pour tout réel positif t, on a :
$$N'(t) = (\mathrm{Nat}(N) - \mathrm{Mort}(N))\, N(t)$$
On effectue l'hypothèse suivante : $\mathrm{Nat}(N)$ et $\mathrm{Mort}(N)$ sont des fonctions affines, cela entraîne l'existence de deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout réel positif t, on ait :
$$N'(t) = (a + bN(t))\, N(t)$$
Il suffit après de poser $r = a$ et $K = -\frac{a}{b}$ pour retrouver l'équation donnée.
3. Si $N(0) < K$, la population croît. Elle décroît si $N(0) > K$. Si $N(0) = K$, la population reste stable.

**Définition 283**

Dans le modèle de Gompertz, pour tout réel positif t, on a :

$$N'(t) = r \times \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \times N(t)$$

où r est un réel strictement positif appelé taux de croissance per capita et K désigne la capacité de charge du milieu.

**Proposition 284**

On suppose que $N(0)$ est strictement compris entre $0$ et $K$. Pour tout réel positif $t$, de $\dfrac{\dfrac{N'(t)}{N(t)}}{\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right)} = r$, on déduit :

$$N : t \mapsto K\exp\left(-\ln\left(\frac{K}{N(0)}\right)\exp(-rt)\right)$$

☛ **Remarque :**

Pour créer sa théorie, Gompertz (1825) est parti de l'idée que le taux de mortalité $\mu$ augmente de façon exponentielle avec l'âge :

$$\mu : x \mapsto A + Bc^x$$

où $A$ et $B$ sont des constantes, la partie $Bc^x$ représente l'augmentation de la mortalité avec l'âge et la partie $A$ représente le risque de mourir pour des causes indépendantes de l'âge.

## 6.4 Méthode d'Euler

☛ **Remarque :**

- En théorie, on sait résoudre les équations différentielles linéaire du première ordre. Néanmoins, cette résolution fait souvent appel à deux reprises (solution générale, puis variation de la constante) à un calcul de primitive et il y a des fonctions, comme $t \mapsto \exp(-t^2)$, qu'on ne sait pas primitiver. En outre, si l'équation différentielle proposée n'est pas linéaire, il n'y a pas de méthode générale de résolution théorique.
- Tout cela nous amène à réfléchir à une méthode de résolution approchée, les deux grandes méthodes classiques sont les suivantes :
  1. La méthode analytique : L'approximation de la solution prend généralement la forme d'une série tronquée (la notion de série sera vue lors du chapitre " compléments d'analyse"). Cette méthode repose sur le développement en série entière, outil qui n'est pas au programme des bcpst.
  2. La méthode de discrétisation : Elle consiste à approcher la solution en un nombre fini de points d'un intervalle fixé.

Nous allons voir la méthode d'Euler qui est une des méthodes de discrétisation les plus simples.

### 6.4.1 Présentation

On cherche à calculer une approximation de la solution $u$ du système différentielle suivant :

$$\forall t \in [0, T], y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(0) = a$$

d'inconnue $y$ fonction dérivable sur $[0, T]$ avec $T$ un réel strictement positif, $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ et $a$ un réel fixé. Soit $N$ un entier naturel non nul. La méthode d'Euler consiste à poser $z_0 = a$ et, pour tout entier $k$ de $[\![0, N-1]\!]$, on pose :

$$z_{k+1} = z_k + f(t_k, z_k) \times \frac{T}{N}.$$

avec, pour tout entier $k$, $t_k = k \times \frac{T}{N}$. Pour tout $k$ de $[\![0, N-1]\!]$, $z_k$ est une bonne approximation de $y(t_k)$, $z$ sera alors une bonne approximation de $u$ si $N$ est suffisamment important (attention, si $N$ est trop grand alors le temps de calcul peut être trop élevé).

☛ **Remarque :**
Cette méthode se comprend très bien, elle repose sur le développement limité d'ordre 1 de $u$ :

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}) &= u\left(t_k + \frac{T}{N}\right) + \underset{N \to +\infty}{o}\left(\frac{T}{N}\right) \\ &= u(t_k) + \frac{T}{N} \times u'(t_k) + \underset{N \to +\infty}{o}\left(\frac{T}{N}\right) \\ &= u(t_k) + \frac{T}{N} \times f(t_k, u(t_k)) + \underset{N \to +\infty}{o}\left(\frac{T}{N}\right) \end{aligned}$$

On a donc Cela donne donc $u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + \frac{T}{N} \times f(t_k, u(t_k))$ ce qui explique pourquoi on pose $z_{k+1} = z_k + f(t_k, z_k) \times \frac{T}{N}$.

**Proposition 285**

On utilise les notations précédentes.

- la méthode d'Euler est stable : en perturbant un peu le schéma (erreurs d'arrondis, incertitude expérimentale), la perturbation résultante est contrôlée linéairement par la perturbation initiale.
- la méthode d'Euler est consistante. Cela signifie que $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{N-1}\left(|z_k-u\left(t_k\right)|\right)\right)=0.$

### 6.4.2 Un premier exemple

On va appliquer la méthode d'Euler pour trouver une approximation de la solution $u$ du système différentielle suivant :

$$\forall t\in[0,T], y'(t)=g\left(t\right)\quad\text{et}\quad y(0)=a$$

d'inconnue $y$ fonction dérivable sur $[0,T]$ avec $T$ un réel strictement positif, $g$ est une fonction continue sur $[0,T]$ et $a$ un réel fixé. Si on pose $f:(x,y)\mapsto g(x)$ alors on cherche trouver une approximation de la solution $u$ du système différentielle suivant :

$$\forall t\in[0,T], y'(t)=f\left(t,y(t)\right)\quad\text{et}\quad y(0)=a$$

Pour appliquer la méthode d'Euler, on va donc poser $z_0=a$ et, pour tout entier $k$ de $[\![0,N-1]\!]$, on pose :

$$z_{k+1}=z_k+g(t_k)\times\frac{T}{N}.$$

avec, pour tout entier $k$, $t_k=k\times\dfrac{T}{N}$.

☛ **Remarque :**

Pour tout $k$ de $[\![1,N-1]\!]$, on a donc :

$$z_k=a+\frac{T}{N}\times\sum_{i=0}^{k-1}g\left(\frac{iT}{N}\right).$$

On reconnaît la notion de somme de Riemann à gauche. On sait, puisque $g$ est une fonction continue sur $[0,T]$, que $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(z_N\right)=a+\displaystyle\int_0^T g(t)dt$. On remarque qu'on sait résoudre le problème posé et que la solution $u$ du système différentielle proposé est $\begin{cases}[0;T] & \longrightarrow\mathbb{R}\\ t & \mapsto a+\displaystyle\int_0^t g(x)dx\end{cases}$.

### 6.4.3 Deuxième exemple

On va appliquer la méthode d'Euler pour trouver une approximation de la solution $u$ du système différentielle suivant :

$$\forall t\in[0,T], y'(t)=c\times y\left(t\right)\quad\text{et}\quad y(0)=a$$

d'inconnue $y$ fonction dérivable sur $[0, T]$ avec $T$ un réel strictement positif, $g$ est une fonction continue sur $[0, T]$ et $a$ et $c$ deux réels fixés. Si on pose $f : (x, y) \mapsto cy$ alors on cherche trouver une approximation de la solution $u$ du système différentielle suivant :

$$\forall t \in [0, T], y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(0) = a$$

Pour appliquer la méthode d'Euler, on va donc poser $z_0 = a$ et, pour tout entier $k$ de $[\![0, N-1]\!]$, on pose :

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + cz_k \times \frac{T}{N} \\ &= z_k \times \left(1 + c \times \frac{T}{N}\right). \end{aligned}$$

☛ **Remarque :**
Pour tout $k$ de $[\![1, N-1]\!]$, on a donc :

$$z_k = \left(1 + c \times \frac{T}{N}\right)^k.$$

On sait que $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(1 + c \times \frac{T}{N}\right)^N = \exp(cT)$. On remarque qu'on sait résoudre le problème posé et que la solution $u$ du système différentielle proposé est $\begin{cases} [0; T] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \exp(ct) \end{cases}$.

# Partie 8

# Fonctions de deux variables réelles

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{D}$ sera une partie de $\mathbb{R}^2$.

## 8.1 Généralités

### 8.1.1 Définitions

**Définition 319**

Une fonction $f$ de 2 variables réelles à valeurs réelles est définie par la donnée d'une partie $D_f$ de $\mathbb{R}^2$, appelée ensemble de définition de $f$, et par l'application $f : D_f \to \mathbb{R}$. On note alors :

$$f : \begin{cases} D_f & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}.$$

☛ **Remarque :**

On utilise les notations de la précédente définition. On développe les mêmes concepts que pour les fonctions d'une seule variable (image, antécédent, restriction, prolongement) :

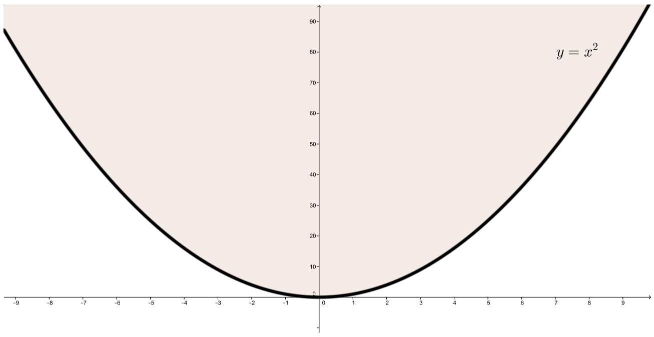
- Soit $(x, y) \in D_f$. On pose $b = f(x, y)$. On dit que $b$ est l'image de $(x, y)$ par $f$ et que $(x, y)$ est un antécédent de $b$ par $f$.
- Soit $A \subset D_f$. On appelle restriction de $f$ à l'ensemble $A$ la fonction notée $f_{|A}$ suivante :

$$f_{|A} : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$$

- $g$ est un prolongement de $f$ sur la partie $B$ de $\mathbb{R}^2$ si $D_f \subset B$ et pour tout $(x, y)$ dans $D_f$, $g(x, y)$ et $f(x, y)$ sont égaux.
- L'image de $f$ est l'ensemble $\{f(x, y) \text{ avec } (x, y) \in D_f\}$. On le note $f(D_f)$.

✌ **Exemple :**

- $g : (x, y) \mapsto \ln\left(y - x^2\right)$ est une fonction de 2 variables. Son ensemble de définition est $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y > x^2\right\}$. Pour le visualiser, on trace la parabole $y = x^2$, les points qui nous intéressent sont ceux qui sont strictement au-dessus (car $y$ est supérieur à...) de cette courbe. Voici une illustration de son ensemble de définition :




- $f : (x, y) \mapsto \arctan\left(x^2 + y + 1\right)$ est une fonction de 2 variables. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^2$ ; $f(2, 5)$ et $f(-2, 5)$ valent $\arctan(10)$ donc l'image de $(2, 5)$ par $f$ est $\arctan(10)$, $\arctan(10)$ a au moins deux antécédents par $f$ : $(2, 5)$ et $(-2, 5)$. La restriction de $f$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ est l'application suivante : $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \arctan\left(x^2 + y + 1\right) \end{cases}$. On peut prolonger $g$ à $\mathbb{R}^2$ par la fonction $h$ suivante :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \arctan\left(x^2 + y + 1\right) & \text{si } y \geqslant -10 \\ \exp\left(x^2 + y\right) & \text{si } y < -10 \end{cases} \end{cases}$$

On note que la restriction est unique une fois la fonction et l'ensemble de restriction précisés. Par contre, on a toujours une infinité de prolongements.

☛ **Remarque :**

On peut étendre sans difficulté ces notions aux fonctions de $n$ (avec $n$ entier supérieur à 2 ) variables. Quelques exemples :

- $f : (x, y, z) \mapsto xy + \exp\left(-xz + y + z^2\right)$ est une fonction de 3 variables définie sur $\mathbb{R}^3$. Par exemple, on a $f(1, 1, 1) = 1 + e$ et $f(0, 1, 0) = e$.
- $g : (x, y, z, t, u) \mapsto \dfrac{\left(-ztu - x^2 - y^2 + 1\right)}{z^2 + y^2 + 1}$ est une fonction de 5 variables définie sur $\mathbb{R}^5$.

■ **Méthode:**

Pour expliciter le domaine de définition d'une fonction de deux variables, on regarde ce qui pose problème : c'est par exemple une racine, un logarithme, un dénominateur. On rassemble tous ces problèmes dans un système décrivant les contraintes que doivent vérifier toutes les variables et on raisonne par équivalence pour trouver un ensemble sur lequel évolue le couple de variables.

➤ ***Exercice* :**

*Trouvez les ensembles de définition des fonctions suivantes :*

$$g : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{x^2-4}{y^2-1}} \quad \text{et} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{y^2-1}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

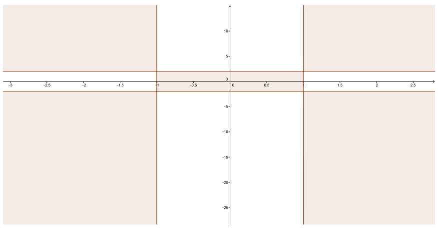
Soit $(x, y)$ un couple de réels. On a :

$$\begin{aligned} g\,(x,y) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2-4)(y^2-1) \geqslant 0 \;\text{ et }\; y^2-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-4 & \geqslant & 0 \\ y^2-1 & > & 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2-4 & \leqslant & 0 \\ y^2-1 & < & 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 2 & \text{ou} & x \leqslant -2 \\ y > 1 & \text{ou} & y < -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2 \leqslant & x & \leqslant 2 \\ -1 < & y & < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

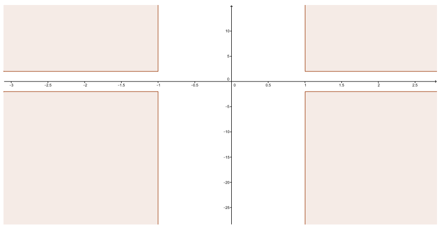
Le domaine de définition de $g$ est donc $A \cup B$ avec $A$ l'ensemble $[-2, 2]\times]-1, 1[$ et $B$ l'ensemble $(\,]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \times (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$. On note qu'on a un domaine plus vaste que l'ensemble de définition de $h$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} h\,(x,y) \text{ est définie} \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2-4) \geqslant 0 \;\text{ et }\; y^2-1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 2 & \text{ou} & x \leqslant -2 \\ y > 1 & \text{ou} & y < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cela nous fait donc simplement $B$ comme ensemble de définition. On vous laisse observer la différence entre $g$ et $h$ : Voici une illustration de leurs ensembles de définition :



Ensemble de définition de $g$



Ensemble de définition de $h$

### 8.1.2 Interprétation graphique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ jusqu'à la fin de ce chapitre. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. $f$ fait correspondre à tout point $(x, y)$ de $\mathcal{D}$ un unique nombre réel $f(x, y)$. On peut donc représenter graphiquement $f$ dans l'espace par la surface constituée de l'ensemble des points $(x, y, z)$ avec $(x, y) \in \mathcal{D}$ et $z = f(x, y)$. Ne pas hésiter à faire le parallèle avec les fonctions d'une seule variable : quand on a une fonction $h$ d'une seule variable, on représente notre fonction par une courbe constituée de l'ensemble des points $(x, y)$ avec $x$ parcourant l'ensemble de définition de $h$ et $y = h(x)$.

**Définition 320**

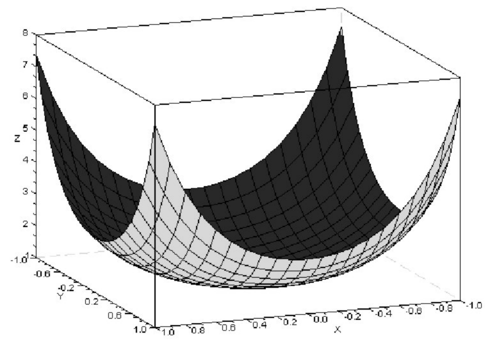
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle surface représentative de $f$ dans l'espace muni du repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'ensemble, noté $\mathcal{S}_f$ suivant :

$$\mathcal{S}_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y) \right\}.$$

On dit que $\mathcal{S}_f$ est la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.

✎) **Illustration :**

Voici la surface représentative de $(x, y) \mapsto \exp\left(x^2 + y^2\right)$ :




**Définition 321**

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\lambda$ un réel. On appelle courbe de niveau $\lambda$ de $f$ l'ensemble suivant :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } f(x, y) = \lambda \right\}.$$

☛ **Remarque :**

La courbe de niveau $\lambda$ de $f$ (en utilisant les notations précédentes) est donc la projection sur le plan $z = 0$ de l'intersection de $\mathcal{S}_f$ et du plan d'équation $z = \lambda$. Il est donc classique de commencer par étudier les différentes courbes de niveau afin de tracer avec précision la surface représentative de $f$ (il suffit d'empiler les assiettes après).

## 8.2 Applications partielles

### 8.2.1 Définition

En fixant toutes les variables sauf une, on obtient des fonctions numériques d'une seule variable que l'on a appris à étudier. C'est pour cela qu'on va introduire la notion d'applications partielles.

**Définition 322**

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(a, b) \in \mathcal{D}$. On appelle applications partielles de $f$ en $(a, b)$ les deux fonctions suivantes :

1. $f_x \; : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, b) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x, b) \end{cases}$. On note parfois $f(., b)$ cette application.
2. $f_y \; : \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a, y) \in \mathcal{D}\} & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(a, y) \end{cases}$. On note parfois $f(a, .)$ cette application.

✌ **Exemple :**

Soit $g : (x, y) \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{y}$.

Les applications partielles de $g$ en $(1, 2)$ sont les deux fonctions suivantes :

1. $g_x : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+3\right)}{2} \end{cases}$
2. $g_y : \begin{cases} \mathbb{R}^\star & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \dfrac{\ln\left(y^2\right)}{y} \end{cases}$

Les applications partielles de $g$ en $(4, -2)$ sont les deux fonctions suivantes :

1. $g_x : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+3\right)}{2} \end{cases}$
2. $g_y : \begin{cases} \mathbb{R}^\star & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \dfrac{\ln\left(y^2+15\right)}{y} \end{cases}$

☛ **Remarque :**

On peut étendre sans difficulté ces notions aux fonctions de $n$ (avec $n$ entier supérieur à $2$ ) variables... Si on prend par exemple $g : \mathcal{D}_3 \to \mathbb{R}$ une fonction avec $\mathcal{D}_3$ une partie de $\mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in \mathcal{D}_3$. On appelle applications partielles de $g$ en $(a, b, c)$ les trois fonctions suivantes :

1. $g_x : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } (x, b, c) \in \mathcal{D}_3\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(x, b, c) \end{cases}$. On note parfois $g(., b, c)$ cette application.
2. $g_y : \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a, y, c) \in \mathcal{D}_3\} & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto g(a, y, c) \end{cases}$. On note parfois $g(a, ., c)$ cette application.

3. $g_z : \begin{cases} \{z \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a,b,z) \in \mathcal{D}_3\} & \to \mathbb{R} \\ z & \mapsto g(a,b,z) \end{cases}$. On note parfois $g(a,b,.)$ cette application.

### 8.2.2 Interprétation graphique

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction, $\mathcal{S}_f$ la surface représentative de $f$ et $(a,b) \in \mathcal{D}$.

- La courbe représentative de $f(.,b)$ a pour équation $z = f(x,b)$ avec $x$ réel tel que $(x,b) \in \mathcal{D}$. C'est donc l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan vertical d'équation $y = b$. Pour représenter cette courbe, il suffit d'étudier une fonction d'une seule variable (on sait donc bien le faire), la fonction $x \mapsto f(x,b)$.
- La courbe représentative de $f(a,.)$ a pour équation $z = f(a,y)$ avec $y$ réel tel que $(a,y) \in \mathcal{D}$. C'est donc l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan vertical d'équation $x = a$. Pour représenter cette courbe, il suffit d'étudier une fonction d'une seule variable (on sait donc bien le faire), la fonction $y \mapsto f(a,y)$.

Une technique classique pour tracer une surface représentative d'une fonction numérique de deux variables est donc de tracer différentes courbes représentatives de ses applications partielles obtenant ainsi un quadrillage de sa surface.

■ **Méthode:**

Deux idées pour vous aider à tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables :

1. On peut fixer une variable afin de tracer une courbe d'une fonction d'une seule variable. On fixe $b$ et on trace le graphe de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x,b)$. On obtient alors l'intersection de la surface représentative de $f$ et du plan $y = b$. Puis on fait bouger $b$, on a ainsi une représentation par tranches verticales. On peut faire de même en fixant $a$ et en s'intéressant à $y \mapsto f(a,y)$.
2. On peut aussi fixer $\lambda$ et on trace la surface $f(x,y) = \lambda$, $(x,y)$ balayant l'ensemble de définition de $f$, c'est la courbe de niveau $\lambda$ de $f$. On cherche donc l'intersection de la surface représentative de $f$ et du plan $z = \lambda$. Puis, en faisant bouger $\lambda$, on obtient une représentation par tranches horizontales de notre surface. Rapprochez cette notion de celle de carte topographique ou de celles de cartes d'état-major.

Dans un cas comme dans l'autre, vous pouvez vous rendre compte qu'on cherche des intersections de notre surface avec des plans du type $x = \text{cte}$ ou $y = \text{cte}$ ou $z = \text{cte}$.

## ➤ *Exercice* :

*Tracer la surface représentative des fonctions suivantes :*

$$f : (x,y) \mapsto y + x^2 + 4 \text{ et } g : (x,y) \mapsto \exp(x^2 + y^2).$$

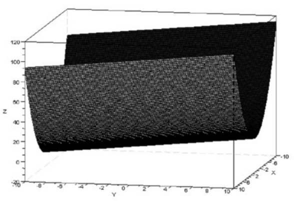
............................................................................................

1. Commençons par $f$ : En fixant $x$ à $a$, on obtient une droite $z = y + a^2 + 4$ de pente $1$ et d'ordonnée à l'origine $a^2+1$. L'intersection de la surface recherchée et du plan $x = a$ est donc une droite. L'intersection avec le plan $y = b$ donne une parabole d'équation $z = x^2 + 4 + b$. Avec ces infos, en faisant évoluer $a$ et $b$, on trace notre surface qui est en gros un half pipe infini.

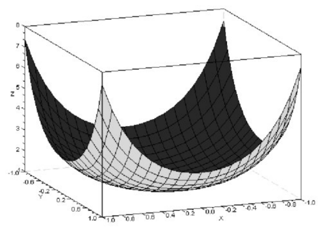
2. Pour $g$ maintenant. Soit $\lambda$ un réel supérieur à $1$ et soient $x$ et $y$ deux réels, on a :

$$g(x,y) = \lambda \iff x^2 + y^2 = \ln(\lambda)$$

L'intersection avec le plan $z = \lambda$ donne donc un cercle de rayon $\sqrt{\ln(\lambda)}$ et de centre $(0,0,\lambda)$. On trace pour les hauteurs positives des cercles dont les centres sont tous sur l'axe des $z$ et dont les rayons croissent logarithmiquement, c'est un panier infini en gros.



Surface de $f$



Surface de $g$

## 8.3 Calcul différentiel

Les applications partielles sont des fonctions numériques d'une seule variable, une technique classique pour les étudier est, si cela est possible, de les dériver. C'est la notion de dérivées partielles que l'on va voir.

### 8.3.1 Notion de dérivée partielle

**Définition 323**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(a, b) \in \mathcal{D}$. Soit $f_x : x \mapsto f(x, b)$.

- Si $f_x$ est dérivable en $a$ alors on dit que $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(a, b)$ et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x'(a)$$

Autrement dit, si $\lim_{x \longrightarrow a} \left( \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \right)$ existe, on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \longrightarrow a} \left( \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \right)$$

- Si $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en tout point de $\mathcal{D}'$, on définit la fonction dérivée partielle de $f$ par rapport à la première variable par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} \mathcal{D}' & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

☛ **Remarque :**

1. On note $\mathcal{S}_f$ la surface représentative de $f$ et $(a, b)$ un élément de $\mathcal{D}$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,$ existent. Ces quantités sont bien évidemment à rapprocher de la notion de tangente. Plus précisément, dans le plan vertical d'équation $y = b$, la tangente à la courbe représentative de $f(., b)$ en $(a, b)$ a pour coefficient directeur $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Dans le plan vertical d'équation $x = a$, la tangente à la courbe représentative de $f(a, .)$ en $(a, b)$ a pour coefficient directeur $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.
2. On définit les mêmes notions par rapport à la seconde variable. Si la fonction $f_y : y \mapsto f(a, y)$ est dérivable en $b$, i.e. si $\lim_{y \longrightarrow b} \left( \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \right)$ existe, alors on dit que $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en $(a, b)$ et on note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ la quantité $f_y'(b)$. On a alors :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \longrightarrow b} \left( \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \right).$$
Si $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la deuxième variable en tout point de $\mathcal{D}'$, on définit la fonction dérivée partielle de $f$ par rapport à la deuxième variable par : $\frac{\partial f}{\partial y}$ :
$$\begin{cases} \mathcal{D}' & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}.$$

3. Expliciter des dérivées partielles revient, quand il n'y a pas de problème, à dériver simplement en se comportant comme si les autres variables étaient des constantes. C'est d'ailleurs ce qu'on fait dans l'exemple qui suit ! Sinon, en cas de problème, que faire ? On vous le répète, $f$ admet en un point $(a, b)$ une dérivée partielle par rapport à $y$ si et seulement si la fonction $g : y \mapsto f(a, y)$ admet une dérivée en $b$. Pour montrer que $g$ admet ou n'admet pas de dérivée en $b$, on regarde son chapitre sur les fonctions d'une seule variable dont on commence à avoir la nostalgie !

✌ **Exemple :**

$f : (x, y) \mapsto x \arctan(y) + x^2$ admet deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \arctan(y) + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{x}{1 + y^2}$$

☞ **Mise en garde :**

Ne parlez pas de la dérivée de $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$. Le concept de dérivée est vu pour une fonction d'une seule variable, on peut donc parler de la dérivée de la fonction $g : y \mapsto f(x_a, y)$. Pour celle de $f$, il faudrait déjà parler de son taux d'accroissement, ce serait un truc du genre $\dfrac{f(x, y) - f(x_a, y_a)}{(x, y) - (x_a, y_a)}$ ce qui n'a strictement aucun sens ! Que signifie le quotient d'un réel comme l'est $f(x, y) - f(x_a, y_a)$ par le couple de réels $(x, y) - (x_a, y_a)$ ?

## ➤ *Exercice :*

*Soit* $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$. *Évaluer ses dérivées partielles (si elles existent !)*

........................................................................................................

A part $(0, 0)$, on n'a aucun problème. Ainsi, si $a$ et $b$ sont deux réels non tous les deux nuls (une remarque pour ceux qui dorment : on n'a pas dit tous les deux non nuls, on veut juste éviter qu'ils s'annulent en même temps !), en posant $v = a^2 + b^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{2a}{v^2} \exp\left(\frac{-1}{v}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{2b}{v^2} \exp\left(\frac{-1}{v}\right).$$

Pour savoir si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe, on suit les instructions et on introduit la fonction $g : x \mapsto f(x, 0)$. Si $x$ est non nul, on a donc :

$$g(x) = f(x, 0) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

et on a $g(0) = 0$. Soit $x$ un réel non nul, on a donc :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \times \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

Par croissances comparées et produit, le taux d'accroissement en $0$ de $g$ admet donc une limite finie (qui vaut $0$) donc $g$ est dérivable en $0$ et $g'(0) = 0$. Par définition, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut $0$. On vous laisse prouver que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe aussi et vaut aussi $0$ (logique car $x$ et $y$ jouent le même rôle dans ce problème).

### 8.3.2 Fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 324**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $(a, b)$ un élément de $\mathcal{D}$. On dit que $f$ est continue en $(a, b)$ lorsque pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, il existe un réel strictement positif $\alpha$ tel que :

$$\forall (x,y) \in D_f, (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ lorsque f est continue en tout point de $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{C}^0(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques continue sur $\mathcal{D}$.
- On dit que $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ si toutes les dérivées partielles de $f$ existent et sont continues sur $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

☛ **Remarque :**

La définition (avec les $\varepsilon$) n'est pas exigible des étudiants de BCPST1. Il faut retenir l'idée intuitive que, si $f$ est continue en $(a, b)$, alors $|f(x,y) - f(a,b)|$ devient aussi petite que l'on souhaite lorsque "$(x, y)$ se rapproche de $(a, b)$". Attention, faire tendre $(x, y)$ vers $(a, b)$ ne revient pas à faire tendre $x$ vers $a$ puis $y$ vers $b$ ! Prenons par exemple $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. On constate (en calculant les limites au fur et à mesure) que :

$$\lim_{x \longrightarrow 0}\left(\lim_{y \longrightarrow 0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \longrightarrow 0}\left(\lim_{x \longrightarrow 0}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right) = 0$$

$f$ n'a pourtant pas de limite en $(0, 0)$ car on vient de voir que, si elle existait, elle vaudrait $0$ mais, pour tout réel $a$ strictement positif, on a $f(a, a) = \dfrac{1}{2}$ ce qui rend impossible la limite nulle.

**Proposition 325**

Soient $f_1 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $\lambda$ un réel.

- Si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues sur $\mathcal{D}$ alors $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ et $\lambda f_1$ sont aussi continues sur $\mathcal{D}$.
- Si $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ alors $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ et $\lambda f_1$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

✌ **Exemple :**

Les polynômes et les fractions rationnelles sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

**Proposition 326**

Soient $I$ un intervalle réel non réduit à un point et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ($h$ est donc une fonction d'une variable et $f$ de deux).

- Si $f$ est continue sur $\mathcal{D}$, $h$ est continue sur $I$ et $f(\mathcal{D}) \subset I$ alors $h \circ f$ est aussi continue sur $\mathcal{D}$.
- Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$, $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f(\mathcal{D}) \subset I$ alors $h \circ f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

☛ **Remarque :**

En résumé, la plupart des énoncés sur la continuité des fonctions d'une variable se généralisent dans le cadre des fonctions de plusieurs variables :

- Une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Toute combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.
- Tout produit de fonctions continues est une fonction continue.
- Le quotient de deux fonctions continues est continu en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.
- etc.

## ➤ *Exercice :*

*Montrer que* $f : (x, y) \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2y^2+1}}\right)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

........................................................................................................

$f$ est, par composition, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2y^2 + 1 \neq 0$ donc $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2y^2+1}$ est une fraction rationnelle définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{x^2+1}{x^2y^2+1} > 0$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- $x \mapsto \arctan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

### 8.3.3 Dérivées partielles d'ordre 2 et théorème de Schwarz.

**Définition 327**

Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(a, b) \in \mathcal{D}$.

- Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$, on note :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$
- De même, si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$, on note :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
- Ces quatre fonctions sont appelées les dérivées partielles secondes de $f$.
- On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

☛ **Remarque :**

1. On peut définir facilement les dérivées partielles d'ordre 3 puis 4 puis... et parler aussi de classe $\mathcal{C}^3$ puis classe $\mathcal{C}^4$ puis...
2. Les énoncés pour les fonctions de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ s'étendent évidemment aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ($n$ entier naturel) :
   - Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ;
   - Tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ;
   - Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$ est de $\mathcal{C}^n$ sur le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ où le dénominateur ne s'annule pas ;
   - La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$
   - etc.

✌ **Exemple :**

Si $f : (x, y) \mapsto x^2 y + y^3 + 1$ alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x, y) \mapsto 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x, y) \mapsto 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : (x, y) \mapsto 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (x, y) \mapsto 6y$$

On se rend compte sur ce cas particulier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont confondues ici. Le théorème de Schwarz va nous expliquer dans quel cas cela est vrai.

**Théorème 328**

**Théorème de Schwarz**
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

✌ **Exemple :**

Dans l'exemple précédent avec $f : (x, y) \mapsto x^2 y + y^3 + 1$, $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a vu qu'on avait bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

### ➤ *Exercice :*

*Étudier les dérivées partielles successives de :*

$$f : (x, y) \mapsto x - y + x^2 y$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f$ est, par composition, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b)$ un couple de réel, on a successivement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 1 + 2ab \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -1 + a^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = 2a, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 2b \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 0.$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a, b) = 0, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a, b) = 2, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b) = 0.$$

et après, ce ne sont que des fonctions nulles...

### 8.3.4 Dérivation de fonctions composées.

**Proposition 329**

Soient I un intervalle réel non réduit à un point, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ et $\psi : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions. On pose :

$$g : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(\phi(t), \psi(t)) \end{cases}$$

On suppose que $f$ est un élément de $\mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, que $\phi$ et $\psi$ sont deux éléments de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et que $\phi(I) \times \psi(I) \subset \mathcal{D}$. $g$ est alors un élément de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et pour tout réel $t$ de I, on a :

$$g'(t) = \phi'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t), \psi(t)) + \psi'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t), \psi(t)).$$

✌ **Exemple :**

Si $g : t \mapsto f(\cos(t), \arctan(t))$ avec $f$ élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g' : t \mapsto -\sin(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \arctan(t)) + \frac{1}{1+t^2}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), \arctan(t)).$$

➤ ***Exercice :***

*Soient* $f$ *une fonction numérique de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $g$ *la fonction suivante :*

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

*Justifier que g est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et exprimer* $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta)$ *en fonction des dérivées partielles de* $f$.

.........................................................................................

Par composition, $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour bien utiliser la formule du cours et ne pas raconter trop de bêtises, on introduit les deux fonctions suivantes :

$$u_1 : (r, \theta) \mapsto r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad u_2 : (r, \theta) \mapsto r\sin(\theta).$$

Appliquons la formule précédente :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial u_2}{\partial r}(r, \theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On obtient donc que :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(\text{ ✎ }).$$

Redérivons ! De nouveau, on introduit une fonction pour ne pas partir dans de gros délires ! Soit $h:(r,\theta)\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$. En utilisant la belle formule du cours, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial u_1}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\frac{\partial u_2}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).\end{aligned}$$

Ainsi, en dérivant par rapport à $r$ la relation (✎), on obtient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos(\theta)\times A+\sin(\theta)\times B.$$

avec : $\begin{cases} A &= \cos(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\\ B &= \cos(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))+\sin(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\end{cases}$

## 8.4 Utilisation des dérivées partielles

### 8.4.1 Notion de gradient

**Définition 330**

Soit $f$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. Soit $(a,b)$ un élément de $\mathcal{D}$. On appelle gradient de $f$ en $(a,b)$ le vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)}(f)$ de coordonnées $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

✌ **Exemple :**

Si $f:(x,y)\mapsto (x^2+y+1)$ alors on a : $\overrightarrow{\text{grad}}_{(2,3)}(f)=(4,1)$.

### 8.4.2 Extremum

**Proposition 331**

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < b$ et $c < d$. Soit $f$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,a, b\,[ \times ]\,c, d\,[$.

- Si f admet en $(x_0, y_0)$ un extremum alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

- Si f admet en $(x_0, y_0)$ un extremum alors le gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$ est le vecteur nul.

☛ **Remarque :**

1. On peut faire le parallèle avec les fonctions d'une seule variable dérivable. On sait que si $h$ est dérivable sur $]a, b[$ avec $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et si $h$ admet un extremum en $c$ avec $c$ dans $]a, b[$ alors $h'(c) = 0$. On sait aussi qu'on peut avoir $h'(c) = 0$ et $c$ n'est pas un extremum : cette condition n'est pas nécessaire et suffisante. On peut ainsi évoquer le cas de $x \mapsto x^3$ et du point $0$. Ce point qui annule la dérivée sans être un extremum est un point d'inflexion.
2. Attention, cette proposition ne donne qu'une condition nécessaire pour avoir un extremum et pas une condition nécessaire et suffisante. En utilisant les notations de la précédente proposition, si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont nuls alors on n'est pas sûr que $f$ présente en $(x_0, y_0)$ un extremum. Par contre si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ ou si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors on est sûr que $f$ ne présente pas en $(x_0, y_0)$ un extremum.
3. Résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ d'inconnue $(x, y) \in \ldots$ n'a pas d'intérêt... pas plus que l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ d'inconnue $(x, y) \in \ldots$. C'est le système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \ldots$ qu'il faut résoudre afin de trouver les extremums.

■ **Méthode:**

Pour trouver les éventuels extremums d'une fonction $f$ de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, on fait deux étapes :

1. On calcule ses dérivées partielles et on écrit qu'elles sont toutes nulles au point qui nous intéresse (Des éléments qui vérifient cette propriété sont appelés des points critiques de $f$). Cela donne donc un système à résoudre.
2. Si $f$ n'a pas de point critique, on peut conclure que $f$ n'a pas d'extremum à l'intérieur de son ensemble de définition (Méfiez-vous des bords !). Sinon, on essaye de démontrer (ce sont des inéquations) que ces points critiques sont ou ne sont pas des extremums. On s'intéresse donc

au signe de $f(x,y) - f(a,b)$ avec $(a,b)$ un point critique et $(x,y)$ deux réels quelconques. Quelques réflexes de base permettent en général de s'en sortir : dire qu'un carré est positif, utiliser une fonction dont on a étudié le signe. Si c'est plus compliqué, il devrait y avoir une indication dans l'énoncé !

## ➤ *Exercice :*

*Soit* $f : (x,y) \mapsto x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right)$.

1. *Montrer que, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, on a* $f(x,y) \geqslant x \times \exp(x)$.
2. *Étudier rapidement la fonction* $g$ *suivante :* $g : x \mapsto x \times \exp(x)$ *et trouver la valeur de son minimum s'il existe.*
3. *En déduire que* $f$ *admet un minimum sur* $\mathbb{R}^2$ *atteint en un seul point.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On vous laisse expliquer rapidement pourquoi $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pourquoi $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On prend $x$ et $y$ deux réels.

1. On a :
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right) \\ &= x \times \exp(x) \times \exp\left(xy^2\right) \end{aligned}$$
Si $x$ est positif alors $\exp\left(xy^2\right) \geqslant 1$ et $x \times \exp(x) \geqslant 0$ d'où :
$$f(x,y) \geqslant x \times \exp(x).$$
Si $x$ est négatif alors $\exp\left(xy^2\right) \leqslant 1$ et $x \times \exp(x) \leqslant 0$ donc on obtient de nouveau que $f(x,y) \geqslant x \times \exp(x)$.
2. Sans difficulté, pour tout réel $x$, on a : $g'(x) = \exp(x) \times (x+1)$. On cherche le signe de $g'$ : tout ça, vous savez faire et vous obtenez donc un minimum de $g$ en $-1$ valant $\dfrac{-1}{e}$.
3. $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc chercher ses points critiques. Soient $a$ et $b$ deux réels, on note $\mathcal{P}$ la propriété "$(a,b)$ est un point critique de $f$", on a :
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\iff \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \\ &\iff ((b^2+1)a+1) \text{ et } (2ba^2) = 0 \\ &\qquad \text{car } \exp\left(a\left(b^2+1\right)\right) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 0 = -1 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{car } 0 \neq -1 \end{aligned}$$
Ainsi, si $(a,b) \neq (-1,0)$, $f(a,b)$ n'est pas un extremum de $f$. Soient $x$ et $y$ deux réels. On sait que $f(x,y) \geqslant xe^x$ donc $f(x,y) \geqslant g(x)$. Or $g(x) \geqslant \dfrac{-1}{e}$ et $f(-1,0) = \dfrac{-1}{e}$ (ça tombe bien !) donc $f(x,y) \geqslant f(-1,0)$. Donc $f(-1,0)$ est le minimum de $f$ et il n'est atteint qu'en $(-1,0)$.

### 8.4.3 Plan tangent, approximations

**Définition 332**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. Soit $(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$.

- Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $(x_0, y_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

- Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $(x_0, y_0)$ est donc le plan passant par $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et normal à $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}(f)$.

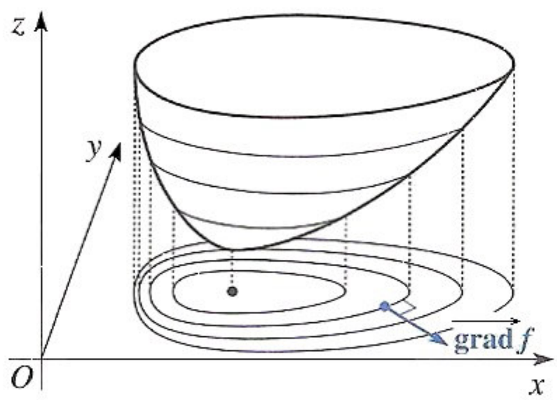
☛ **Remarque :**

On utilise les notations précédentes.

1. Soient $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. $z : t \mapsto z(t) = f(x(t), y(t))$ est une courbe de la surface $\mathcal{S}_f$ passant par $M_0(x_0, y_0)$. On peut démontrer, en utilisant la proposition sur la dérivation de fonctions composées, que les tangentes en $M_0$ à ces types de courbes de la surface $\mathcal{S}_f$ passant par $M_0$ appartiennent toutes au plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $M_0$.
2. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $M_0$ est donc le meilleur plan approchant la surface $\mathcal{S}_f$.
3. Le gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$ est normal au plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $M_0$. Ainsi, toutes les tangentes en $M_0$ à ces types de courbes de la surface $\mathcal{S}_f$ sont orthogonale au gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$. Cela s'interprète géométriquement par le fait que la direction du gradient indique la direction suivant laquelle $f$ varie le plus vite, la norme du gradient mesurant l'intensité de cette variation.

- En tout point $M_0(x_0, y_0)$, le gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$ est normal à la ligne de niveau $f(x_0, y_0)$ de $f$ comme le montre l'illustration d'après.

✎) **Illustration :**



**Proposition 333**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$. Soient $h$ et $k$ deux réels.

- La quantité suivante est négligeable devant $\sqrt{h^2+k^2}$ :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

- En notant $\overrightarrow{u}$ le vecteur $(h, k)$ et $\cdot$ le produit scalaire, on a donc :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \approx \overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)}(f) \cdot \overrightarrow{u}$$

☛ **Remarque :**

On approche donc le point $M_0(x_0+h, y_0+k, f(x_0+h, y_0+k))$ de $\mathcal{S}_f$ par le point $M$ de co-ordonnées $\left(x_0+h, y_0+k, f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right)$, autrement dit par le point du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en $M(x_0, y_0)$ ayant même abscisse et ordonnée que $M_0$.

## ➤ *Exercice* :

*On reprend* $f : (x, y) \mapsto x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right)$*, donner une bonne approximation en* $(1, 2)$ *de sa surface.*

..........................................................................................

Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, une bonne approximation en $(1, 2)$ de sa surface est le plan d' équation cartésienne :

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y-2)$$

c'est-à-dire (en reprenant les expressions trouvées pour les dérivées partielles de f) :

$$z = e^5 + 6e^5(x-1) + 4e^5(y-2).$$

# XVI – Les polynômes réels

## 1/ Les fonctions polynomiales

### 1.1) Définitions

**Définition** *On appelle **fonction polynomiale** ou **polynôme** toute fonction réelle de la forme* $P : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *, avec* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels nulle à partir d'un certain rang.*

**Remarques :**

❶ Un tel polynôme se note formellement $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ à l'aide d'une **indéterminée** X.

❷ Les nombres $(a_n)$ sont appelés les **coefficients** du polynôme.

❸ Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul** et noté 0.

❹ L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et d'indéterminée X se note $\mathbb{R}[X]$.

**Proposition**

*L'écriture d'un polynôme est unique. Par conséquent :*
- *Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.*
- *Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux.*

**Définition** *On associe à tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *son degré* $\deg(P)$ *défini par*

$$\deg(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P = 0 \\ n & \text{si } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0 \end{cases}$$

**Remarques :**
- Si $P \neq 0$, le coefficient $a_{\deg(P)}$ s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme P.
- Enfin, un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est appelé **polynôme unitaire**.

**Définition** *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On note alors* $\mathbb{R}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \middle/ \deg(P) \leqslant n\right\}$.

### 1.2) Opérations sur les polynômes

**Théorème**

*Les sommes, produits, composées et dérivées de polynômes sont encore des polynômes.*

**Proposition**

*Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$, $P$ *et* $Q \in \mathbb{R}[X]$. *Alors :*

- $\deg(P+Q) \leqslant \max\left\{\deg(P);\deg(Q)\right\}$ *avec égalité si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ *et* $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ *si* $\lambda \neq 0$.

**Proposition**

*Soient* $P$ *et* $Q$ *deux polynômes tels que* $P \neq 0$, $Q \neq 0$ *et* $P \circ Q \neq 0$.
*On a alors* $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).}$

**Proposition**

*Soit* $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. *Son polynôme dérivé est* $P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} X^n$.

**Proposition**

*Soit* $P$ *un polynôme. Si* $P$ *est constant,* $P' = 0$. *Sinon,* $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
*En particulier,* $P^{(m)} = 0$ *pour tout entier* $m > \deg(P)$.

## 2/ Racines d'un polynôme

### 2.1) Définitions

**Définition** *Un réel* $\alpha$ *est une* ***racine*** *du polynôme* $P$ *si* $P(\alpha) = 0$.
*On dit que c'est une solution de* ***l'équation algébrique*** $P(x) = 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

**Proposition**

*Tout polynôme* $P$ *de degré* ***impair*** *admet au moins une racine réelle.*

**Théorème (factorisation)**

*Un réel* $\alpha$ *est racine d'un polynôme* $P$ *si, et seulement si,* $P$ *se factorise par* $(X - \alpha)$.

## 2.2) Nombre de racines

**Proposition**

*Un polynôme de degré n possède au plus n racines .*

**Corollaire**

*Un polynôme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui possède au moins* $n+1$ *racines est le polynôme nul.*

**Proposition**

*Un polynôme* $P$ *de degré* $n \in \mathbb{N}^*$ *possédant exactement n racines s'écrit sous la forme*

$$\boxed{P = a_n\,(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ \dots\ (X-\alpha_n)}$$

## 2.3) Racines multiples

**Définition** *Soient* $P \in \mathbb{R}[X]$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$. *On dit que* $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ ***est racine de*** $\mathbf{P}$ ***de multiplicité m*** *lorsque l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

*(i)* $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) =$ *et* $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

*(ii)* $P$ *est divisible par* $(X-\alpha)^m$ *mais pas par* $(X-\alpha)^{m+1}$.

**Proposition**

*Un polynôme* $P$ *de degré* $n \in \mathbb{N}^*$ *possédant exactement n racines* comptées avec leurs ordres de multiplicité *s'écrit sous la forme*

$$\boxed{P = a_n\,(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\ \dots\ (X-\alpha_r)^{m_r}}$$