TD sur: Révisions d'analyse et équations autono

Exercices à chercher

Exercice 1 :
Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue x élément de $[-\pi, \pi]$:

1. $\sin(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.
3. $\sqrt{12}\cos(3x) - 2\sin(3x) = -\sqrt{12}$.

Exercice 2 :
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \cos^6(x)\sin^2(x)dx$.

Exercice 3 :
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, z_2 = 1 - i \text{ et } z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

Mettre sous forme trigonométrique ces trois complexes puis donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe : $z^n = \exp(i\theta)$ avec n un entier naturel non nul et θ un réel.
2. Soit a un élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Écrire sous forme trigonométrique $\dfrac{1 - i\tan(a)}{1 + i\tan(a)}$.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$z^n = \frac{1 - i\tan(a)}{1 + i\tan(a)}$$

avec a un élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et n un entier naturel non nul.

Exercice 5 :
Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$w_0 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = \frac{w_n + 4}{w_n + 1}.$$

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{x+4}{x+1}$ d'inconnue x réel différent de -1 admet deux solutions réelles que l'on notera l_1 et l_2, l_1 étant le plus petit.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n : $z_n = \dfrac{w_n - l_2}{w_n - l_1}$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Expliciter le terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, évaluer sa limite.
6. Écrire un programme Python qui reçoit en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de w_n et vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 6 :

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle (E_n) l'équation, d'inconnue x réelle, suivante : $x^n + nx - 1 = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, (E_n) a une unique solution x_n positive.
2. Encadrer $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire sa limite.
3. Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 7 :

1. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $$S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n.$$
   (b) En déduire que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+1)$ puis que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 8 :

Soient a, b et c trois réels tels que $a < b$ et $c \in [a, b]$. Soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que :
$$\exists k \in [0, 1[\text{ tel que } \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leqslant k.$$

1. Démontrer que f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$, c'est-à-dire que :
$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$
2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [a, b]$, admet une unique solution. On notera α cette solution.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
4. Donner la nature de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_0 = 0 \;\text{ et }\; \forall\, n \in \mathbb{N},\; v_{n+1} = 2 + \frac{\sin(v_n)}{2}.$$

Exercice 9 :

Mener une étude complète (on veut les asymptotes !) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x.$$

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{\exp(2x) + 1}$

1. Tracer la courbe représentative de f
2. Montrer qu'il existe un unique réel L tel que $f(L) = L$.
3. Démontrer que : $0 \leqslant L \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11 :

1. Montrer que, pour tout élément x de $[1, +\infty[$, on a : $(x-2) \times \sqrt{x-1} \geqslant -\dfrac{2}{3^{3/2}}$.
2. Montrer que pour tout élément x de $]0, 1[$, on a : $x^x (1-x)^{(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{1}{2}\left(\ln(a) + \ln(b)\right) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

4. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Exercice 12 :

Expliciter φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-10}^{x} f(t)dt$ avec :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -\exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\;. \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée sur chacun de ces deux intervalles.
2. Justifier que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
3. (a) Déterminer la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ telle que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = 2xg(x)$.
   (b) Déterminer le signe de g et dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier les branches infinies de f puis tracer la courbe de f.

Exercice 14 :
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}dt.$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\exp(\sin(t))}{1+\exp(\sin(t))}dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+3}{t^2+2t+1}dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 \exp(-x)\sin(x)dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(t)dt.$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{3+2\cos(2t)}dt.$

Exercice 15 :

1. Résoudre l'équation différentielle $3y = 2xy'$ d'inconnue y fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $3y = 2xy'$ d'inconnue y fonction dérivable sur $]-\infty, 0[$.
3. Résoudre l'équation différentielle $3y = 2xy'$ d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :
$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

Exercice 16 :
On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$

1. On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre (E') sachant qu'il existe a un réel tel que $x \mapsto ax\exp(2x)$ soit solution de (E').
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 17 :
Résoudre le système différentielle suivant d'inconnue y fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2y' + y = 5e^{-x} \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$
sachant qu'il existe a un réel tel que : $x \mapsto ax^2e^{-x}$ soit une solution de l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2y' + y = 5e^{-x}.$$

Exercice 18 :

Soit $g : (x, y) \mapsto x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Trouver les points critiques de g.
2. Déterminer les courbes de niveau de g.
3. g présente-t-il un extremum ?

Exercice 19 :

Soit $g : (x, y) \mapsto (x-1)(y-1)e^{x+y} + (x-1)e^x + (y-1)e^y$.

1. Exprimer g en fonction de $\varphi : t \mapsto (t-1)e^t + 1$.
2. g présente-t-il un extremum ?

Exercice 20 :

Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^+$:

$$y' = -e^y$$

Exercice à faire pendant la classe

Exercice 21 :

Pour tout entier naturel n, on introduit (E_n) l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1 \quad (E_n).$$

1. Résoudre (E_2), (E_0) et (E_1).
2. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2. Quel est le signe de $\cos^2(x) \times (\cos^{n-2}(x) - 1)$?
3. En déduire la résolution de (E_n) pour tout entier naturel n strictement supérieur à 2.

Exercice 22 :

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue x réel :

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout réel x.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue θ réel :

$$8\left(\cos(\theta)\right)^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

4. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4} \text{ et } \frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{4} \right\}.$$

Exercice 23 :
Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe : $z^2 - 2iz + \sqrt{3}i = 0$.

Exercice 24 :
Étudier la fonction f suivante : $f : x \mapsto x^2 \times \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 25 :
Expliciter, pour tout entiers naturels n et m, la quantité $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^n (1+t)^m dt$.

Exercice 26 :
On considère l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions dérivable :

$$x(1-x)y' + (1-x)y = 1 \ (E).$$

1. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ puis $]1, +\infty[$.
2. Montrer que (E) n'a pas de solution définie sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que (E) a une solution unique sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 27 :
On considère l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(y) = y' \ (E)$$

avec f une fonction dérivable telle que :

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ et } \ f \text{ est strictement positive sur }]a, b[$$

avec a et b deux réels tels que $a < b$. On admet que si f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) telles qu'il existe un réel r tel que $f_1(r) = f_2(r)$ alors $f_1 = f_2$. Soit φ une solution de (E) telle que $\varphi(0) \in]a, b[$.

1. Montrer que $\varphi(x)$ appartient à $]a, b[$ pour tout réel x.
2. Montrer que φ admet une limite L en $+\infty$ et que φ' tend, en $+\infty$, vers $f(L)$.
3. Montrer que, si $f(L) > 0$ alors il existe un réel strictement positif a tel que, pour tout x de $[a, +\infty[$, on a :
$$\varphi'(x) > \frac{f(L)}{2}.$$
4. En déduire la valeur de L.
5. Obtenir l'équation de l'asymptote de φ en $-\infty$ puis tracer un graphe cohérent de φ.

Exercices bonus

Exercice 28 :
Calculer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 29 :
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réel puis préciser les solutions comprises dans $]-\pi, \pi]$:

1. $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\tan(x) = \sqrt{3}$
4. $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

Exercice 30 :
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réel :

1. $\cos(x) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\sin(x) < \pi$

Exercice 31 (✯) :
Simplifier, pour tout réel x, cos(arctan(x) et sin(arctan(x)). En déduire la valeur de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 32 :

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe : $z^5 = 1$.
2. En déduire la résolution de l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$
3. En déduire la résolution de l'équation suivante d'inconnue z complexe :
$$1 + \left(\frac{z+3}{iz-2}\right) + \left(\frac{z+3}{iz-2}\right)^2 + \left(\frac{z+3}{iz-2}\right)^3 + \left(\frac{z+3}{iz-2}\right)^4 = 0.$$

Exercice 33 (✯) :
On pose : $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, $S = a + a^4$ et $T = a^2 + a^3$.

1. Calculer $S + T$ et $S \times T$.
2. Montrer que $S = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 34 :
Étudier et représenter graphiquement la fonction suivante :
$$f : x \mapsto \left|\left|x^2 - 4x + 3\right| - \left|\frac{x^2}{2} - 3x + 4\right|\right| - \frac{x^2}{2}$$

Exercice 35 :
Déterminer le nombre de solutions de l'équation suivante d'inconnue x strictement positif :

$$\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 36 :

1. Soit g une fonction numérique périodique définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que g admet une limite en $+\infty$. Montrer que g est constante.
2. Montrer que cos n'admet pas de limite en $-\infty$.

Exercice 37 (✯) :
Déterminer toutes les fonctions numériques f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^2 - f(x) = 0.$$

Exercice 38 (✯) :

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = f(1)$. Soit p un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe x un élément de $\left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$.

Exercice 39 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $f([a;b]] \subset [a;b]$. Montrer qu'il existe un élément c de $[a;b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 40 (✯) :
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} (I_n) = 0$.

Exercice 41 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 2^t dt$.
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos(t)| dt$.
4. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t) dt$

Exercice 42 (✯) :

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel : $\cos(x) = 1 + \varepsilon$ avec ε un réel strictement positif.
2. Comment doit-on choisir w pour que l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$1 + \sin^2(wx) = \cos(x)$$

ait une unique solution ?