Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt$ avec $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$. $g$ est, par quotient, continue sur $\mathbb{R}^\star$, appelons $G$ la primitive de $g$ sur $\mathbb{R}_\star^+$ s'annulant en 1.

1. Distinguons les cas :
   - **Sur $\mathbb{R}_\star^+$.**
     Soit $x$ un réel strictement positif. On fixe un réel $u$ supérieur à $x$, on majore $\left|\dfrac{e^{-t}}{t}\right|$ par $\left|\dfrac{e^{-t}}{x}\right|$ pour tout $t$ de $[x,u]$ et on intègre :
     $$\int_x^u \left|\frac{e^{-t}}{t}\right| dt \leqslant \int_x^u \left|\frac{e^{-t}}{x}\right| dt$$
     ce qui donne $\displaystyle\int_x^u \left|\frac{e^{-t}}{t}\right| dt \leqslant \frac{e^{-x}-e^{-u}}{x}$. L'existence de $\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-u}}{x}$ démontre (on vous laisse expliquer avec la convergence absolue...) la convergence $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$, $f(x)$ est donc bien définie.
   - **En 0.**
     Rappelons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ ne converge pas ($\displaystyle\lim_{u\longrightarrow 0} \ln(u) = -\infty$...). Or $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et toutes ces fonctions sont positives sur $]0,1]$. On peut donc affirmer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ ne converge pas. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ ne converge pas et $f$ n'est pas définie en 0.
   - **Sur $\mathbb{R}_\star^-$.**
     Supposons $x$ négatif. On vient de prouver que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}$ ne convergeait pas, cela entraîne que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ ne converge pas et que $f$ n'est pas définie en $x$.

   Conclusion : $f$ est définie sur $\mathbb{R}_\star^+$ et pour tout $x$ de $\mathbb{R}_\star^+$, on a :
   $$f(x) = \left(\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)\right) - G(x).$$
   $G$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_\star^+$ (c'est une primitive...), $f$ l'est par somme...
2. ... et on a $f' = -G'$ i.e. $f' : t \mapsto -\dfrac{e^{-t}}{t}$.
3. $f'$ est strictement négative donc $f$ est strictement décroissante. De plus, par somme, on a :
   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \left(\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)\right) - \left(\lim_{x\longrightarrow+\infty} G(x)\right) = 0.$$
   En 0, en majorant $G(x)$ , i.e. $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}dt}{t}$, pour $x$ dans $]0,1[$, par $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{et}$, i.e. $\dfrac{\ln(x)}{e}$, on prouve que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} G(x)$ vaut $-\infty$. Par somme, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = +\infty$. Signalons tout de même une subtilité dans la majoration de $G$ : en intégrant l'inégalité $\dfrac{e^{-t}}{t} \geqslant \dfrac{1}{et}$, valable pour tout $t$ de $[x,1]$, on obtient $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant \int_1^x \frac{dt}{et}$... Pensez bien à inverser les inégalités car on intègre dans le "mauvais" sens, $x$ étant inférieur à 1.
4. On commence par fixer un réel strictement positif $x$. On a :
   $$\frac{xf(x)}{e^{-x}} = \int_x^{+\infty} \frac{x}{t}e^{x-t}dt.$$
   Montrons que cette quantité tend vers 1 quand $x$ tend vers l'infini.
   Soit $u$ un réel supérieur à $x$, procédons à une intégration par parties (ce qui est possible car $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,u]$), on obtient :
   $$\int_x^u \frac{x}{t}e^{x-t}dt = \left[-\frac{x}{t}e^{x-t}\right]_x^u - \int_x^u \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt = 1 - \frac{x}{u}e^{x-u} - \int_x^u \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt.$$
   $\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} \left(1 - \frac{x}{u}e^{x-u}\right)$ vaut 1, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{x}{t}e^{x-t}dt$ converge (puisque $f(x)$ existe) donc, par différence, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt$ converge et on a :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{x}{t}e^{x-t}dt = 1 - \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt.(✎)$$

Majorons, intégrons, on a pour tout réel $u$ supérieur à $x$ :

$$\int_x^u \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt \leqslant \frac{xe^x}{x^2}\int_x^u e^{-t}dt$$

ce qui donne $\displaystyle\int_x^u \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt \leqslant \frac{1}{x} - e^{x-u}x$, puis, par passage à la limite dans les inégalités :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2}e^{x-t}dt \leqslant \frac{1}{x}.$$

Attention, c'est à $x$ maintenant de bouger ses fesses...

Comme $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} 0 = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{x}{t^2}e^{x-t}dt$ existe et vaut 0.

En passant à la limite dans (✎), on obtient que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{x}{t}e^{x-t}dt = 1$... ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

5. On appelle $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$. Par opération, $h$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$. De l'équivalent $e^{-t}-1 \underset{0}{\sim} -t$, on déduit que $h$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$ converge donc.

Pour tout $x$ de $]0,1[$, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt - \ln(x).$$

Divisons, on a :

$$\frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln(x)} = \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt}{\ln(x)} - 1.$$

puis passons à la limite... $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt}{\ln(x)}\right)$ existe et vaut 0 car ln tend vers l'infini en 0 et $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt\right)$ tend vers la quantité finie $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$ puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$ converge !

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln(x)}\right)$ vaut $-1$ ce qui prouve :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)\text{... i.e. } G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

On se souvient que $f(x)$ est $\left(\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)\right) - G(x)$, on divise :

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)}{\ln(x)} - \frac{G(x)}{\ln(x)}.$$

$G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{G(x)}{\ln(x)}\right)$ vaut 1. D'autre part, ln tend vers l'infini en 0 et $\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)$ est une quantité finie donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{\displaystyle\lim_{u\longrightarrow+\infty} G(u)}{\ln(x)}\right)$ vaut 0.

Par somme, on vient donc de prouver que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\left(\frac{f(x)}{\ln(x)}\right)$ valait $-1$, on a donc : $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

b) Pour $x \leq y$, on a
$$\forall t \in \left]0\,;1\right],\ \frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t}$$
puis en intégrant $f(x) \geq f(y)$.
La fonction $f$ est donc décroissante.

c) On a
$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

d) Puisque $f$ est décroissante et positive, $f$ converge en $+\infty$. Posons $\ell$ sa limite.
En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.
Par décroissance
$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$$
donc
$$\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$
On en déduit
$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

e) c) Quand $x \to 0^+$,
$$0 \leq f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} \leq 1$$
donc
$$f(x+1) \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(1/x)$$
et par suite
$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1/x \to +\infty$$

Quand $t \to +\infty$,

$$f(t) = t + 2 - t\sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = t + 2 - t(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{2}{t^2} + O(1/t^3)) \sim \frac{3}{2t}$$

$f$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

1/2

Soit $q \in ]\ell, 1[$. Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \geqslant A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leqslant q$$

et donc

$$\forall x \geqslant A, f(x+1) \leqslant q f(x)$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-q}\int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t = M$$

On en déduit que les intégrales sur $[A, A+n]$ de la fonction positive $f$ sont majorées et donc $f$ est intégrable sur $[A, A+\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale étudiée est donc convergente.

Puisque $|g| \leqslant |f|$, l'intégrabilité de $f$ entraîne celle de $g$.
Inversement, supposons $g$ intégrable.
On a

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\, \mathrm{d}t$$

avec par décroissance de $f$

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \pi f(k\pi)$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)|\, |\sin(t)|\, \mathrm{d}t \geqslant f(k\pi) \int_0^{\pi} \sin(t)\, \mathrm{d}t = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\, |\sin(t)|\, \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{(n-1)\pi} f(t)\, |\sin(t)|\, \mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} |g(t)|\, \mathrm{d}t$$

On peut alors affirmer que les intégrales de $|f|$ sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$ sont majorées ce qui signifie que la fonction $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : [énoncé]

a) La fonction $f$ est définie et continue par morceaux sur $]1,+\infty[$.

Quand $x \to 1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc $f$ est intégrable sur $]1,+\infty[$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right)^{1/2} \left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\left[(\ln 3)^2-(\ln 2)^2\right]\right)^{1/2} \leqslant \frac{\ln 3}{2}$$

On notera $f$ la fonction intégrée et $I$ l'intervalle d'étude, à chaque fois $f$ s'avère continue par morceaux sur $I$.

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f$ est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) = \mathrm{e}^{2\ln t - t\arctan t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f$ est intégrable et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\arctan t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$