Chapitre

Révision d’analyse

Méthodes de mathématiques pour BCPST2.

1. **Méthodes sur la trigonométrie et les complexes :**
   - Résoudre des équations trigo.
   - Savoir couper les angles en deux.
   - Savoir factoriser.
   - Savoir linéariser.
   - Calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
   - Simplifier $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$.
   - Trouver la forme trigonométrique de z.
   - Maîtriser la technique de l'angle moitié.
   - Résoudre une équation du second degré.
   - Résoudre $z^n = 1$.
2. **Méthodes sur les fonctions de plusieurs variables :**
   - Trouver l'ensemble de définition
   - Tracer la surface représentative
   - Comment calculer les dérivées partielles (avec ou sans composition)
   - Comment trouver les extremums
   - Comment approcher
3. **Méthodes sur les suites :**
   - Utiliser théorème des gendarmes ou le passage à la limite dans les inégalités.
   - Montrer qu'une suite croissante tend vers $+\infty$.
   - Expliciter une suite arithmético-géométrique.
   - Expliciter une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   - Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   - Utiliser le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   - Prouver la bonne définition d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$"
   - Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f croissante.
   - Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f décroissante.
   - Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f contractante.
   - Prouver que $\sum u_k$ est une somme de Riemann et s'en servir.

4. **Méthodes d'analyse de base :**
   - Prouver qu'une équation a des solutions.
   - Savoir résoudre une inéquation.
   - Trouver les asymptotes.
5. **Méthodes concernant l'intégration :**
   - Savoir faire une intégration par parties.
   - Savoir faire un changement de variable.
   - Savoir intégrer d'une fonction rationnelle.
   - Savoir encadrer une intégrale.
   - Intégrer une fonction dont l'expression change...
6. **Méthodes concernant les équivalents et développements limités :**
   - Obtenir un équivalent.
   - Pour le calcul de limite.
   - Avoir des dérivées.
   - Avoir une tangente et même la position.
   - Avoir une asymptote et même la position.
7. **Méthodes concernant les équations différentielles :**
   - Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   - Assumer un problème de recollement.
   - Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène et à cœfficients constants.
   - Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et à cœfficients constants.
   - Savoir utiliser la méthode d'Euler.

A) Révisons efficacement trigo et complexes

MÉTHODE 1 : Résoudre des équations trigo

■ **Principe :**

Résoudre des équations trigo ne devrait pas vous poser trop de problèmes, l'idée est de se ramener à une égalité entre deux cos ou deux sin ou deux tan puis à invoquer ces propriétés du cours :

1. $\cos(\theta) = \cos(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$
2. $\sin(\theta) = \sin(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \phi[2\pi]$
3. $\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \phi + \pi[2\pi]$ que l'on résume en $\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[\pi]$

Si jamais vous avez un mélange de cos et du sin, sachez que vous pouvez passer de l'un à l'autre en faisant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ car :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).$$

■ **Rappel :**

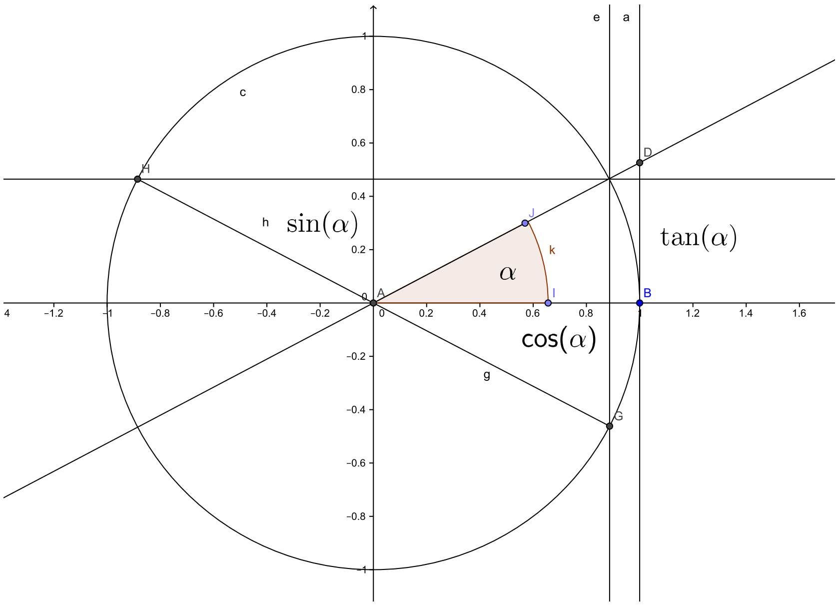
Lors de la résolution d'équations de trigonométrie, on va devoir faire des sommes et des divisions dans les modulos, voici les règles qu'il faudra respecter :

- $\theta_1 \equiv \theta'_1[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta'_2[2\pi] \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \equiv \theta'_1 + \theta'_2[2\pi]$
- $\theta_1 \equiv \theta'_1[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta'_2[2\pi] \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 \equiv \theta'_1 - \theta'_2[2\pi]$
- $n\theta_1 \equiv n\theta'_1[2\pi] \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta'_1 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$

Penser bien en particulier à diviser dans le modulo quand vous diviser une égalité.

■ **Mise en garde :**

Attention, on des modulos 2π pour cos et sin et modulo π pour tan. Ne pas oublier aussi à chaque fois la deuxième possibilité. $\cos(\theta) = \cos(\phi)$ n'équivaut pas à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ mais à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$. La deuxième possibilité se retrouve très simplement en observant un cercle trigo :



1. Pour le cos, on remarque que $\cos(\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite verticale sur le cercle pour le voir.
2. Pour le sin, on remarque que $\sin(\alpha)$ et $\sin(\pi-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite horizontale sur le cercle pour le voir.
3. Pour le tan, on remarque que $\tan(\alpha)$ et $\tan(\pi+\alpha)$ valent la même chose.

■ ***Exemple* :**

Résoudre l'équation $\cos(x)=\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$ *d'inconnue* x *réel.*

Soit x un réel, on a $\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\cos(x)=\sin\left(\frac{2x}{3}\right) &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+\frac{\pi}{2} & \equiv & \frac{2x}{3}[2\pi] \\ & \text{ou} & \\ x+\frac{\pi}{2} & \equiv & \pi-\frac{2x}{3}[2\pi] \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{3}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \ \text{ ou } \ \frac{5x}{3}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\
&\Leftrightarrow x\equiv-\frac{3\pi}{2}[6\pi] \ \text{ ou } \ x\equiv\frac{3\pi}{10}\left[\frac{6\pi}{5}\right]
\end{aligned}$$

MÉTHODE 2 : Savoir couper les angles en deux

■ **Rappel :**
On sait que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\\ &= 2\cos^2(\theta) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(\theta).\end{aligned}$$

D'autre part, en posant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on obtient (sous réserve d'existence) celles liées à la tangente de l'angle moitié :

- $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

■ **Principe :**
Parmi toutes les belles formules de trigo, celles faisant permettant de passer de 2θ à θ (cf; rappel ci-dessus) sont très usitées. Vous devez non seulement les connaître mais aussi les reconnaître. Dès que vous avez des formules de trigo mélangeant des 2θ, des θ et compagnie, essayez d'homogénéiser au maximum en utilisant ces formules qui vous permettent de diviser ou multiplier les angles par deux.

■ ***Exemple*** **:**

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1.$$

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1 &\iff 1 - 2\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 1\\ &\iff \sin(x) \times (\cos(x) + \sin(x)) = 0\\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\sin(x)\\ &\iff x \equiv 0[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]\end{aligned}$$

MÉTHODE 3 : Maîtriser la technique de l'angle moitié

■ **Rappel :**

On va avoir besoin des formules d'Euler pour cette méthode :

$$\exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2\cos(\theta) \text{ et } \exp(i\theta) - \exp(-i\theta) = 2i\sin(\theta).$$

■ **Principe :**

On souhaite mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme suivante :

$$\exp(ia) + \exp(ib) \text{ ou } \exp(ia) - \exp(ib).$$

Pour cela, il suffit de mettre en facteur l'angle moitié, c'est-à-dire $\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right)$, puis d'utiliser les formules d'Euler données dans le rappel. On obtient alors ces deux formules (qu'il ne faut pas apprendre par cœur mais savoir retrouver en factorisant comme on vient juste de le dire !) :

- $\exp(ia) + \exp(ib) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right).$
- $\exp(ia) - \exp(ib) = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{a+b}{2}\right).$

■ **Cas particulier :**

On rencontre aussi de temps en temps des $\exp(ia)+1$ et $\exp(ia)-1$, c'est donc le cas particulier où l'un des deux angles est nul. Il suffit alors de factoriser par $\exp\left(i\dfrac{a}{2}\right)$ afin d'obtenir :

$$\exp(ia) + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad \exp(ia) - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right).$$

■ ***Exemple* :**

Soit a un élément de $]0,\pi]$. Mettre sous forme trigonométrique le complexe suivant :

$$z = \frac{\exp(ia)+1}{1-\exp(ia)}.$$

On note que $1-\exp(ia)$ n'est pas nul puisque a n'est pas un multiple de 2π. On met $\exp\left(i\dfrac{a}{2}\right)$ en facteur au numérateur comme au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right) + \exp\left(-i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(-i\frac{a}{2}\right) - \exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \times \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= i\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On a remplacé $\dfrac{1}{i}$ par $-i$ ce qui est vrai puisque $i^2=-1$.

MÉTHODE 4 : Savoir factoriser

■ **Rappel :**

On va utiliser les égalités vues dans la précédente méthode :

- $\exp(ip) + \exp(iq) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{p+q}{2}\right)$.
- $\exp(ip) - \exp(iq) = 2i\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\dfrac{p+q}{2}\right)$.

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les formules de factorisation (qui ne sont pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement à l'aide de la formule précédente) :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

■ **Cas d'utilisation :**

Factoriser est utile quand on résout une équation ou quand on cherche un signe. Autant dire que dans ces deux cas, on n'apprécie guère d'avoir une somme ! Bref, ces formules de factorisation, bien qu'elles ne soient pas à apprendre par cœur, sont à savoir retrouver très très rapidement !

■ ***Exemple*** **:**

Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ *d'inconnue* x *réel.*

Soit x un réel. À l'aide des formules de factorisations, on obtient :

$$\sin(x) + \sin(3x) = 2\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)$$

Chouette, du $\sin(2x)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff 2\sin(2x)\cos(x) + \sin(2x) = 0 \\
&\iff \sin(2x) \times \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \text{ou} & & \\ x & \equiv & \pm\dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

MÉTHODE 5 : Savoir linéariser

■ **Principe :**

Le but est d'exprimer des puissances de cos et de sin en fonction de somme de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$. Il suffit pour cela de suivre ces deux étapes :

- **Étape 1 :**
  On remplace toutes les fonctions trigos grâce aux formules d'Euler puis on développe avec la formule du binôme de Newton.
- **Étape 2 :**
  Dans la grosse somme obtenue, on regroupe ensemble les $\exp(ik\theta)$ avec leurs amis, les $\exp(-ik\theta)$, et, enfin, on utilise de nouveau les formules d'Euler pour repasser en cos et sin.

Les calculs sont souvent pénibles mais en étant bien organisé, cela ne pose pas trop de souci !

■ **Cas d'utilisation :**

Linéariser, c'est bien utile quand on a besoin d'une somme. Typiquement, quand on cherche à calculer une intégrale faisant intervenir une puissance de cos ou de sin !

■ ***Exemple* :**

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(t)\ dt$.

D'après les formules d'Euler, pour tout réel t, on a :

$$\begin{aligned}\cos^6(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^6\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+6e^{4it}+15e^{2it}+20+15e^{-2it}+6e^{-4it}+e^{-6it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^5}\times\left(\frac{e^{6it}+e^{-6it}}{2}+6\times\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2}+10+15\times\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{32}\times\left(\cos(6t)+6\cos(4t)+15\cos(2t)+10\right).\end{aligned}$$

D'où, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6(t)dt &= \left[\frac{\sin(6t)}{6\times 32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+6\left[\frac{\sin(4t)}{4\times 32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+15\left[\frac{\sin(2t)}{2\times 32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{10\pi}{64}\\ &= \frac{5\pi}{32}.\end{aligned}$$

MÉTHODE 6 : **Expliciter** $\cos(n\theta)$ **et** $\sin(n\theta)$

■ **Rappel :**

On va avoir besoin de la formule de De Moivre dans cette méthode. Pour tout réel θ, pour tout entier n, on sait que :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

■ **Principe :**

Pour expliciter $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on suit bien gentiment ces deux étapes :

- On développe $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
- Enfin, d'après la formule de De Moivre, il suffit de chercher la partie réelle si on veut $\cos(n\theta)$ et la partie imaginaire si on veut $\sin(n\theta)$.

■ ***Exemple*** **:**

Appliquer le principe précédent avec $\cos(4\theta)$.

D'après la formule du binôme de Newton, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4$ est :

$$\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta).$$

En identifiant la partie réelle, d'après la formule de De Moivre, on obtient :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).$$

MÉTHODE 7 : **Simplifier** $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$

■ **Principe :**

Pour simplifier $A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$, on factorise par $\sqrt{A^2+B^2}$. Si A et B ne sont pas tous les deux nuls, on obtient :

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = \sqrt{A^2+B^2} \times \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)\right)$$

et on cherche un angle ϕ tel que :

$$\cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Enfin, en utilisant la formule $\cos(a+b)$, on se rend compte que $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)$ peut se simplifier en $\cos(\theta-\phi)$.

■ **Cas d'utilisation :**

Cette méthode est adaptée dès que vous avez une somme de sin et cos avec le même angle (il nous faut du θ pour les deux) et qu'on aimerait bien avoir juste un cosinus tout seul !

■ ***Exemple*** **:**

> *Résoudre l'équation d'inconnue θ réel :* $2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) = 4$
>
> Appliquons ! Soit θ un réel. On a :
>
> $$\begin{aligned} 2\cos(\theta) + \sqrt{12}\sin(\theta) = 4 &\iff 4 \times \left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 4 \\ &\iff \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta) = 1 \\ &\iff \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

MÉTHODE 8 : Trouver la forme trigonométrique de z

■ **Principe :**

Pour trouver la forme trigonométrique d'un complexe s'écrivant $a+ib$ (avec a et b deux réels pas tous les deux nuls), on factorise par son module pour obtenir :

$$\sqrt{a^2+b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

et on cherche un réel θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On tombe en général sur des valeurs classiques de cos et de sin :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

■ ***Exemple* :**

Soit θ un réel. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

$$z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(1 - i\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = (1+i) \times (\sin(\theta) + i\cos(\theta)) .$$

On essaye de reconnaître des valeurs particulières de cos et sin comme expliqué dans le principe. C'est parti :

$$\begin{aligned} z_1 &= \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) \times \exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) . \end{aligned}$$

On procède de même pour z_2 :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times i(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \times \exp(-i\theta) \\ &= \sqrt{2}\exp\left(i\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right) . \end{aligned}$$

MÉTHODE 9 : Résoudre une équation du second degré

■ **Principe :**

On cherche les racines de $aX^2 + bX + c$, polynôme que l'on appellera P, avec a complexe non nul et b et c deux complexes. On distingue deux cas :

- **a, b et c sont réels.**
  C'est le cas que l'on rencontre presque tout le temps. On note $\Delta = b^2 - 4ac$, on sait que pour tout complexe z, on a :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{si } \Delta > 0 \\[2ex] z = \dfrac{-b}{2a} & \text{si } \Delta = 0 \\[2ex] z = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

- **a, b et c sont des complexes non réels.**
  Pour résoudre une telle équation (degré 2 à cœfficients complexes), on va suivre ces deux étapes :

  1. On se débarrasse du terme de degré 1 en utilisant la forme canonique :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

  2. On cherche alors δ un complexe tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Le plus simple est d'écrire $b^2 - 4ac$ sous la forme $\rho \exp(i\theta)$ avec ρ et θ deux réels et $\rho \geqslant 0$ (i.e. de trouver la forme trigonométrique de $b^2 - 4ac$). On peut prendre $\sqrt{\rho}\exp\left(i\dfrac{\theta}{2}\right)$ pour δ et ça marche ! On obtient alors :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\iff \left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right) \times \left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) = 0 \\ &\iff z = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b+\delta}{2a} \end{aligned}$$

■ **Mise en garde :**

1. Attention, si $\Delta < 0$, on a mis du $i\sqrt{-\Delta}$ et pas du $i\sqrt{\Delta}$ qui ne serait pas défini !
2. Attention, si Δ est un complexe non réel, écrire $\Delta \geqslant 0$ n'a aucun sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.

■ ***Exemple :***

Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$z^2 - 2iz + \sqrt{3} \times i = 0.$$

On va utiliser la forme canonique pour éliminer le degré 1. Pour tout complexe z, on a :

$$\begin{aligned} z^2 - 2iz + \sqrt{3} \times i = 0 &\Longleftrightarrow z^2 - 2iz + i^2 + \sqrt{3} \times i = i^2 \\ &\Longleftrightarrow (z-i)^2 = -(\sqrt{3} \times i + 1) \\ &\Longleftrightarrow (z-i)^2 = \delta^2 \end{aligned}$$

avec δ un complexe tel que :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= -(\sqrt{3} \times i + 1) \\ &= 2i^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times i + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2i^2 \times \exp\left(i\frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Posons $\delta = \sqrt{2} i \exp\left(i\frac{\pi}{6} \right)$, on constate que δ^2 vaut bien . $-(\sqrt{3} \times i + 1)$. On en déduit que, pour tout complexe z, on a alors :

$$\begin{aligned} z^2 - 2iz + \sqrt{3} \times i = 0 &\Longleftrightarrow (z-i)^2 = \delta^2 \\ &\Longleftrightarrow (z-i)^2 - (\delta)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (z - i - \delta) \times (z - i + \delta) = 0 \\ &\Longleftrightarrow z = i + \delta \quad \text{ou} \quad z = i - \delta \end{aligned}$$

ce qui donne $-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ comme solutions.

MÉTHODE 10 : **Résoudre** $z^n = 1$

■ **Principe :**

Pour résoudre cette dernière équation, on identifie en utilisant la forme trigonométrique. On commence par dire que 0 n'est pas solution de notre équation (on dit ça car on va utiliser la notion d'argument de z qui implique que z est non nul) puis on prend z un complexe non nul. On a :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff |z^n| = |1| \text{ et } \arg(z^n) \equiv \arg(1)[2\pi] \\ &\iff |z|^n = 1 \text{ et } n\arg(z) \equiv 0[2\pi] \\ &\iff |z| = 1 \text{ et } \arg(z) \equiv 0\left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{aligned}$$

et donc, on obtient les n solutions de cette équation :

$$z^n = 1 \iff \exists k \in [\![0; n-1]\!] \text{ tel que } z = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$

■ *Remarque : Si on a une équation (d'inconnue z complexe) $z^n = \alpha$ à résoudre alors on écrit α sous forme trigonométrique, on appelle r_a son module et θ_a son argument. On fait un raisonnement similaire :*

$$\begin{aligned} z^n = \alpha &\iff z^n = r_a \exp(i\theta_a) \\ &\iff |z^n| = r_a \text{ et } \arg(z^n) \equiv \theta_a[2\pi] \\ &\iff |z| = \sqrt[n]{r_a} \text{ et } \arg(z) \equiv \frac{\theta_a}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \\ &\iff \exists k \in [\![0; n-1]\!] / z = \sqrt[n]{r_a} \times \exp\left(i\frac{\theta_a + 2k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

■ ***Exemple* :**

Résoudre l'équation $z^6 = -8i$ d'inconnue z complexe.

En appliquant simpelement cette méthode, on a :

$$\begin{aligned} z^6 = -8i &\iff z^6 = 8\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff |z|^6 = 8 \text{ et } 6\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\iff |z| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{3}\right] \\ &\iff \exists k \in [\![0; 5]\!] / z = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{-\pi + 4k\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

B) Révisons efficacement les suites

MÉTHODE 11 : Utiliser théorème des gendarmes ou le passage à la limite dans les inégalités

■ **Principe :**

On étudie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on imagine que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- Si on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n) = L$ avec L un certain réel, on peut alors conclure, en invoquant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ existe et vaut L.
- Si on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = +\infty$, on peut alors conclure, en invoquant le passage à la limite dans les inégalités, que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$. De la même façon, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$.
- Si on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = L_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n) = L_2$ avec $L_1 < L_2$, on peut alors essayer d'affiner notre encadrement de façon à avoir la même limite et repartir sur du théorème des gendarmes. Sinon, on essaye de prouver autrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (pourquoi pas un théorème de la limite monotone). On pourra alors affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty}(u_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty}(b_n).$$

  Ce n'est pas une égalité mais on espère que ces informations suffiront pour déterminer cette fameuse limite !

Avant de passer à la suite, il y a une autre utilisation classique du théorème des gendarmes : Si vous intuitez la limite L de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vous suffit de majorer assez finement $(|u_n - L|)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherche donc une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 et $|u_n - L| \leqslant v_n$ pour tout entier naturel n. De nouveau, les gendarmes nous permettent d'affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend effectivement vers L puisque l'on a :

$$L - v_n \leqslant u_n \leqslant v_n + L.$$

■ **Mise en garde :**

Deux mises en garde sur ce passage à la limite :

1. Attention, on ne peut pas passer automatiquement de $u_n \geqslant v_n$ à $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$. Il faut absolument prouver **avant** que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ existent !
2. Notez aussi que, par passage à la limite dans des inégalités, on n'obtient que des inégalités larges. Par exemple, si on sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > v_n$ alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on peut juste affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$, il se peut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient même limite. Ainsi, $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite.

■ **Cas d'utilisation :**

Utiliser le théorème des gendarmes ou le passage à la limite dans les inégalités est très classique lorsque la suite fait intervenir :

- Une notion de partie entière, du cos, du sin, du arctan. Ce sont des fonctions qu'on a l'habitude d'encadrer (surtout les trois premières qui ne permettent pas de conclure par opération...). Rappelons que, pour tout réel x, on a :

$$x-1<\lfloor x\rfloor \leqslant x+1, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arctan(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

- Une somme de n termes. Il est alors classique de minorer chacun des termes de la somme par le plus petit d'entre eux et majorer ces mêmes termes par le plus grand d'entre eux.

■ ***Exemple* :**

Calculer, si elle existe, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

et donc, par somme, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &\geqslant n\times\frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &\geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right)=+\infty$, donc par passage à la limite dans les inégalités, on peut affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)=+\infty$.

MÉTHODE 12 : Montrer qu'une suite croissante tend vers $+\infty$

On vous laisse écrire la méthode expliquant comment prouver qu'une suite décroissante tend vers $-\infty$.

■ **Rappel :**
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut avoir que quatre natures (i.e. quatre comportements en l'infini) :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut tendre vers $+\infty$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut tendre vers $-\infty$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas avoir de limite du tout !

Le théorème de la limite monotone affirme que, pour une suite monotone, il n'y a plus que deux natures possibles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (on vous laisse faire le cas décroissant), alors :

- Si elle est de plus majorée, elle converge et sa limite L est la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (L est donc une quantité connue, peut-être pas facile à estimer). Au passage, cela prouve que L est un majorant de cette suite, on a donc $u_n \leqslant L$ pour tout entier naturel n.
- Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

■ **Principe :**
Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante tend vers $+\infty$, il est classique de supposer que cette suite est majorée, cela entraîne qu'elle converge alors vers un réel L (d'après le théorème de la limite monotone). On essaye alors d'aboutir à une absurdité ce qui prouve que cette suite n'est pas majorée et donc, par le théorème de la limite monotone, qu'elle tend vers $+\infty$.

■ **Mise en garde :**
Attention, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut (si elle n'est pas croissante) ne pas être majorée et ne pas tendre vers $+\infty$. Pensez à la suite $(n\,(1-(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

■ ***Exemple* :**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis, après avoir trouvé une relation entre u_{n+1} et u_n, étudier l'éventuelle limite de cette suite.

On commence par démontrer par récurrence que notre suite est bien définie. Pour cela, on introduit, pour tout entier naturel n, l'hypothèse $P(n)$ suivante : "u_n existe et est positif".

Le fait que $P(0)$ soit vraie est une évidence. Soit n un entier naturel, on suppose $P(k)$ vraie pour tout k de $[\![0, n]\!]$. D'après ces hypothèses, par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est positif. Ainsi, $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$ existe et est positif, $P(n+1)$ est donc vraie. On a donc prouvé que $P(0)$ était vraie et que, pour tout entier naturel n, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$. Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. On a donc prouvé que notre suite est bien définie.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel L. On sait que u_{n+1} est $\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$ et donc (si n est non nul), $u_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k} \\ &= \sqrt{u_n + u_n^2}. \end{aligned}$$

Cela donne, par unicité de la limite (celle de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$), l'égalité suivante :

$$L = \sqrt{L + L^2}$$

ce qui entraîne $L^2 = L + L^2$ et donc $L = 0$. On vient donc de prouver que, si jamais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est nécessairement nulle.

Fixons n un entier naturel. Comme $u_n \geqslant 0$, on a $u_n + u_n^2 \geqslant u_n^2$ et donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{u_n + u_n^2} \geqslant \sqrt{u_n^2}$ soit $u_{n+1} \geqslant |u_n|$. Rappelons que $u_n \geqslant 0$, cela donne donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$. Par passage à la limite, on obtient donc que :

$$L \geqslant u_0$$

soit $0 \geqslant 1$ ce qui est absurde !

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante ne convergeant pas vers un réel. Elle tend donc vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

MÉTHODE 13 : Expliciter une suite arithmético-géométrique

■ **Rappel :**

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b (ne dépendant pas de n !!!) tels que, pour tout entier naturel n, on ait : $u_{n+1} = a \times u_n + b$ avec $a \neq 1$.

■ **Principe :**

Pas de formule à apprendre par cœur, le programme vous demande de suivre une méthode. Trois étapes vous permettront d'expliciter la suite du rappel :

1. On détermine le réel α tel que $\alpha = a \times \alpha + b$.
2. On soustrait les deux égalités suivantes qui sont vraies pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \quad \text{et} \quad \alpha = a \times \alpha + b$$

   Cela donne $(u_{n+1} - \alpha) = a \times (u_n - \alpha)$ ce qui prouve que $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
3. On exprime alors $u_n - \alpha$ en fonction de n (possible puisqu'on sait expliciter les suites géométriques) puis on revient à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ ***Exemple*** **:**

Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Mais s'il a fumé un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour (n un entier naturel non nul). Montrer que $p_{n+1} = -\frac{p_n}{4} + \frac{1}{2}$ puis en déduire p_n en fonction de n et de p_1.

Soit n un entier naturel non nul, notons F_n l'événement : "le fumeur fume le n-ième jour". $(F_n, \overline{F_n})$ formant un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}) \\ &= \frac{1}{4}\,p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) \\ &= -\frac{p_n}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On résout l'équation d'inconnue x réel : $x = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ qui a pour unique solution $\frac{2}{5}$. On a :

$$p_{n+1} = -\frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

ce qui donne : $p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} \times \left(p_n - \frac{2}{5}\right)$. Cela montre que $\left(p_n - \frac{2}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$. Pour tout entier naturel non nul n, on a donc :

$$p_n - \frac{2}{5} = \frac{p_1 - \frac{2}{5}}{(-4)^{n-1}}$$

ce qui donne $p_n = \dfrac{5p_1 - 2}{5 \times (-4)^{n-1}} + \dfrac{2}{5}$.

MÉTHODE 14 : Expliciter une suite récurrente linéaire d'ordre 2

■ **Rappel :**

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels a et b (ne dépendant pas de n) tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

■ **Principe :**

Pour expliciter une suite récurrente linéaire d'ordre 2, il faut suivre ces trois étapes :

- **Étape 1 : Résolution de l'équation caractéristique**
  on commence par résoudre l'équation (E) (dite caractéristique) :

  $$x^2 = a \times x + b$$

  d'inconnue x complexe.
- **Étape 2 : On trouve la bonne forme**
  1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

     $$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

  2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0 alors il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

     $$u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n.$$

  3. Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes r_1 et r_2, elles seront de la forme $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec r et θ deux réels et il existera (les deux expressions qui suivent sont vraies, à vous de choisir celle qui vous arrange) :
     - deux complexes λ et μ tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

       $$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

     - deux réels A et B tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

       $$u_n = \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right) r^n.$$

- **Étape 3 : On explicite les constantes.**
  Pour expliciter complètement notre suite récurrente linéaire d'ordre 2, il reste à déterminer les constantes notées λ et μ (ou A et B) de la précédente étape. Pour cela, on utilise deux termes connus de la suite (souvent les deux premiers) ce qui donne un système à deux équations dont le couple (λ, μ) (ou (A, B)) est la solution.

■ *Remarque : Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes, les deux propositions suivantes :*

$$U_n = \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right) r^n \quad \textit{et} \quad U_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

sont toutes les deux correctes (à vous de choisir celle qui vous arrange le plus). Ce qu'on aime bien dans le $(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))\,r^n$, c'est que A et B sont des réels. Dans $\lambda r_1^n+\mu r_2^n$, on apprécie la simplicité de l'écriture qui rappelle le cas où les racines sont réelles distinctes. Par contre, λ et μ sont, dans ce cas, des complexes non réels.

■ ***Exemple* :**

Expliciter la suite de Fibonacci qui est définie par :

$$u_0=u_1=1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Cette suite est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est l'équation suivante : $x^2=x+1$ d'inconnue x complexe. Un coup de discriminant vous montre que cette équation possède deux solutions réelles qui sont $r_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc λ et μ réels tels que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$u_n=\lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (✎)$$

Il nous faut maintenant déterminer les mystérieux λ et μ . C'est là que l'on va utiliser les deux premiers termes u_0 et u_1 qui nous sont donnés. Nous avons d'après ✎ : $u_0=\lambda+\mu$ et $u_1=\lambda\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\mu\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Or $u_0=1$ et $u_1=1$ donc :

$$\left\{\begin{array}{lcc} \lambda & = & 1-\mu \\ 1 & = & (1-\mu)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\mu\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right.$$

ce qui donne, après quelques calculs, les deux égalités suivantes :

$$\lambda=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \mu=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Bref, nous avons montré que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

MÉTHODE 15 : Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes

■ **Principe :**

On étudie un couple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on veut prouver qu'elles sont adjacentes. Deux étapes pour cela :

- **Étape 1 : Les monotonies.**
  On commence par prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonies opposées. Dans la suite, on suppose qu'on a prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
- **Étape 2 : Petit jeu avec $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**
  Deux possibilités classiques :
  1. On arrive à prouver que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On peut alors affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et c'est terminé !
  2. On n'arrive pas à prouver que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 mais on parvient à démontrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive. Cela suffira pour conclure car cela entraîne que, pour tout entier naturel n, on a :
  $$v_n \leqslant v_0 \quad \text{et} \quad u_n \leqslant v_n$$
  puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par v_0 (et pas par v_n, on ne majore pas par une quantité dépendant de n ! ! ! ! !), elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On procède de même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour prouver que ces suites sont adjacentes, il reste à démontrer qu'elles convergent vers la même limite. Cela peut se faire en passant à la limite dans les relations définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'obtenir des relations entre $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n)$.

■ **Mise en garde :**

Des suites peuvent converger vers la même limite sans être adjacentes. Citons par exemple $\left(2-\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2-\dfrac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers 2 mais qui ne sont pas adjacentes (puisqu'elles sont toutes les deux croissantes).

■ ***Exemple* :**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limite après avoir étudié la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par récurrence, on prouve aisément que u_n existe, $u_n > 0$, v_n existe et $v_n > 0$. Soit n un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n \\ &= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}. \end{aligned}$$

Au tour de l'autre suite maintenant :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{2}. \end{aligned}$$

On voit donc que les éventuelles monotonies de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vont dépendre uniquement du signe de $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - \frac{u_n+v_n}{2} \\ &= \frac{4u_nv_n - u_n^2 - v_n^2 - 2u_nv_n}{2(u_n+v_n)} \\ &= -\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \end{aligned}$$

Ceci prouve donc que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n \leqslant v_n$. Comme $u_0 \leqslant v_0$, cette dernière relation est valable pour tout entier naturel n.

De $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n - v_n \leqslant 0$ et des calculs effectués sur $v_{n+1} - v_n$ et $u_{n+1} - u_n$, on déduit :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \leqslant 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone. On note L_v sa limite.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \leqslant v_0$. D'autre part, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0... ne pas mettre v_n qui dépend de n et ne peut donc pas jouer le rôle de majorant), elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone. On note L_u sa limite.

La relation (valable pour tout entier naturel n), $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ donne (par unicité de la limite de la suite $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) :

$$L_v = \frac{L_u + L_v}{2}.$$

Cela entraîne $2L_v = L_u + L_v$ puis $L_u = L_v$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\frac{u_n+v_n}{2} - u_nv_n \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite stationnaire. Elle converge donc vers u_0v_0, i.e. 2. Elle converge aussi vers L_uL_v, i.e. L_u^2. Par unicité de la limite, on a donc :

$$L_u^2 = 2.$$

Or L_u est positif, on peut l'affirmer en passant à la limite dans les inégalités $u_n \geqslant 0$. L_u vaut donc $\sqrt{2}$.

MÉTHODE 16 : Utiliser le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

■ **Principe :**

On étudie un couple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on imagine que l'on a prouvé qu'elles sont adjacentes. On peut alors affirmer deux choses :

1. elles convergent toutes les deux et leur limite est la même ;
2. pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant L \leqslant v_n$.

Cet encadrement est en général très intéressant et permet de débloquer des situations.

■ ***Exemple* :**

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\textit{Pour tout entier naturel non nul } n\textit{, on a : } u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que ces suites convergent vers la même limite. On admet que cette limite est $\frac{\pi^2}{6}$. En déduire un encadrement de π et un programme donnant une approximation de π à ε près.

Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

ce qui permet d'affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante. On a de plus $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite. On admet que ces suites convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$, on a donc, pour tout entier naturel non nul n, les inégalités suivantes :

$$u_n \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant v_n$$

ce qui donne l'encadrement suivant valable pour pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$$

On en déduit le programme suivant pour approximer π :

```
import numpy as np
def approx (e):
    u,v,k=1,2,1
    while v-u>e:
        k+=1
        u +=1/( k **2)
        v=u+1/k
    return np. sqrt (6* u)
```

MÉTHODE 17 : Prouver la bonne définition d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$"

■ **Principe :**

- On ne prouve la bonne définition que s'il y a un problème. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on peut sauter cette étape ! Si f n'est définie que sur une partie D de $\mathbb{R}$, il faut prouver, par récurrence, que tous les u_n sont dans D : C'est le cas si f fait intervenir des fonctions dangereuses (présence de dénominateur, de racine, de logarithme...).
- Pour cela, on va faire une récurrence (qui sera le raisonnement de base avec ces suites). Pour tout entier naturel k, on introduit l'hypothèse $\mathcal{P}_k$ suivante :

$$\mathcal{P}_k : \text{"}u_k \text{ existe et appartient à } E\text{"}.$$

On va prouver cette propriété par récurrence. E est un ensemble qu'il faut intuiter : ce n'est pas toujours l'ensemble D de définition de f, cela ne peut être qu'une sous-partie de cette ensemble. Ce E doit être un ensemble tel que, si u_n appartient à E alors u_{n+1} appartiendra aussi à E.

■ ***Exemple* :**

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = v_0 = 2$ et par, pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \ln(v_n + 2)$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles bien définies ?

- On constate que : $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et puis, et puis c'est tout ! u_2 n'existant pas, on ne peut pas aller plus loin ! $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas définie ! Inutile de l'étudier, d'essayer de prouver une éventuelle convergence, cela n'aurait aucun sens !
- Pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on introduit pour tout entier naturel n l'hypothèse $P(n)$ suivante : "v_n existe et est supérieur à 1".
  $P(0)$ vraie est une évidence puisque $v_0 = 2$.
  Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. D'après $P(n)$, v_n existe et est supérieur à 1. Ainsi, $v_n + 2$ est supérieure à 3 et donc $\ln(v_n + 2)$ (i.e. v_{n+1}) existe et est supérieur à 1 puisque $\ln(3)$ est supérieur à 1. $P(n + 1)$ est donc vraie.
  Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était bien définie. Vous constaterez qu'on ne parvient pas à prouver l'hérédité si on ne se donne que cette hypothèse : "v_n existe et $v_n > -2$".

MÉTHODE 18 : **Trouver les éventuelles limites d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$"**

■ **Principe :**

On prend une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f une fonction continue. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L alors $f(L) = L$ (résultat hors-programme, il faut donc le redémontrer à chaque utilisation comme dans l'exemple). Pour trouver les éventuelles limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit donc de résoudre l'équation (E) suivante :

$$f(x) = x \quad (E)$$

d'inconnue x élément de l'ensemble de définition de f. Les limites candidates sont les solutions de cette équation ainsi que deux autres candidats que sont $-\infty$ et $+\infty$.

■ **Preuve :**

Il faut savoir démontrer ce résultat car il n'est pas explicitement au programme. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on appelle L sa limite. On sait alors que $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers L et, par continuité de f, que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(L)$. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont les mêmes suites, on peut affirmer, en invoquant l'unicité de la limite, que $L = f(L)$.

■ **Mise en garde :**

Si (E) n'admet pas de solution, on peut conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger. Par contre, si (E) admet des solution, on ne peut pas conclure pour autant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Il se pourrait très bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$, $-\infty$ ou n'admette pas du tout de limite : Si a est une solution de (E) (voire même la solution de (E)), on n'est pas sûr que a soit la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par contre si b n'est pas solution de (E), on peut affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers b.

■ **Astuce :**

Si (E) admet plusieurs solutions et que l'on veut restreindre la liste des limites potentielles, on utilise le fait que si, au-delà d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à un certain intervalle $[a, b]$ alors, nécessairement, l'éventuelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut qu'appartenir à l'intervalle $[a, b]$ (cela se prouve par passage à la limite dans les inégalités en faisant l'hypothèse que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge). Cela permet souvent d'éliminer des solutions parasites !

■ ***Exemple* :**

Donner les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* u_0 *est un élément de* $[0, 1]$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne pose pas de souci de définition. Si jamais elle converge vers une limite L alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L mais aussi, par opérations, vers $L - L^2$. On en déduit, par unicité de la limite que :

$$L = L - L^2$$

soit $L = 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou bien $-\infty$ ou bien 0 ou bien n'admet pas de limite du tout.

MÉTHODE 19 : **Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f croissante**

■ **Principe :**

Le plan de bataille sera toujours le même. Vous n'avez pas besoin de le connaître par cœur car vous serez accompagnés par quelques (disons 2/3) questions intermédiaires. Voici le plan :

1. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous les u_n (au-delà d'un certain rang éventuellement) sont dans D avec D un ensemble sur lequel f est croissante.
2. On prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Pour cela, on a besoin que du signe de $u_1 - u_0$. Deux cas se présentent alors :
   (a) Si $u_1 \geqslant u_0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .
   (b) Si $u_1 \leqslant u_0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante .
   Ces résultats se prouvent par récurrence (cf. exemple).
3. On applique le théorème de la limite monotone pour démontrer la convergence de notre suite. Si elle est croissante (on vous laisse réfléchir au cas décroissant), il serait bon de prouver (par récurrence) qu'elle est majorée. Si on a un élément L de D tel que $f(L) = L$ et $u_0 \leqslant L$, il suffit de changer un peu la première proposition (celle démontrant l'existence), notre première hypothèse de récurrence sera alors :

   u_n existe, appartient à D et est inférieur à L.

   Si $u_n \leqslant L$ alors par croissance de f, on a :
   $$f(u_n) \leqslant f(L)$$
   soit $u_{n+1} \leqslant L$. d'où l'hérédité !
4. On résout l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x élément de D et on explique (cf méthode précédente) le rapport avec la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ ***Exemple* :**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : u_0 est un élément de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone et qu'elle converge vers un réel L tel que $L = L - L^2$ puis conclure.

Soit $f : x \mapsto x - x^2$. f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Le signe de f' nous donne ce tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On voit sur ce tableau (ou sur un graphique) que u_1 et le reste seront dans $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$. On peut profiter de la croissance de f à partir du rang 1. On regarde le signe de $u_2 - u_1$ pour savoir ce qu'on va démontrer (cf. initialisation).

Pour tout entier naturel non nul n, soit l'hypothèse $P(n)$ suivante :

$$"0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}".$$

D'après le tableau de variations, on a bien $0 \leqslant u_2 \leqslant \frac{1}{4}$ et $u_1 \leqslant \frac{1}{4}$. D'autre part, on a :

$$u_2 - u_1 = -u_1^2$$

donc $u_2 - u_1 \leqslant 0$. $P(1)$ est donc vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n. D'après $P(n)$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4}$ donc, par croissance de f sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{4}\right)$$

ce qui donne $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{3}{16}$. $P(n+1)$ est donc vraie puisque $\frac{3}{16}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$.

Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était décroissante et minorée. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note L sa limite. On a vu (cf. exemple de la méthode précédente) que $L = 0$.

MÉTHODE 20 : **Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f décroissante**

■ **Principe :**

Le plan de bataille sera toujours le même dans le cas décroissant. Ce cas n'est pas évident du tout, vous seriez guidés (encore plus que dans le cas "f croissante"). On se raccroche au cas précédent en remarquant que $f \circ f$ est alors croissante. On peut refaire comme dans la méthode précédente mais appliquée non plus à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais à $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ car, pour tout entier naturel n, on remarque que :

$$u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1}).$$

Par exemple, $(f \circ f)(u_0) = f(u_1)$ donc $(f \circ f)(u_0) = u_2$. Le plan de bataille est :

1. On démontrer (par récurrence) que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones (et de monotonie opposée). La monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par le signe de $u_2 - u_0$ (si c'est positif, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, sinon, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), la monotonie de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est l'opposée de celle de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. De nouveau, dans votre preuve par récurrence, utilisez uniquement la croissance de $f \circ f$ dans la manipulation d'inégalité, cela sera plus efficace.
2. On résout l'équation $(f \circ f)(x) = x$ (d'inconnue x réel) afin de trouver la liste des limites potentielles des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On utilise après fréquemment le théorème de la limite monotone pour conclure sur les convergences éventuelles des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour revenir à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on conclut à l'aide de la proposition suivante : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers L. Ainsi, si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, d'après la proposition rappelée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera et convergera vers cette limite. Si nos deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent mais pas vers la même limite ou bien si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergera.

On peut noter qu'il est classique de faire intervenir la notion de suites adjacentes puisque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie opposée. Il suffit alors de prouver que $(u_{2n+1} - u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour affirmer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers une même limite L. D'après la proposition rappelée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers L.

■ ***Exemple* :**

On veut étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto \frac{x+20}{4x+3}.$$

1. *Montrer que f est décroissante.*
2. *Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.*
3. *Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
4. *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par quotient (son dénominateur ne s'annule pas) et on a :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto -\dfrac{77}{(4x+3)^2} \end{cases}$$

Par quotient, $f' < 0$, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ d'où ce joli tableau :

x	0	$+\infty$
Variation de f	$20/3$ $\searrow$	$1/4$

- On prouve rapidement la bonne définition de notre suite : on introduit, pour tout entier naturel n, l'hypothèse $Q(n)$ suivante :

$$Q(n) : \text{"}u_n \text{ existe et appartient à } \left[\frac{1}{4}, \frac{20}{3}\right]\text{"}.$$

$Q(0)$ vraie est une évidence puisque $u_0 = \dfrac{1}{4}$. Supposons $Q(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. D'après $Q(n)$, u_n existe et appartient à $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{20}{3}\right]$, on en déduit que, comme u_n n'est pas $-\dfrac{3}{4}$, u_{n+1} existe bien et, d'après le tableau de variation précédent, u_{n+1} appartient à $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{20}{3}\right]$. $Q(n+1)$ est donc vraie si $Q(n)$ l'est.
Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était bien définie.
- Pour tout entier naturel n, soit l'hypothèse $P(n)$ suivante :

$$\text{"}u_{2n} \leqslant u_{2n+2}\text{"}.$$

On obtient que $u_2 \approx 1,07$. Or $u_0 = \dfrac{1}{4}$, $P(0)$ est donc vraie.
Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. D'après $P(n)$, $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ donc, par croissance de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}^+$ (invocable car u_{2n} et u_{2n+2} sont positifs) , on a :

$$(f \circ f)(u_{2n}) \leqslant (f \circ f)(u_{2n+2})$$

ce qui donne $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$. $P(n+1)$ est donc vraie si $P(n)$ l'est.
- Par principe de récurrence, on a donc prouvé que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante et majorée (d'après la première récurrence). Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note L sa limite. On sait que L appartient à $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{20}{3}\right]$ par passage à la limite dans les inégalités suivantes vues avant :

$$\frac{1}{4} \leqslant u_{2n} \leqslant \frac{20}{3}$$

Par unicité de la limite, de $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$, on déduit l'égalité $L = (f \circ f)(L)$ et donc $4L\dfrac{L+20}{4L+3} + 3 = \dfrac{L+20}{4L+3} + 20$, soit $\dfrac{81L+80}{16L+89} = L$ qui donne $16L^2 + 8L - 80 = 0$ et donc finalement $L = 2$ ou $L = -\frac{5}{2}$. Comme L appartient à $\left[\frac{1}{4}, \frac{20}{3}\right]$, on peut affirmer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

- De la même façon, on prouve que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2. On peut alors affirmer, comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 2, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers 2.

MÉTHODE 21 : **Étude d'une suite du type "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec f contractante**

■ **Principe :**

Comme dans les cas f décroissante, vous seriez guidés pour le cas f contractante (vocabulaire hors-programme, cela signifie que f' existe et est bornée par M avec M un réel positif strictement inférieur à 1). Voici le plan de bataille quand on est dans le cas où on a trouvé un intervalle $[a, b]$ contenant tous les u_n au-delà d'un certain rang et tel que f soit contractante dessus :

1. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous les u_n au-delà d'un certain rang sont dans $[a, b]$.
2. On cherche le réel L de $[a, b]$ tel que $f(L) = L$. (ce réel existe et est unique car f est contractante mais ce théorèmes est hors-programme,.. Contentez-vous de résoudre l'équation $f(x) = x$).
3. On applique l'égalité des accroissements finis, ce qu'on peut faire car u_n et L sont deux élément de $[a, b]$. Si $u_n \neq L$, il existe un réel c dans $]u_n, L[$ si $u_n < L$ ($]L, u_n[$ si $u_n > L$) tel que :

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(u_n) - f(L)}{u_n - L} \\ &= \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de signaler que $|f'(c)| \leqslant M$ pour obtenir :

$$|u_{n+1} - L| \leqslant M \times |u_n - L|.$$

Par récurrence, on obtient donc, pour tout entier naturel n, cette inégalité :

$$|u_n - L| \leqslant M^n \times |u_0 - L|.$$

4. Comme $|M|$ est strictement inférieur à 1, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (M^n \times |u_0 - L|) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers L.

■ ***Exemple* :**

On veut étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : u_0 est quelconque et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Fixons n un entier naturel.

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.*
2. *Montrer qu'il existe un seul réel x tel que $\cos(x) = x$. On le notera L.*
3. *Montrer que : $|u_{n+1} - L| \leqslant \sin(1) \times |u_n - L|$.*
4. *En déduire que : $|u_n - L| \leqslant (\sin(1))^n \times |u_0 - L|$.*
5. *En déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie est une évidence. Ajoutons aussi que tous les u_n sont tous dans $[-1, 1]$ pour tout entier naturel non nul.

2. On étudie la fonction : $g : x \mapsto \cos(x) - x$ afin de prouver que l'équation (E) suivante :

$$\cos(x) = x \quad (E)$$

d'inconnue x réel a une unique solution. Déjà, (E) ne peut pas avoir de solution sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ puisqu'un $\cos(x)$ est toujours un élément de $[-1, 1]$. Pour des raisons de signe, il n'y a pas de solution sur $[-1, 0[$. Il nous reste à mener l'étude sur $[0, 1]$. Par somme, g est strictement décroissante sur cet intervalle. g est de plus continue. g réalise donc, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $[0, 1]$ sur $[g(1), g(0)]$, c'est-à-dire sur $[\cos(1) - 1, 1]$. 0 appartenant à $[\cos(1) - 1, 1]$, on en déduit que (E) a effectivement une seule solution. On la note L.

3. Pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a :

$$|\cos'(x)| \leqslant \sin(1).$$

Vous noterez qu'on n'a pas majoré par 1 : Ce n'est pas faux mais 1 serait trop grand et nous empêcherait de conclure ! Soit n un entier naturel non nul. On applique l'égalité des accroissements finis, ce qu'on peut faire car u_n et L sont deux élément de $[-1, 1]$. Si $u_n \neq L$, il existe un réel c dans $]u_n, L[$ si $u_n < L$ ($]L, u_n[$ si $u_n > L$) tel que :

$$\begin{aligned} \cos'(c) &= \frac{\cos(u_n) - \cos(L)}{u_n - L} \\ &= \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \text{ par définition de } L. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de signaler que $|\cos'(c)| \leqslant \sin(1)$ pou obtenir :

$$|u_{n+1} - L| \leqslant \sin(1) \times |u_n - L|.$$

Deuxième ca, si $u_n = L$ alors $u_{n+1} = L$ (par définition de L) et donc on a $\sin(1) \times |u_n - L| = 0$ et $|u_{n+1} - L| = 0$. L'inégalité proposée est donc évidente dans ce cas puisque $0 \leqslant 0$.

4. Par récurrence (récurrence à rédiger), pour tout entier naturel non nul n, on établit ce résultat :

$$|u_n - L| \leqslant (\sin(1))^{n-1} \times |u_1 - L|.$$

5. $|\sin(1)| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sin(1)^{n-1} \times |u_1 - l|\right) = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers L.

MÉTHODE 22 : **Prouver que $\sum u_k$ est une somme de Riemann et s'en servir**

■ **Rappel :**

On rappelle que, si f une fonction continue sur $[0,1]$, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \text{ existent et valent } \int_0^1 f(t)\,dt.$$

$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les sommes de Riemann associées à f, on les illustre ainsi :

Phil-eps-converted-to.pdf

Supposons f positive (hypothèse non nécessaire mais qui facilite la compréhension graphique du phénomène). $\frac{1}{n}$ est la largeur des rectangles et $f\left(\frac{k}{n}\right)$ la hauteur du k-ième rectangle. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ est la somme des aires des rectangles représentés. On imagine facilement qu'en augmentant le nombre de rectangles (i.e. n), on s'approche de l'aire sous la courbe, soit de $\int_0^1 f(t)\,dt$. On peut faire la même remarque pour $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

■ **Principe :**

Quand on manipule une somme sur k variant de 0 à $n-1$ ou de 1 à n et qu'on cherche à savoir si cette somme converge et calculer sa limite (sans expliciter la somme), on peut penser à une somme de Riemann. Pour cela, on factorise d'abord par $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(nu_k).$$

On cherche ensuite à faire apparaître le terme général (nu_k de l'expression précédente) de la somme comme étant une fonction de $\frac{k}{n}$ et on explicite clairement cette fonction f. On va donc créer des "blocs" de $\frac{k}{n}$ (ne pas laisser de k ou de n isolé), ils vont devenir en quelque sorte la variable de la fonction f qu'on cherche à expliciter. Si la fonction f qu'on vient d'expliciter est continue sur $[0,1]$,on peut affirmer d'après le cours que notre somme converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale (ce qui peut s'avérer particulièrement pénible !).

■ **Cas particulier :**

Si vous n'avez pas une somme mais des produits, des puissances, des factorielles, pensez, si cela est possible, à utiliser un ln pour créer votre somme !

■ **Mise en garde :**

Quand on écrit $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, f est une fonction qui ne peut pas dépendre de n (Sinon, quand vous augmentez n, vous augmentez le nombre de rectangle mais vous changez aussi de fonction !). Faites attention car certaines sommes semblent être des sommes de Riemann mais n'en sont pas !

■ ***Exemple*** **:**

Déterminer, si elle existe, la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, la suite* $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit n un entier naturel non nul, v_n est strictement positif et on a :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \frac{1}{n} \times \ln\left(\frac{A}{B}\right) \text{ avec } A = \prod_{k=1}^{2n} k \text{ et } B = n^n \prod_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n} \times \ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{k}{n}\right)\right) \text{ par télescopage} \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f : x \mapsto \ln(1+x).
\end{aligned}$$

f étant continue sur $[0,1]$ donc $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, d'après le cours sur les sommes de Riemann, vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ i.e. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$ soit, après calcul, $2\ln(2)-1$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\exp(2\ln(2)-1)$, soit $\dfrac{4}{e}$.

C) Révisons efficacement l'analyse de base

MÉTHODE 23 : Prouver qu'une équation a des solutions

■ **Principe :**
Voici deux idées qui vous permettront de prouver qu'une équation a (ou non) des solutions :

- **On la résout !**
  C'est la base (à essayer en premier), on essaye tout simplement de résoudre notre équation, ce qui est facile si c'est une équation du second degré ou une équation faisant intervenir une fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques (ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x \mapsto x^2$...). Si cela n'aboutit pas, passez rapidement à la suite !
- **Introduire une fonction**
  On introduit une fonction f de façon à ce que notre équation s'écrive $f(x) = 0$ (0 n'est pas obligatoire, on peut toujours se ramener à ce cas. Ce qu'il ne faut pas, c'est une quantité dépendant de la variable dans le second membre). Après, deux tactiques (Théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection continue), cela dépend si on veut avoir le nombre précis de solution ou juste savoir qu'il y en a.
  - Si on veut juste prouver qu'il y a une solution alors le théorème des valeurs intermédiaires suffit et répondra rapidement à la question. On prouve la continuité de f (pas besoin d'avoir les variations de f pour ce théorème) puis on cherche deux réels a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé. On pourra alors conclure que notre équation a au moins une solution.
  - Si on veut le nombre précis de solution alors on va utiliser le théorème de la bijection continue. On prouve la continuité et la stricte monotonie de f, on explicite (en regardant sur le tableau de variation de f) l'ensemble d'arrivée de f. Pour conclure sur le nombre de solution de notre équation, il suffit de voir combien de fois 0 apparaît dans cet ensemble d'arrivée.

■ ***Exemple* :**

Soient n un entier naturel non nul et (E_n) l'équation suivante d'inconnue x :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} = 1.$$

Déterminer le nombre de solutions de (E_n).

On veut compter le nombre de solutions, on va donc partir sur du théorème de la bijection continue. On introduit la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+2n} - 1$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash \{0; -1; \cdots; -2n\}$ (ensemble que l'on va noter A) par quotient et somme et, pour tout réel x de A, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+2n)^2}.$$

Par somme, f' est donc strictement négative (Ne pas conclure pour autant que f est strictement décroissante car A n'est pas un intervalle) ce qui justifie ce tableau de variations :

x	$-\infty$		$-2n$		$-2n+1$	$\cdots$	-2		-1		0		$+\infty$
	-1 ↘ $-\infty$		$\|\|$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$\|\|$	$\cdots$	$\|\|$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘ -1	

On vous laisse justifier toutes les limites, poursuivons :

- Soit $k \in \{-2n; -2n+1; \cdots; -1\}$. f est continue et strictement décroissante sur $]k; k+1[$ donc d'après le théorème de la bijection continue, f établit une bijection de $]k; k+1[$ sur $\left] \lim\limits_{\substack{x \to k+1 \\ x < k+1}} (f(x)); \lim\limits_{\substack{x \to k \\ x > k}} (f(x)) \right[$ i.e. $\mathbb{R}$. Or 0 est un réel, il existe donc un unique x_k dans $]k; k+1[$ tel que $f(x_k) = 0$.
- Pour les mêmes raisons, f établit une bijection de $]-\infty; -2n[$ sur l'intervalle $]-\infty; -1[$. Or $-1 < 0$ donc 0 n'appartient pas à $]-\infty; -1[$ et (E_n) n'a pas de solution sur $]-\infty; -2n[$.
- Et toujours pour les mêmes raisons, f établit aussi une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-1; +\infty[$. Or 0 appartient à $]-1; +\infty[$ donc (E_n) a une unique solution sur $]0; +\infty[$.

On n'a plus qu'à compter : (E_n) a exactement $2n+1$ solutions.

MÉTHODE 24 : **Savoir résoudre une inéquation**

■ **Principe :**

Il est très fréquent en analyse d'avoir à résoudre une inéquation... ne serait-ce que pour avoir le signe d'une dérivée d'une fonction dont on veut les variations. Quelques idées pour résoudre une inéquation :

- **On la résout !**
  On essaye tout simplement de résoudre notre inéquation ce qui est facile si c'est une inéquation du premier ou du second degré ou une inéquation faisant intervenir des fonction qu'on peut détruire grâce à des réciproques strictement monotones (ln et exp, $\sqrt{\cdot}$ et $x \mapsto x^2$...) Si cela n'aboutit pas, passer à la suite !
- **Introduire une fonction**
  On introduit une fonction f de façon à ce que notre inéquation s'écrive $f(x) \geqslant 0$. Si f est dérivable, on va chercher ses variations en trouvant le signe de f' (Encore une nouvelle inéquation !). Si le signe de f' est délicat à obtenir, on peut passer à f''... Pensez bien à factoriser et à ne pas tout dériver mais uniquement par petits blocs.

■ **Mise en garde :**

Les propositions qui permettent de conclure sur les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée sont valables sur un intervalle. Prenons par exemple la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} .$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle) et sa dérivée est nulle. Pourtant, f n'est pas constante !

■ ***Exemple* :**

> *Étudier les variations de* $f : x \mapsto x^2 \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
>
> f est impaire (à prouver rapidement), il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit et composée. On a :
>
> $$f' : x \mapsto 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-x^2}{1+x^2}.$$
>
> Autant dire que le signe de f' n'est pas évident à obtenir, explicitons f'' :
>
> $$f'' : x \mapsto 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-2x}{1+x^2} + \frac{-2x(1+x^2)+2x^3}{(1+x^2)^2}.$$
>
> Quelle horreur !!! Factorisons avant de dériver. Pour tout réel strictement positif x, on a :
>
> $$f'(x) = xh(x) \text{ avec } h : x \mapsto 2 \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2}.$$
>
> h est dérivable par produit sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel strictement positif x, on a :
>
> $$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{2}{x^2+1} + \frac{-(1+x^2)+2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{3+x^2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que h' est strictement négative et donc que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x)) = 0$ car :

- On a $\dfrac{x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = 0$.
- Par composition, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 0$.

On en déduit que h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par produit, f' aussi sur $\mathbb{R}_+^*$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ par imparité).

MÉTHODE 25 : Trouver les asymptotes

■ **Principe :**

Voici les quelques étapes à suivre pour étudier le comportement en l'infini de f :

- **Étape 1 :** On commence par calculer $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x))$.
  Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x))$ existe et est finie alors, en notant L cette limite, C_f admet en l'infini une asymptote horizontale d'équation $y = L$. On arrête alors ici notre étude. Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x))$ est infinie alors on passe à la prochaine étape.
- **Étape 2 :** On calcule ensuite $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$.
  - Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$ alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. On arrête alors ici notre étude.
  - Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ est infinie alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. On arrête alors ici notre étude.
  - Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ existe et est finie alors, on note m cette limite et on passe à la prochaine étape.
- **Étape 3 :** On finit par le calcul de $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$.
  - Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$ est infinie alors C_f admet en l'infini une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = mx$. On arrête alors ici notre étude.
  - Si $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$ existe et est finie alors, en notant n cette limite, C_f admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y = mx + n$.

■ ***Exemple* :**

Étudier le comportement asymptotique de $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{2x-6}$.

On suit les différentes étapes. On évalue d'abord $\lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x))$, cela donne $+\infty$. Après, on a $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{2}$. Un dernier calcul, $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)$ valant $\frac{3}{2}$, on peut finalement affirmer que C_f, courbe représentative de f, admet en l'infini une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

D) Révisons efficacement l'intégration

MÉTHODE 26 : **Savoir réaliser une intégration par parties**

■ **Principe :**

Notons U une primitive de u et V une primitive de v. Quand on veut évaluer $\displaystyle\int_a^b u(t)v(t)dt$ par intégration par parties, il faut penser à comparer les trois quantités suivantes :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt, \int_a^b U(t)v'(t)dt \text{ et } \int_a^b V(t)u'(t)dt.$$

Si l'une des deux dernières intégrales semblent plus évidentes à évaluer que $\displaystyle\int_a^b u(t)v(t)dt$ alors on procède à une intégration par parties. Pour cela, on exprime ce qu'on veut intégrer sous forme d'un produit (quitte à écrire notre intégrande $f(t)$ sous la forme $1 \times f(t)$) :

- L'un des deux termes jouera le rôle de u', on va l'intégrer.
- L'autre jouera le rôle de v, on va le dériver.

C'est à vous de choisir judicieusement la partie de la fonction que vous souhaitez dériver et celle que vous voulez intégrer. Il reste alors à rappeler que u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration et à calculer $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt$ car on sait que :

$$\int_a^b u'(t) \times v(t)dt = [u(t) \times v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)dt.$$

Trois cas classiques d'intégration par parties :

- On veut se débarrasser d'un polynôme. On le dérive, cela abaisse son degré. S'il est de degré n, on fera donc n intégrations par parties pour arriver à une constante.
- On veut se débarrasser d'une fonction dont la dérivée est plus simple que la fonction d'origine. C'est le cas de ln et de arctan (dont les dérivées sont des fractions rationnelles).
- On veut faire une récurrence, la plupart des formules de récurrences avec des intégrales se démontrent par intégration par parties.

■ ***Exemple*** **:**

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)dx.$

L'astuce qu'on va utiliser vous permettra de trouver, de la même manière, une primitive de ln. Il est plus simple de manipuler $\arctan'$ que arctan lui-même. On veut donc le dériver dans une IPP mais qui va -t-on intégrer ? Il n'y a pas de produit ! Si, il suffit d' interpréter $\arctan(x)$ comme étant le produit $1 \times \arctan(x)$. $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, on obtient donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(x)dx &= [t \times \arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\
&= \arctan(1) - \frac{1}{2} \times \left[\ln\left(|1+t^2|\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \ln\left(\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

MÉTHODE 27 : Savoir réaliser un changement de variable

■ **Principe :**

Pour calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)dt$, avec $g : K \to \mathbb{R}$, et effectuer le changement de variable $x = u(t)$, on suit ces étapes :

1. On prouve que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K (K désignant le segment $[\alpha, \beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ et le segment $[\beta, \alpha]$ si $\beta \leqslant \alpha$).
2. On dit que $dx = u'(t)dt$, on fait "apparaître ce futur dx" dans notre intégrande en factorisant par $u'(t)$ et en obtenant pour le reste une fonction uniquement de $u(t)$. On souhaite avoir :
$$g(t) = f(u(t))u'(t).$$
3. $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$ est donc $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)dt$. On effectue le changement de variable en remplaçant les $u(t)$ par des x, en changeant les bornes et en transformant $u'(t)dt$ en dx. Notre intégrale devient $\displaystyle\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$.

■ ***Exemple* :**

Calculer $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\exp(2t)}{1 + 2\exp(2t) + \exp(4t)}dt$.

Cette intégrale existe car $t \mapsto 1 + \exp(4t)$ ne s'annule pas sur $[0; 10]$. On introduit les fonctions suivantes
$$f : x \mapsto \frac{1}{2(1 + x^2)} \text{ et } u : t \mapsto \exp(2t).$$
u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 10]$, $u([0, 10]) \subset [1, \exp(20)]$, f est, par quotient, continue sur $[1, \exp(20)]$. On va pouvoir faire le changement de variable $x = \exp(2t)$:
$$\begin{aligned}\int_0^{10} \frac{\exp(2t)}{1 + \exp(4t)}dt &= \int_0^{10} \frac{1}{2 \times \left(1 + (\exp(2t))^2\right)} \times 2\exp(2t)dt \\ &= \int_0^{10} f(u(t)) \times u'(t)dt \\ &= \int_{\exp(0)}^{\exp(20)} \frac{1}{2(1 + x^2)}dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan(\exp(20)) - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

MÉTHODE 28 : Savoir intégrer une fonction rationnelle

■ **Cas particulier :**

Commençons par des fonctions rationnelles simples :

- Pour $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)}$, une primitive est $x \mapsto \ln(|x-a|)$.
- Pour $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$, une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$ si n est un entier différent de 1.
- On intègre $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$ (α réel non nul) en $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha} \times \arctan\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.
- Pour intégrer $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$, on va distinguer les cas suivant le signe de Δ avec Δ le discriminant de P avec $P : x \mapsto x^2+px+q$:
  1. Si Δ est nul, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ avec x_0 la racine double de P, une primitive est alors $x \mapsto \dfrac{1}{x_0-x}$.
  2. Si Δ est strictement positif, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est $x \mapsto \alpha\left(\dfrac{1}{x-x_1} - \dfrac{1}{x-x_2}\right)$ avec α réel à déterminer, x_1 et x_2 les racines réelles de P. Pour déterminer α, il suffit de mettre au même dénominateur :
  $$\begin{aligned}\alpha \times \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) &= \alpha \times \frac{x-x_2-x+x_1}{(x-x_1)\times(x-x_2)}\\ &= \alpha \times \frac{x_1-x_2}{x^2+px+q}\end{aligned}$$
  puis d'identifier. On voit que α est $\dfrac{1}{x_1-x_2}$ (inutile de retenir ce résultat par cœur, retenez la démarche !). Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est alors :
  $$x \mapsto \alpha \ln\left(\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right).$$
  3. Si Δ est strictement négatif, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2}$ avec β et α des réels à déterminer. Pour déterminer β et α, il suffit d'utiliser la forme canonique :
  $$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$
  Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+px+q}$ est alors :
  $$x \mapsto \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{x+\beta}{\alpha}\right).$$

- $x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$: C'est de pire en pire. L'idée est de se ramener au cas précédent (une constante au numérateur et un polynôme de degré 2 au dénominateur) à l'aide de la linéarité de l'intégration. On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, on a :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{\frac{2b}{a}-p}{x^2+px+q}\right)$$

  Ne retenez pas la formule précédente mais simplement l'idée de faire apparaître, au numérateur, la dérivée du dénominateur. On voit apparaître $\dfrac{\frac{2b}{a}-p}{x^2+px+q}$ à intégrer (ce qu'on sait faire grâce au cas précédent) et $\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$ dont on reconnaît que $x \mapsto \ln\left(|x^2+px+q|\right)$ est une primitive.

■ **Principe :**

On prend maintenant une fonction rationnelle F quelconque. Si F n'est pas une fonction rationnelle vue dans le cas particulier, une mystérieuse théorie, la décomposition en éléments simples (théorie qui n'est pas au programme des BCPST), nous dit qu'on va pouvoir décomposer F sous la forme d'une somme de fractions fonctions rationnelles vues dans le cas particulier. Cette théorie de décomposition en éléments simples n'étant pas au programme, l'énoncé vous indiquera donc la forme à rechercher : Il vous restera uniquement à identifier des cœfficients.

■ ***Exemple* :**

On pose $I = \displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x\times(1+x+x^2)}dx$. Calculer I après avoir trouvé des réels a, b et c tels que, pour tout réel non nul x, on ait :

$$\frac{1}{x\times(1+x+x^2)} = \frac{a}{x} - \frac{bx+c}{1+x+x^2}.$$

Soit x un réel non nul, on note que $x\times(1+x+x^2)$ est non nul. Tout ce qu'on va manipuler dans la suite sera donc bien définie. On développe, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} - \frac{bx+c}{1+x+x^2} &= \frac{a+ax+ax^2-bx^2-cx}{x\times(1+x+x^2)}\\ &= \frac{(a-b)x^2+(a-c)x+a}{x\times(1+x+x^2)}.\end{aligned}$$

Ainsi, on voit que, pour tout réel x non nul, on a :

$$\frac{1}{x\times(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{1+x+x^2}.$$

Par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{10}\frac{1}{x}dx - \int_1^{10}\frac{x+1}{1+x+x^2}dx\\ &= \ln(10) - \int_1^{10}\frac{x+1}{1+x+x^2}dx.\end{aligned}$$

Il reste donc uniquement $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2}dx$ à calculer, suivons la méthode !
On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{10} \frac{x+1}{1+x+x^2}dx &= \frac{1}{2}\left(\int_1^{10} \frac{1+2x}{1+x+x^2}dx + \int_1^{10} \frac{1}{1+x+x^2}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\ln(|1+x+x^2|)\right]_1^{10} + \int_1^{10} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\frac{3}{4}}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{111}{3}\right) + \frac{2}{3}\int_1^{10} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{111}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)\right]_1^{10}
\end{aligned}$$

Après 53 heures de calcul, on obtient que :

$$I = -\frac{5\sqrt{3}\arctan(7\sqrt{3})}{9} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{100}{37}\right) + \frac{5\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{37}.$$

MÉTHODE 29 : Savoir encadrer une intégrale

■ **Principe :**

Pour encadrer une intégrale, on va se servir de la propriété de croissance de l'intégration. On suppose que a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$ et que f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ vérifiant que pour tout $t \in [a, b]$, on ait $f_1(t) \geqslant f_2(t)$. La propriété de croissance de l'intégration nous dit que l'on peut intégrer les inégalités, c'est-à-dire que :

$$\int_a^b f_1(t)dt \geqslant \int_a^b f_2(t)dt.$$

On commence d'abord par étudier notre fonction f qu'on désire intégrer, on en déduit un encadrement de f et, enfin on intègre cette inégalité (faire en sorte d'obtenir quelque chose facile à intégrer, cet encadrement peut être l'occasion de se débarrasser de termes gênants). Si on n'obtient pas ce que l'on souhaite, il faut chercher un encadrement plus fin de f et l'intégrer.

Ces notions servent dès qu'un exercice mélange inégalité et intégrale, en particulier si on veut faire appel aux gendarmes.

■ **Mise en garde :**

N'oubliez pas la condition des bornes ordonnées. Si $a > b$ et si, pour tout $t \in [b, a]$, on a l'inégalité $f_1(t) \geqslant f_2(t)$, on aura alors :

$$\int_a^b f_1(t)dt \leqslant \int_a^b f_2(t)dt.$$

■ ***Exemple* :**

Évaluer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$ *avec* $I_n = \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)dt$ *pour tout entier naturel* n.

Pour tout $t \in [0, 1]$, de la positivité sur $[0, 1]$ de $t \mapsto (1-t)^n$ et de la croissance et la positivité de exp, on en déduit :

$$0 \leqslant (1-t)^n \exp(t) \leqslant (1-t)^n e.$$

Par croissance de l'intégration, que l'on peut invoquer car les bornes sont dans l'ordre croissant $(0 < 1)$ et $t \mapsto (1-t)^n \exp(t)$ et $t \mapsto (1-t)^n e$ sont continues sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \exp(t)dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n edt$$

Cela donne en calculant ces intégrales :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{n+1}\right) = 0$, par le théorème des gendarmes, on peut donc affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$ existe et vaut 0.

MÉTHODE 30 : Intégrer une fonction dont l'expression change...

■ **Principe :**

Pour expliciter $\int_a^b f(t)dt$ avec f qui change d'expression sur l'intervalle d'intégration (Cas typiques : avec des fonctions continues par morceaux ou quand on a une valeur absolue), on va utiliser judicieusement la relation de Chasles de façon à intégrer sur des intervalles sur lesquels f a une expression constante. Ainsi, si on veut se débarrasser de la valeur absolue dans $\int_a^b |f(t)|dt$, on étudie le signe de la fonction f (et pas celle de $|f|$) puis on découpe notre intervalle d'intégration en sous-intervalle sur lequel f est de signe constant.

■ ***Exemple*** **:**

Calculer $\int_5^{-3} |t^2 - 3t + 2|dt.$

1 et 2 sont les deux racines de $X^2 - 3X + 2$ qui est de cœfficient dominant positif, on en déduit ce tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et par la relation de Chasles, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_5^{-3} |t^2 - 3t + 2|dt &= \int_5^{2} |t^2 - 3t + 2|dt + \int_2^{1} |t^2 - 3t + 2|dt + \int_1^{-3} |t^2 - 3t + 2|dt \\ &= \int_5^{2} (t^2 - 3t + 2)dt - \int_2^{1} (t^2 - 3t + 2)dt + \int_1^{-3} (t^2 - 3t + 2)dt\end{aligned}$$

ce qui donne -43 sans difficulté.

E) Révisons efficacement les équivalents et développements limités

MÉTHODE 31 : Obtenir un équivalent

■ **Rappel :**
Si f a un développement limité d'ordre n de la forme :

$$f(x) \underset{b}{=} a_p(x-b)^p + \cdots + a_n(x-b)^n + \mathrm{o}\left((x-b)^n\right)$$

avec p un entier inférieur à n et $a_p \neq 0$ alors :

$$f(x) \underset{b}{\sim} a_p(x-b)^p.$$

On dit qu'une fonction équivaut au premier terme non nul de son développement limité.

■ **Principe :**
On sait que les équivalents apprécient produits, quotients et puissances. Par contre, somme et composition posent problème (cela peut être vrai ponctuellement mais on ne le sait pas de manière générale) ! Pour pallier ces défauts, on peut **ponctuellement** utiliser les développements limités, on cherche un **tout petit** développement limité. Le premier terme non nul de ce petit développement limité est un équivalent recherché (cf. rappel).

■ **Mise en garde :**
Ne jamais écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ même si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)) = 0$. Ceci n'a pas de sens car écrire $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ signifie que $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ existe et vaut 1 (ce qui est faux si f est nulle et ce qui n'a pas de sens si g est nulle).

■ ***Exemple* :**

> *Trouver un équivalent en zéro de : $f : x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.*
>
> On a une somme de deux termes de même force, on ne sait pas a priori ce que cela donne comme équivalents. On va faire un développement limité :
>
> $$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$$
>
> ce qui donne
>
> $$\begin{aligned}\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) - 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \\ &\underset{0}{=} x + \mathrm{o}(x)\end{aligned}$$
>
> et donc : $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

MÉTHODE 32 : Pour le calcul de limite

■ **Rappel :**

Équivalents comme développements limités permettent de calculer des limites :

- Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to b}(g(x)) = L$ (L étant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) alors $\lim\limits_{x\to b}(f(x))$ existe et vaut aussi L.
- Si $f(x) \underset{b}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$ alors $\lim\limits_{x\to b}(f(x))$ existe et vaut a_0.

■ **Principe :**

Voici un tableau pour résumer les avantages et inconvénients de l'utilisation des développements limités ou des équivalents dans un calcul de limite :

Équivalents	**Développements limités**
Calcul rapide et élégant	Calcul lourd
Sommation généralement inexacte	Somme possible
Composition généralement inexacte	Composition possible
Adapté aux produits, quotients, puissances	Passe un peu partout

En résumé, quand vous cherchez à calculer une limite, si vous tombez sur une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, pensez aux équivalents. Si vous avez du mal à obtenir un équivalent, faites un léger détour par les développements limités (cf. méthode précédente) et revenez aux équivalents.

■ **Mise en garde :**

Pas de magie quand on utilise les équivalents. On ne dit pas qu'on remplace dans un calcul de limites f par g si $f(x) \sim g(x)$. La seule chose qu'on dit, c'est que si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to b}(g(x))$ existe et vaut L (la forme indéterminée a donc été levée) alors $\lim\limits_{x\to b}(f(x))$ existe aussi et vaut L.

Par exemple, on sait que $1 + \dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on ne peut pas dire pour autant que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) &= \lim_{x\to+\infty}(1^x)\\ &= \lim_{x\to+\infty}(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

En réalité, il faut remarquer que $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ est $\exp\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$. Comme $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit que $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ existe et vaut 1. Par composition de limites, la limite recherchée existe et vaut $\exp(1)$, soit e.

■ ***Exemple* :**

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{h(x)}$ avec $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x^3}$.

Soit x un réel. Sous réserve d'existence, on a :

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{h(x)} = \exp\left(\frac{1}{x^2+x^3} \times \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right).$$

C'est bien une forme indéterminée. Utilisons un peu les équivalents : on sait que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit :

$$\ln\left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)\right) \underset{0}{\sim} \frac{\sin(x)}{x} - 1$$

et donc, par quotient, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x^3} \times \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &\underset{0}{\sim} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x^2} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.\end{aligned}$$

Or $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - x}{x^3} &\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}. \\ &\underset{0}{\sim} -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x^3}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right) = -\frac{1}{6}$ puis, par continuité de exp en $-\frac{1}{6}$, on conclut que la limite recherchée vaut $\exp\left(-\frac{1}{6}\right)$.

MÉTHODE 33 : Avoir des dérivées

■ **Principe :**

Si on cherche à prouver que f est continue et dérivable en a alors un développement limité d'ordre 1 permet de répondre directement à ces deux questions car il est écrit dans votre cours que :

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}\,(x-a) \Rightarrow f \text{ est dérivable en } a, f(a) = a_0 \text{ et } f'(a) = a_1.$$

Cette méthode permet de prouver la dérivabilité de f. Il faut donc être en mesure de calculer le développement limité de f sans utiliser la formule de Taylor-Young (qui demanderait en hypothèse que f soit dérivable !).

■ **Mise en garde :**

- Si f admet un développement limité d'ordre zéro en a, on peut affirmer que f est continue en a. Avec l'ordre un en a, on peut affirmer que f est dérivable en a.
- Au-delà, les développements limités n'apportent pas plus d'information sur la régularité de f. Par exemple, si f admet un développement limité d'ordre 2 en a, on peut juste dire que f est dérivable en a, on n'est pas du tout sûr que f soit deux fois dérivable en a !

■ ***Exemple* :**

Étudier la continuité et la dérivabilité en zéro de la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} [-1;1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Sur $[-1;1] \setminus \{0\}$, ça ne pose pas de problème en invoquant la composition et dire que, si x appartient à cet ensemble, x ne s'annule pas et $1+x$ et $1-x$ sont positifs.

Pour répondre à la question, on a besoin d'un développement limité d'ordre 1 de f. On va partir sur un développement limité d'ordre 2 (car on va perdre un ordre avec la division par x), on a :

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \frac{x + \mathrm{o}\,(x^2)}{x} \\ &\underset{0}{=} 1 + 0 \times x + \mathrm{o}\,(x) \end{aligned}$$

f possède un développement limité d'ordre 1 en 0 donc f est continue et dérivable en 0, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

MÉTHODE 34 : **Avoir une tangente et même la position**

■ **Principe :**

Si f admet un développement limité au voisinage de b de la forme :

$$f(x) \underset{b}{=} a_0 + a_1\,(x-b) + a_k\,(x-b)^k + \mathrm{o}\left((x-b)^k\right)$$

avec k un entier supérieur à 2 et $a_k \neq 0$, on a alors les résultats suivants :

- La tangente en $(b, f(b))$ à C_f a pour équation : $y = a_0 + a_1(x-b)$.
- la position locale de la courbe C_f par rapport à son asymptote est obtenue en disant que :

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-b)) \underset{b}{\sim} a_k\,(x-b)^k$$

ce qui prouve que $x \mapsto f(x) - (a_0 + a_1(x-b))$ et $x \mapsto a_k\,(x-b)^k$ sont, au voisinage de b, du même signe.

Pour trouver l'expression de l'équation de la tangente et le positionnement local de C_f par rapport à sa tangente, il faut donc chercher un développement limité d'ordre au moins 2. Ce n'est pas sûr que cela suffise (si $a_2 \neq 0$, c'est bon. Sinon, il faut un ordre 3 puis 4 jusqu'à trouver le plus petit entier k strictement supérieur à 2 tel que $a_k \neq 0$). En pratique, pour éviter de recalculer un développement limité, on prend souvent un ordre 3 (ce ne serait vraiment pas de chance d'avoir a_2 et a_3 nuls !). Ne prenez pas un ordre trop élevé à la base, cela compliquerait inutilement vos calculs !

■ ***Exemple*** **:**

Faire l'étude locale en zéro de $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$.

On a :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\end{aligned}.$$

On en déduit que :

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

De là, on peut déduire que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc f est continue et dérivable en 0 et la tangente en $(0,0)$ à C_f a pour équation $y = x$. Du développement limité, on déduit que :

$$f(x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \text{ et donc : } f(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$$

Ainsi, $x \mapsto f(x) - x$ et $x \mapsto -\dfrac{x^3}{3}$ sont, au voisinage de 0, du même signe ce qui prouve que la courbe C_f est en-dessous de sa tangente à gauche de 0 et au-dessus à droite ($(0,0)$ est un point d'inflexion).

MÉTHODE 35 : **Avoir une asymptote et même la position**

■ **Principe :**

Même principe que précédemment. Les premiers termes du développements limités donnent l'équation de l'asymptote et le premier terme non nul suivant donne la position. On commence par chercher un développement limité en zéro de $g : x \mapsto x \times f\left(\frac{1}{x}\right)$. Avec cette fonction intermédiaire, cela nous permet de nous placer au voisinage de l'infini pour f. Si le développement limité de g est :

$$g(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right)$$

avec k un entier supérieur à 2 et $a_k \neq 0$ alors on aura :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} \frac{a_0}{x} + a_1 + a_k x^{k-1} + \mathrm{o}\left(x^{k-1}\right)$$

d'où : $f(x) \underset{\infty}{=} a_0 x + a_1 + a_k x^{1-k} + \mathrm{o}\left(x^{1-k}\right)$. On peut en déduire que :

1. l'asymptote à C_f existe et a pour équation : $y = a_1 + a_0 x$.

2. la position locale de la courbe C_f par rapport à son asymptote est obtenue en disant que :

   $$f(x) - (a_0 x + a_1) \underset{\infty}{\sim} a_k x^{1-k}$$

   ce qui prouve que $x \mapsto f(x) - (a_0 x + a_1)$ et $x \mapsto a_k x^{1-k}$ sont, au voisinage de l'infini, du même signe.

■ ***Exemple* :**

Soit $f : x \mapsto x \times \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Chercher le développement limité en 0 de la fonction $g : x \mapsto x \times f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire le comportement asymptotique de f en $+\infty$ (asymptote et position par rapport à l'asymptote).

On peut commencer par signaler que f est, par composition, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_\star^+$. On pourrait dériver f, obtenir son tableau de variations. Ici, on veut simplement son comportement asymptotique en $+\infty$. On introduit la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \times f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ soit } : g : x \mapsto \sqrt{1+x}.$$

On a donc : $g(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. De là, on peut déduire que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{+\infty}{=} x \times g\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} x \times \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}\left(x^{-2}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \mathrm{o}\left(x^{-1}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - (x + \frac{1}{2})) = 0$ car $f(x) - (x + \frac{1}{2}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x}$. On peut donc affirmer que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à C_f (la courbe représentative de f).

De plus, de cet équivalent, on déduit que $x \mapsto f(x) - (x + \frac{1}{2})$ et $x \mapsto -\frac{1}{8x}$ ont, au voisinage de $+\infty$, le même signe. $x \mapsto f(x) - (x + \frac{1}{2})$ est donc, au voisinage de $+\infty$, négatif. Cela permet d'affirmer que C_f est en-dessous de son asymptote.

F) Révisons efficacement les fonctions de plusieurs variables

MÉTHODE 36 : Trouver l'ensemble de définition

■ **Principe :**

Pour expliciter D_f, le domaine de définition de f une fonction de deux variables, on regarde ce qui pose problème : c'est par exemple une racine, un logarithme, un dénominateur. On rassemble tous ces problèmes dans un système décrivant les contraintes que doivent vérifier toutes les variables et on raisonne par équivalence pour trouver un ensemble sur lequel évolue le couple de variables.

■ **Mise en garde :**

Prenez bien conscience qu'il y a deux variables. Elles ne font pas nécessairement la même chose, l'une peut être positive pendant que l'autre est négative : Un tableau de signes n'a donc plus beaucoup de sens. C'est un bon outil pour les fonctions d'une variable mais ici, cela risque de vous induire en erreur.

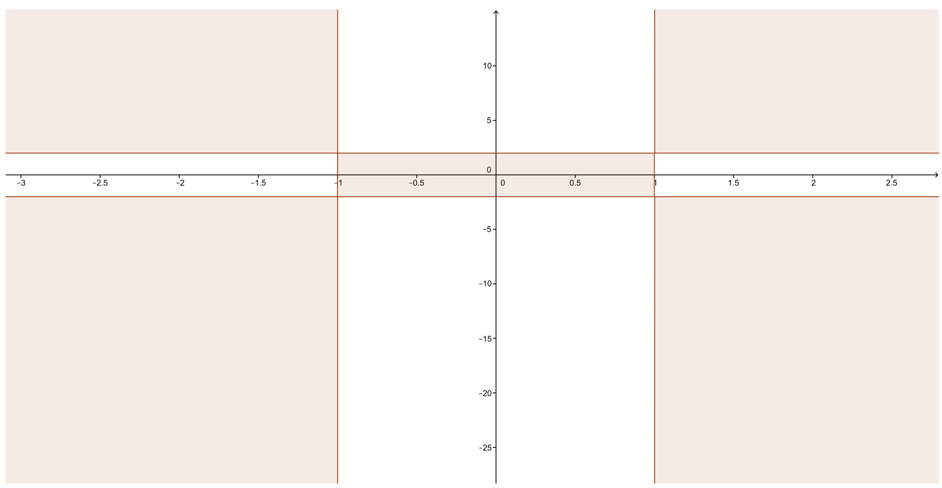
■ ***Exemple*** **:**

Trouvez l'ensemble de définition de : $g : (x,y) \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-4}{y^2-1}}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par quotient et composition, on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
g\,(x,y) \text{ existe} \quad & \iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} (x^2-4)(y^2-1) & \geqslant & 0 \\ y^2-1 & \neq & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \quad \left\{\begin{array}{lcl} x^2-4 & \geqslant & 0 \\ y^2-1 & > & 0 \end{array}\right. \text{ ou} \left\{\begin{array}{lcl} x^2-4 & \leqslant & 0 \\ y^2-1 & < & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \quad \left\{\begin{array}{lcl} x \geqslant 2 & \text{ou} & x \leqslant -2 \\ y > 1 & \text{ou} & y < -1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \left\{\begin{array}{ccc} -2 \leqslant & x & \leqslant 2 \\ -1 < & y & < 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On se résume, le domaine de définition de g est donc $A \cup B$ où on pose $A = (\ [-2,2] \times]-1,1[\ )$ et $B = ((\ ]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\ ) \times (\ ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\ ))$. Voici une illustration de l'ensemble de définition de g :



MÉTHODE 37 : Tracer la surface représentative

■ *Remarque : Pour une fonction h d'une variable, on trace son graphe dans le plan $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse donc aux points d'abscisse x et d'ordonnée $h(x)$. Pour une fonction f de deux variables, son graphe est une surface qu'on place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse aux points d'abscisse x, d'ordonnée y et de cote $f(x, y)$.*

■ **Principe :**
Deux idées pour vous aider à tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables :

1. On peut fixer une variable afin de tracer une courbe d'une fonction d'une seule variable. On fixe b et on trace le graphe de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, b)$. On obtient alors l'intersection de la surface représentative de f et du plan d'équation $y = b$. Puis on fait bouger b, on a ainsi une représentation par tranche verticale. On peut faire de même en fixant a et en s'intéressant à $y \mapsto f(a, y)$.
2. On peut aussi fixer λ et on trace la surface $f(x, y) = \lambda$, (x, y) balayant l'ensemble de définition de f (surface appelée courbe de niveau λ de f). On cherche donc l'intersection de la surface représentative de f et du plan d'équation $z = \lambda$. Puis, en faisant bouger λ, on obtient une représentation par tranche horizontale de notre surface. Rapprochez cette notion de celle de carte topographique ou de celles de cartes d'état-major.

Dans un cas comme dans l'autre, vous pouvez vous rendre compte qu'on cherche des intersections de notre surface avec des plans du type $x = cte$ ou $y = cte$ ou $z = cte$.

■ ***Exemple*** **:**

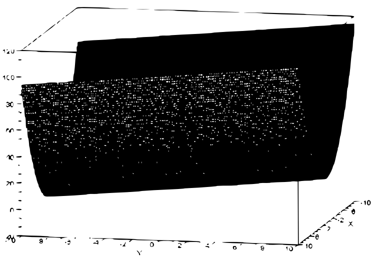
Tracer la surface représentative des fonctions suivantes :

$$f : (x, y) \mapsto y + x^2 + 4 \text{ et } g : (x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2).$$

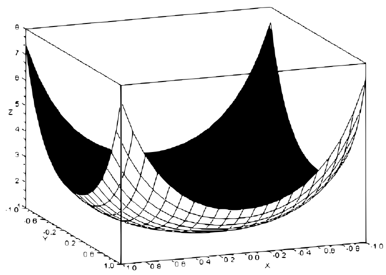
1. Commençons par f : En fixant x à a, on obtient une droite $z = y + a^2 + 4$ de pente 1 et d'ordonnée à l'origine a^2+4. L'intersection de la surface recherchée et du plan $x = a$ est donc une droite. L'intersection avec le plan $y = b$ donne une parabole d'équation $z = x^2 + 4 + b$. Avec ces infos, en faisant évoluer a et b, on trace notre surface qui ressemble à un half pipe infini.
2. Pour g maintenant. Soit λ un réel supérieure à 1 et soient x et y deux réels, on a :

$$g(x, y) = \lambda \iff x^2 + y^2 = \ln(\lambda)$$

L'intersection avec le plan $z = \lambda$ donne donc un cercle de rayon $\sqrt{\ln(\lambda)}$ et de centre $(0, 0, \lambda)$ si $\lambda \geqslant 1$, l'ensemble vide sinon. On trace pour les hauteurs positives des cercles dont les centres sont tous sur l'axe des z et dont les rayons croissent logarithmiquement, c'est un panier infini en gros.



Surface de f



Surface de g

MÉTHODE 38 : Comment calculer les dérivées partielles (sans composition)

■ **Principe :**

Si vous voulez calculer la dérivée partielle par rapport à y (c'est plus rigoureux de dire par rapport à la deuxième variable) de $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ en un point $a(x_a, y_a)$ et bien, par définition, c'est la dérivée (si elle existe...) en y_a de la fonction d'une seule variable $g : y \mapsto f(x_a, y)$. On traduit :

- Tant qu'il n'y a pas de problème, cela revient donc à fixer la variable qui ne bouge pas et dériver une fonction d'une seule variable.
- Sinon, en cas de problème, que faire ? On explicite $g : y \mapsto f(x_a, y)$ (fonction d'une seule variable) et on regarde si g est dérivable ou non en y_a.

■ **Mise en garde :**

Ne parlez pas de la dérivée de $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$. Le concept de dérivée est vu pour une fonction d'une seule variable, on peut donc parler de la dérivée de $g : y \mapsto f(x_a, y)$. Pour celle de f, il faudrait déjà parler de son taux d'accroissement, ce serait un truc du genre $\dfrac{f(x, y) - f(x_a, y_a)}{(x, y) - (x_a, y_a)}$ ce qui n'a strictement aucun sens !

■ ***Exemple* :**

Évaluer la dérivée partielle par rapport à la première variable de la fonction suivante :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

À part $(0, 0)$, on n'a aucun problème. Ainsi, si a et b sont deux réels non tous les deux nuls, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{2a}{(a^2 + b^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{a^2 + b^2}\right).$$

Pour savoir si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe, on introduit la fonction $g : x \mapsto f(x, 0)$. Si x est non nul, on a donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, 0) \\ &= \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

et on a $g(0) = 0$. Soit x un réel non nul, on a donc :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \times \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right).$$

Par croissances comparées et produit, le taux d'accroissement en 0 de g admet donc en 0 une limite finie (qui vaut 0). g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Par définition, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0.

MÉTHODE 39 : Comment calculer les dérivées partielles (avec composition)

■ **Rappel :**

Soient f une fonction de deux variables et deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on note u_1 et u_2. La fonction suivante :

$$g : t \mapsto f(u_1(t), u_2(t))$$

est tout simplement une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il se pourrait qu'elle soit dérivable. Voici ce que dit votre cours à ce sujet :

Si u_1 et u_2 sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens des fonctions d'une variable) sur un certain intervalle de réel I, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (au sens des fonctions de deux variables) sur une certaine partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on note $\mathcal{O}$ et qui a la gentillesse d'être ouverte et, si pour tout t de I, $(u_1(t), u_2(t))$ appartient à $\mathcal{O}$ (pour que la composition soit possible) alors g est dérivable sur I et pour tout élément t de I, on a :

$$g'(t) = u_1'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t), u_2(t)) + u_2'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), u_2(t)).$$

■ ***Exemple* :**

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \quad f_k(x,y) = x^k y - x y^k.$$

Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x,y) \in]0,1[^2$ et en déduire le nombre dérivé de $h : x \mapsto f_k(x, 1-x)$ en $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1}y - y^k \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^k - xky^{k-1}.$$

Par composition, h est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et, d'après les rappels, on a : :

$$\begin{aligned}
h'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

MÉTHODE 40 : Comment trouver les extremums

■ **Rappel :**

Un point critique d'une fonction de plusieurs variables est un point en lequel **toutes** les dérivées partielles s'annulent. Si f, une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, admet en (x_0, y_0) un extremum alors ses dérivées partielles s'annulent si (x_0, y_0) n'est pas au bord de l'ensemble de définition.

■ **Mise en garde :**

Attention, si on a un extremum à l'intérieur de l'ensemble de définition, on a alors un point critique. Par contre, si on a un point critique, on ne peut pas affirmer pour autant qu'on a affaire à un extremum.

■ **Principe :**

Pour trouver les éventuels extremums d'une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, on fait deux étapes :

1. On cherche les points critiques de f. Pour cela, on calcule ses dérivées partielles et on écrit qu'elles sont toutes nulles au point qui nous intéresse. Cela donne donc un système à résoudre.
2. Si f n'a pas de point critique, on peut conclure que f n'a pas d'extremum à l'intérieur de son ensemble de définition (Méfiez-vous des bords !). Sinon, on essaye de démontrer (ce sont des inéquations) que ces points critiques sont ou ne sont pas des extremums. On s'intéresse donc au signe de $f(x,y) - f(a,b)$ avec (a,b) un point critique et (x,y) deux réels quelconques. Quelques réflexes de base permettent en général de s'en sortir : dire qu'un carré est positif, utiliser une fonction dont on a étudié le signe.

■ ***Exemple*** **:**

Soit $f : (x,y) \mapsto x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right)$.

1. *Montrer que, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $f(x,y) \geqslant x \times \exp(x)$.
2. *Étudier rapidement la fonction* g *suivante :* $g : x \mapsto x \times \exp(x)$ *et trouver la valeur de son minimum s'il existe.*
3. *En déduire que* f *admet un minimum sur* $\mathbb{R}^2$ *atteint en un seul point.*

On explique rapidement pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On prend x et y deux réels.

1. On a :
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \times \exp\left(x\left(y^2+1\right)\right) \\ &= x \times \exp(x) \times \exp\left(xy^2\right) \end{aligned}$$
Si x est positif alors $\exp\left(xy^2\right) \geqslant 1$ et $x \times \exp(x) \geqslant 0$ d'où :
$$f(x,y) \geqslant x \times \exp(x).$$
Si x est négatif alors $\exp\left(xy^2\right) \leqslant 1$ et $x \times \exp(x) \leqslant 0$ donc $f(x,y) \geqslant x \times \exp(x)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a bien $f(x,y) \geqslant x \times \exp(x)$.
2. On a :
$$g'(x) = \exp(x) \times (x+1).$$
On cherche le signe de g' afin de dresser le tableau de variations de g : Tout ça, vous savez faire et vous obtenez donc un minimum de g en -1 valant $\dfrac{-1}{e}$.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc chercher ses points critiques. Soient a et b deux réels, on note $\mathcal{P}$ la propriété "(a,b) est un point critique de f", on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) &=& 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} ((b^2+1)a+1)\exp\left(a\left(b^2+1\right)\right) &=& 0 \\ (2ba^2)\exp\left(a\left(b^2+1\right)\right) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 1 \\ a &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{car } 0 \neq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, si $(a,b) \neq (-1,0)$, $f(a,b)$ n'est pas un extremum de f. Soient x et y deux réels. On sait que $f(x,y) \geqslant xe^x$ donc $f(x,y) \geqslant g(x)$. Or $g(x) \geqslant \dfrac{-1}{e}$ et $f(-1,0) = \dfrac{-1}{e}$ (ça tombe bien !) donc $f(x,y) \geqslant f(-1,0)$. $f(-1,0)$ est donc le minimum de f et il n'est atteint qu'en $(-1,0)$.

MÉTHODE 41 : **Comment approcher**

■ **Rappel :**

Voici l'équation du plan tangent à la surface représentative $\mathcal{S}_f$ en un point (x_0, y_0) d'une fonction f de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)\,.$$

On voit que le gradient de f en (x_0, y_0) est normal au plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en M_0. Ainsi, toutes les tangentes en M_0 à ces types de courbes de la surface $\mathcal{S}_f$ sont orthogonale au gradient de f en (x_0, y_0). Cela s'interprète géométriquement par le fait que la direction du gradient indique la direction suivant laquelle f varie le plus vite, la norme du gradient mesurant l'intensité de cette variation.

■ **Principe :**

Votre cours vous donne deux pistes pour approcher au mieux une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$:

1. On prend deux réels h et k et f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

   Cela peut vous rappeler un développement limité d'ordre 1 d'une fonction d'une seule variable... D'ailleurs, c'est exactement ça (mais le dire est hors-programme !).
2. Une autre idée, quand on a affaire uniquement à une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$, on sait que la surface approchant au mieux en un point (x_0, y_0) donné la surface représentative de f est son plan tangent (qui existe car f est de classe $\mathcal{C}^1$).

■ *Remarque : Dans le cas d'une fonction d'une variable, on approxime sa courbe par une droite (la tangente !). Et bien, une fonction de deux variables donne graphiquement une surface de l'espace (les points d'abscisse x, d'ordonnée y et de hauteur $f(x, y)$) et on l'approche par un plan !*

■ ***Exemple*** **:**

On reprend $f : (x, y) \mapsto x \times \exp\left(x\left(y^2 + 1\right)\right)$, donner une bonne approximation en $(1, 2)$ de sa surface.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, une bonne approximation en $(1, 2)$ de sa surface est le plan d' équation cartésienne :

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)\,(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)\,(y - 2)$$

soit $z = e^5 + 6e^5\,(x - 1) + 4e^5\,(y - 2)\,.$