BL2 **Sujet 1**
Semaine de colle: 2

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Réciter la proposition sur le changement de variables.

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$, $\displaystyle\int_0^1 x^2\exp(3x)dx$ puis $\displaystyle\int_1^2 \ln(x))dx$.

Exercice

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n dx$.

1. Calculer I_0 et montrer que $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.
3. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant I_n + I_{n+2}$ puis montrer que (I_n) converge vers une limite à préciser.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $p_n = I_{2n}$.
   (a) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - p_n$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1}p_n = -\dfrac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^n \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$. En déduire :
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

BL2 **Sujet 2** — Semaine de colle: 2

Autres sujets posés sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Réciter la proposition sur l'intégration par parties.

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_1^7 \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ $\displaystyle\int_1^2 e^{-x}\sin(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^0 \arctan(x)dx$.

Exercice

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx.$$

On désire étudier le comportement asymptotique de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.
4. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BL2 **Sujet 3** | Autres sujets posés sur:
Semaine de colle: 2 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Relation de Chasles et Linéarité de l'intégration.

Exercice

Calculer $\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx$, $\int_1^2 \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ puis $\int_1^{\pi} x\ln(x)dx$.

Exercice

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{4n} \times \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{4n-k}}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge. On exprimera la limite L de (u_n) sous forme d'une intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (demandez à votre colleur la théorie sur les sommes de Riemann).
   (b) À l'aide du changement de variable $x = 4\sin^2(\theta)$ dans l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, montrer que $L = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(x)\right)\mathrm{d}x$.
   (a) À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, montrer $I = \frac{\pi}{4}\ln(2) - I$.
   (b) En déduire la valeur de I.