BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite de nombres réels.

Exercice 1

On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(z^2+1)^8 = (z^2-1)^8.$$

1. Résoudre l'équation $z^8 = 1$ d'inconnue z complexe.
2. On suppose que z est une solution de (E). Montrer qu'il existe k dans $[\![1,7]\!]$ tel que : $z^2 = -i\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)}$.
3. Résoudre (E).

Exercice 2

Soient $f : x \mapsto \dfrac{5x(1-x)}{2}$, $I = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$ et a un élément de $]0,1[$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{5x_n(1-x_n)}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x de I, $f(x) \in I$ (On dit que I est stable par f).
2. Montrer que, pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{5}{8}$.
3. Montrer qu'il n'est pas possible que, pour tout entier naturel n, on ait $x_n \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

   Que peut-on conclure ?
4. Trouver le réel L de I tel que $f(L) = L$.
5. Montrer, qu'au-delà d'un certain entier naturel n_0, on a :

$$|x_{n+1} - L| \leqslant \frac{5}{8}|x_n - L|.$$

6. Conclure!

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir la fonction arctan, donner l'expression de sa dérivée puis tracer l'allure de son graphe en précisant les asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 1

1. Soit a et b deux réels. Soit n un entier naturel. On pose :
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb+a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb+a).$$
Montrer que : $C_n + iS_n = \exp(ia) \times (1-\exp(ib))^n$ et en déduire que :
$$S_n = \left(-2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n \times \sin\left(\frac{n(b+\pi)+2a}{2}\right).$$
2. Démontrer ces égalités :
$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
et en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$.
3. Déterminer le signe de f sur $[0,\pi]$ où f est la fonction suivante :
$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2+\sqrt{3})\cos(2x) + (3+2\sqrt{3})\cos(x) - (2+\sqrt{3})$$

Exercice 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner 4 développements limités classiques.

Exercice 1

1. Soient z et z' deux complexes unitaires tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.
2. Calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$ et $(1+i)^n - (1-i)^n$ avec n un entier.

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

On pose $x_0 = \left|\dfrac{\sqrt{a}}{2} - 1\right|$ et $x_1 = \left|\dfrac{\sqrt{b}}{2} - 1\right|$. On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème des gendarmes pour des suites de nombres réels.

Exercice 1

On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(z^2+1)^8 = (z^2-1)^8.$$

1. Résoudre l'équation $z^8 = 1$ d'inconnue z complexe.
2. On suppose que z est une solution de (E). Montrer qu'il existe k dans $[\![1,7]\!]$ tel que : $z^2 = -i\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)}$.
3. Résoudre (E).

Exercice 2

Soients $f : x \mapsto \dfrac{5x(1-x)}{2}$, $I = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$ et a un élément de $]0,1[$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{5x_n(1-x_n)}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x de I, $f(x) \in I$ (On dit que I est stable par f).
2. Montrer que, pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{5}{8}$.
3. Montrer qu'il n'est pas possible que, pour tout entier naturel n, on ait $x_n \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Que peut-on conclure ?
4. Trouver le réel L de I tel que $f(L) = L$.
5. Montrer, qu'au-delà d'un certain entier naturel n_0, on a :
$$|x_{n+1} - L| \leqslant \frac{5}{8}|x_n - L|.$$
6. Conclure!

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle

Exercice 1

1. Soit a et b deux réels. Soit n un entier naturel. On pose :
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb+a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb+a).$$
Montrer que : $C_n + iS_n = \exp(ia) \times (1-\exp(ib))^n$ et en déduire que :
$$S_n = \left(-2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n \times \sin\left(\frac{n(b+\pi)+2a}{2}\right).$$
2. Démontrer ces égalités :
$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.
3. Déterminer le signe de f sur $[0,\pi]$ où f est la fonction suivante :
$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2+\sqrt{3})\cos(2x) + (3+2\sqrt{3})\cos(x) - (2+\sqrt{3})$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?
Dans ce cas, que peut-on dire de la convergence et des limites éventuelles de ces deux suites ?

Exercice 1

1. Soient z et z' deux complexes unitaires tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.
2. Calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$ et $(1+i)^n - (1-i)^n$ avec n un entier.

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

On pose $x_0 = \left|\dfrac{\sqrt{a}}{2} - 1\right|$ et $x_1 = \left|\dfrac{\sqrt{b}}{2} - 1\right|$. On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème des gendarmes pour des suites de nombres réels.

Exercice 1

On note (E) l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$(z^2+1)^8 = (z^2-1)^8.$$

1. Résoudre l'équation $z^8 = 1$ d'inconnue z complexe.
2. On suppose que z est une solution de (E). Montrer qu'il existe k dans $[\![1, 7]\!]$ tel que : $z^2 = -i\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)}$.
3. Résoudre (E).

Exercice 2

Soient $f : x \mapsto \dfrac{5x(1-x)}{2}$, $I = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$ et a un élément de $]0, 1[$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{5x_n(1-x_n)}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x de I, $f(x) \in I$ (On dit que I est stable par f).
2. Montrer que, pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{5}{8}$.
3. Montrer qu'il n'est pas possible que, pour tout entier naturel n, on ait $x_n \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Que peut-on conclure ?
4. Trouver le réel L de I tel que $f(L) = L$.
5. Montrer, qu'au-delà d'un certain entier naturel n_0, on a :
$$|x_{n+1} - L| \leqslant \frac{5}{8}|x_n - L|.$$
6. Conclure!

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle

Exercice 1

1. Soit a et b deux réels. Soit n un entier naturel. On pose :
$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb+a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb+a).$$
Montrer que : $C_n + iS_n = \exp(ia) \times (1 - \exp(ib))^n$ et en déduire que :
$$S_n = \left(-2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n \times \sin\left(\frac{n(b+\pi)+2a}{2}\right).$$
2. Démontrer ces égalités :
$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$
et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.
3. Déterminer le signe de f sur $[0,\pi]$ où f est la fonction suivante :
$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2+\sqrt{3})\cos(2x) + (3+2\sqrt{3})\cos(x) - (2+\sqrt{3})$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?
Dans ce cas, que peut-on dire de la convergence et des limites éventuelles de ces deux suites ?

Exercice 1

1. Soient z et z' deux complexes unitaires tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.
2. Calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$ et $(1+i)^n - (1-i)^n$ avec n un entier.

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

On pose $x_0 = \left|\dfrac{\sqrt{a}}{2} - 1\right|$ et $x_1 = \left|\dfrac{\sqrt{b}}{2} - 1\right|$. On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$.