MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 1

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Convergence des intégrales de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$.

1. f est-elle intégrale sur $[2,+\infty[$? (question si 5/2 : sur $]1,+\infty[$?)
2. Montrer que :

$$\int_2^3 f(x)dx \leqslant \frac{\ln(3)}{2}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, positive et décroissante. Pour tout réel x positif, on pose :

$$g(x) = f(x)\sin(x).$$

On suppose g intégrable. Montrer que f l'est également.

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 1

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et donner ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
4. Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge. En déduire que $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ puis un équivalent en 0 de f.

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de x, l'intégrale
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$
est-elle définie ?
2. Étudier la monotonie de f.
3. Pour tout réel strictement positif x, calculer $f(x) + f(x+1)$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
5. Déterminer la limite de f en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 1

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt$.

Exercice 1

Étudier l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\exp(-\sqrt{t})}{1+t^2}dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t\arctan(t))dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1})dt$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et positive tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) = \frac{1}{2}$.
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.