BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Définition du module d'un nombre complexe.

## Exercice 1

1. Résoudre sur $[-\pi, \pi]^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2\cos(x) + 3\sin(y) = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4\cos(x) + \sin(y) = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(2x) + \cos(x) = 0$.

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

1. Écrire un programme Python permettant l'affichage de la courbe de la fonction $f$ et de la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$, sur un même graphique. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. Soit $a \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   Avec un programme en Python, faire afficher les premières valeurs de cette suite pour différentes valeurs de $a$.
3. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur [0,1] une unique solution que l'on notera $\alpha$.
4. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans l'intervalle [0,1] . Déterminer un réel $M$ vérifiant $0 < M < 1$, et tel que : $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant M$. A l'aide du théorème des accroissements finis démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M|u_n - \alpha|.$$

   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
5. A l'aide des questions précédentes, écrire un programme en Python permettant le calcul d'une valeur approchée de $\alpha$ à $\varepsilon$ près (avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$).

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Calcul de la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique.

## Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \overline{z} + 1$.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$ ?

## Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $]0, 1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est un élément de $]0, 1]$.
2. Étudier $f : x \mapsto \sin(x) - x$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^2 \right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{3}$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

## Colles de mathématiques

### Mini mini question de cours

Croissances comparées entre les suites puissance $\left(n^\alpha\right)$ (avec $\alpha > 0$), géométrique $\left(a^n\right)$ (avec $a > 1$) et factorielle $\left(n!\right)$.

### Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $[0,1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier $f : x \mapsto x - x^2$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ appartient à $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### Exercice 2

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y - xy^2$.

1. Chercher les points critiques de $f$.
2. Calculer $f(x, 2x)$ pour $x$ réel.
3. En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

# Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Si $\alpha$ est un réel fixé, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \overline{z} + 1$.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$ ?

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

1. Écrire un programme Python permettant l'affichage de la courbe de la fonction $f$ et de la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$, sur un même graphique. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. Soit $a \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
Avec un programme en Python, faire afficher les premières valeurs de cette suite pour différentes valeurs de $a$.
3. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur [0,1] une unique solution que l'on notera $\alpha$.
4. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans l'intervalle [0,1] . Déterminer un réel $M$ vérifiant $0 < M < 1$, et tel que : $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant M$. A l'aide du théorème des accroissements finis démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M|u_n - \alpha|.$$
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
5. A l'aide des questions précédentes, écrire un programme en Python permettant le calcul d'une valeur approchée de $\alpha$ à $e$ près, où $e$ est un paramètre strictement positif.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

## Mini mini question de cours

Si $(u_n)$ est une suite et $\ell$ est un réel, définition de la convergence de $(u_n)$ vers $\ell$.

## Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \overline{z} + 1$.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$ ?

## Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $]0, 1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est un élément de $]0, 1]$.
2. Étudier $f : x \mapsto \sin(x) - x$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left( \left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{3}$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Pour $\theta$ un réel, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

## Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $[0,1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier $f : x \mapsto x - x^2$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ appartient à $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Exercice 2

Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y - xy^2$.

1. Chercher les points critiques de $f$.
2. Calculer $f(x, 2x)$ pour $x$ réel.
3. En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Si $\alpha$ est un réel fixé, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \overline{z} + 1$.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$ ?

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

1. Écrire un programme Python permettant l'affichage de la courbe de la fonction $f$ et de la première bissectrice, i.e. la droite d'équation $y = x$, sur un même graphique. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
2. Soit $a \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
Avec un programme en Python, faire afficher les premières valeurs de cette suite pour différentes valeurs de $a$.
3. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur [0,1] une unique solution que l'on notera $\alpha$.
4. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans l'intervalle [0,1] . Déterminer un réel $M$ vérifiant $0 < M < 1$, et tel que : $\forall x \in [0, 1],\ |f'(x)| \leqslant M$. A l'aide du théorème des accroissements finis démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M|u_n - \alpha|.$$
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
5. A l'aide des questions précédentes, écrire un programme en Python permettant le calcul d'une valeur approchée de $\alpha$ à $e$ près, où $e$ est un paramètre strictement positif.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

## Colles de mathématiques

### Mini mini question de cours

Si $(u_n)$ est une suite et $\ell$ est un réel, définition de la convergence de $(u_n)$ vers $\ell$.

### Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = \overline{z} + 1$.
2. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+$ ?

### Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $]0, 1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est un élément de $]0, 1]$.
2. Étudier $f : x \mapsto \sin(x) - x$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left( \left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{3}$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 1 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

## Mini mini question de cours

Pour $\theta$ un réel, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

## Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0$ est un élément de $[0,1]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier $f : x \mapsto x - x^2$ et en déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ appartient à $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Exercice 2

Soit $f : (x,y) \mapsto x^2y - xy^2$.

1. Chercher les points critiques de $f$.
2. Calculer $f(x, 2x)$ pour $x$ réel.
3. En déduire que $f$ n'admet pas d'extremum.