

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} g(t)dt$ avec $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. g est, par quotient, continue sur \mathbb{R}^* , appelons G la primitive de g sur \mathbb{R}_*^+ s'annulant en 1.

1. Distinguons les cas :

- **Sur \mathbb{R}_*^+ .**

Soit x un réel strictement positif. On fixe un réel u supérieur à x , on majore $\left| \frac{e^{-t}}{t} \right|$ par $\left| \frac{e^{-t}}{x} \right|$ pour tout t de $[x, u]$ et on intègre :

$$\int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{t} \right| dt \leq \int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{x} \right| dt$$

ce qui donne $\int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{t} \right| dt \leq \frac{e^{-x} - e^{-u}}{x}$. L'existence de $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - e^{-u}}{x}$ démontre (on vous laisse expliquer avec la convergence absolue...) la convergence $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, $f(x)$ est donc bien définie.

- **En 0.**

Rappelons que $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ ne converge pas ($\lim_{u \rightarrow 0} \ln(u) = -\infty \dots$). Or $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ et toutes ces fonctions sont positives sur $]0, 1[$. On peut donc affirmer que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ ne converge pas. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ne converge pas et f n'est pas définie en 0.

- **Sur \mathbb{R}_*^- .**

Supposons x négatif. On vient de prouver que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}$ ne convergeait pas, cela entraîne que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ ne converge pas et que f n'est pas définie en x .

Conclusion : f est définie sur \mathbb{R}_*^+ et pour tout x de \mathbb{R}_*^+ , on a :

$$f(x) = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - G(x).$$

G étant dérivable sur \mathbb{R}_*^+ (c'est une primitive...), f l'est par somme...

2. ... et on a $f' = -G'$ i.e. $f' : t \mapsto -\frac{e^{-t}}{t}$.

3. f' est strictement négative donc f est strictement décroissante. De plus, par somme, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \right) = 0.$$

En 0, en majorant $G(x)$, i.e. $\int_1^x \frac{e^{-t} dt}{t}$, pour x dans $]0, 1[$, par $\int_1^x \frac{dt}{et}$, i.e. $\frac{\ln(x)}{e}$, on prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} G(x)$ vaut $-\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Signalons tout de même une subtilité dans la majoration de G : en intégrant l'inégalité $\frac{e^{-t}}{t} \geq \frac{1}{et}$, valable pour tout t de $[x, 1]$, on obtient $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^x \frac{dt}{et} \dots$ Pensez bien à inverser les inégalités car on intègre dans le "mauvais" sens, x étant inférieur à 1.

4. On commence par fixer un réel strictement positif x . On a :

$$\frac{xf(x)}{e^{-x}} = \int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt.$$

Montrons que cette quantité tend vers 1 quand x tend vers l'infini.

Soit u un réel supérieur à x , procédons à une intégration par parties (ce qui est possible car $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[x, u]$), on obtient :

$$\int_x^u \frac{x}{t} e^{x-t} dt = \left[-\frac{x}{t} e^{x-t} \right]_x^u - \int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt = 1 - \frac{x}{u} e^{x-u} - \int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt.$$

$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{u} e^{x-u} \right)$ vaut 1, $\int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt$ converge (puisque $f(x)$ existe) donc, par différence, $\int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt$ converge et on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt = 1 - \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt. (\otimes)$$

Majorons, intégrons, on a pour tout réel u supérieur à x :

$$\int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{x e^x}{x^2} \int_x^u e^{-t} dt$$

ce qui donne $\int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{1}{x} - e^{x-u} x$, puis, par passage à la limite dans les inégalités :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{1}{x}.$$

Attention, c'est à x maintenant de bouger ses fesses...

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt$ existe et vaut 0.

En passant à la limite dans (8), on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt = 1$... ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

5. On appelle $h : t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$. Par opération, h est continue sur \mathbb{R}^* . De l'équivalent $e^{-t} - 1 \underset{0}{\sim} -t$, on déduit que

h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$. $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge donc.

Pour tout x de $]0, 1[$, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \ln(x).$$

Divisons, on a :

$$\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} = \frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt}{\ln(x)} - 1.$$

puis passons à la limite... $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt}{\ln(x)} \right)$ existe et vaut 0 car \ln tend vers l'infini en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \right)$

tend vers la quantité finie $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ puisque $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge !

Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} \right)$ vaut -1 ce qui prouve :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x) \dots \text{i.e. } G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

On se souvient que $f(x)$ est $\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - G(x)$, on divise :

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)}{\ln(x)} - \frac{G(x)}{\ln(x)}.$$

$G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{G(x)}{\ln(x)} \right)$ vaut 1. D'autre part, \ln tend vers l'infini en 0 et $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)$ est une quantité finie donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)}{\ln(x)} \right)$ vaut 0.

Par somme, on vient donc de prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\ln(x)} \right)$ valait -1 , on a donc : $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

b) Pour $x \leq y$, on a

$$\forall t \in]0; 1], \frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

puis en intégrant $f(x) \geq f(y)$.

La fonction f est donc décroissante.

c) On a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

d) Puisque f est décroissante et positive, f converge en $+\infty$. Posons ℓ sa limite.

En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.

Par décroissance

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$$

donc

$$\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

e) c) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$0 \leq f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \leq 1$$

donc

$$f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O(1) = o(1/x)$$

et par suite

$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1/x \rightarrow +\infty$$

Quand $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) = t + 2 - t\sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = t + 2 - t\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{2}{t^2} + O(1/t^3)\right) \sim \frac{3}{2t}$$

f n'est pas intégrable en $+\infty$. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

Soit $q \in]\ell, 1[$. Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$$

et donc

$$\forall x \geq A, f(x+1) \leq qf(x)$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t) dt = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k dt$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t) dt \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t) dt = M$$

On en déduit que les intégrales sur $[A, A+n]$ de la fonction positive f sont majorées et donc f est intégrable sur $[A, A+\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale étudiée est donc convergente.

Puisque $|g| \leq |f|$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g .

Inversement, supposons g intégrable.

On a

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$$

avec par décroissance de f

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \pi f(k\pi)$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)| |\sin(t)| dt \geq f(k\pi) \int_0^{\pi} \sin(t) dt = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t) |\sin(t)| dt$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt \leq \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_0^{(n-1)\pi} f(t) |\sin(t)| dt$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| dt \leq \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_0^{+\infty} |g(t)| dt$$

On peut alors affirmer que les intégrales de $|f|$ sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$ sont majorées ce qui signifie que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.
 Quand $x \rightarrow 1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \right)^{1/2} \left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx \right)^{1/2}$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} [(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2]\right)^{1/2} \leq \frac{\ln 3}{2}$$

On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I .

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ converge.

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) = e^{2 \ln t - t \arctan t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt$ converge.