BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule de Bayes.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X+1) + P(X)$. Soient n un entier naturel f_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f_n : P \mapsto P(X+1) + P(X)$.

1. Montrer que f_n est un isomorphisme.
2. Donner la matrice canoniquement associée à f_n. Quel est son rang ?
3. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$, n un entier naturel.

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$, en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$
4. Montrer que $u = (1,1,1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soit $v = (1,-1,1)$ et $w = (4,2,1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w.
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
9. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille d'évènements.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Calculer A^2. A est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ avec N un entier naturel non nul. On dit qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^N$ est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $g^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\operatorname{Ker}(f^n) \subset \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.
2. On suppose, uniquement dans cette question, que n est un entier naturel tel que $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^{n+1})$. Montrer que, pour tout entier m supérieur à n, on a alors :
$$\operatorname{Ker}(f^m) = \operatorname{Ker}(f^n).$$
3. Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que la suite $(\dim\ (\operatorname{Ker}(f^n)))_{n \geqslant n_0}$ soit constante et prouver que, si n_0 est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors $n_0 \leqslant N$.
4. En déduire que, si f est nilpotent, alors $f^N = 0$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définition d'une tribu.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canoniquement associée $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A.

1. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$
3. Montrer que u avec $u = 1 + X + X^2$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
4. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}_2[X]})$.
5. Soient $v = 1 - X + X^2$ et $w = 4 + 2X + X^2$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
8. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ (avec $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$). Expliciter P et montrer que P est inversible.
9. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir ce que sont des évènements incompatibles puis des évènements indépendants.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X+1) + P(X)$. Soient n un entier naturel f_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f_n : P \mapsto P(X+1) + P(X)$.

1. Montrer que f_n est un isomorphisme.
2. Donner la matrice canoniquement associée à f_n. Quel est son rang ?
3. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$, n un entier naturel.

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$, en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$
4. Montrer que $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soit $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w.
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
9. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule du crible pour deux évènements puis pour trois.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Calculer A^2. A est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}\,(f)$.
3. Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ avec N un entier naturel non nul. On dit qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^N$ est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $g^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\text{Ker}\,(f^n) \subset \text{Ker}\,(f^{n+1})$.
2. On suppose, uniquement dans cette question, que n est un entier naturel tel que $\text{Ker}\,(f^n) = \text{Ker}\,(f^{n+1})$. Montrer que, pour tout entier m supérieur à n, on a alors :
$$\text{Ker}\,(f^m) = \text{Ker}\,(f^n)\,.$$
3. Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que la suite $(\dim\ (\text{Ker}(f^n)))_{n \geqslant n_0}$ soit constante et prouver que, si n_0 est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors $n_0 \leqslant N$.
4. En déduire que, si f est nilpotent, alors $f^N = 0$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une tribu.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canoniquement associée $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A.

1. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$
3. Montrer que u avec $u = 1 + X + X^2$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
4. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}_2[X]})$.
5. Soient $v = 1 - X + X^2$ et $w = 4 + 2X + X^2$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
8. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ (avec $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$). Expliciter P et montrer que P est inversible.
9. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définir ce que sont des évènements incompatibles puis des évènements indépendants.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X+1) + P(X)$. Soient n un entier naturel f_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f_n : P \mapsto P(X+1) + P(X)$.

1. Montrer que f_n est un isomorphisme.
2. Donner la matrice canoniquement associée à f_n. Quel est son rang ?
3. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$, n un entier naturel.

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$, en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$
4. Montrer que $u = (1,1,1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soit $v = (1,-1,1)$ et $w = (4,2,1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w.
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
9. On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule du crible pour deux évènements puis pour trois.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Calculer A^2. A est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}\,(f)$.
3. Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$ avec N un entier naturel non nul. On dit qu'un endomorphisme g de $\mathbb{R}^N$ est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $g^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{Ker}\,(f^n) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$.
2. On suppose, uniquement dans cette question, que n est un entier naturel tel que $\mathrm{Ker}\,(f^n) = \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$. Montrer que, pour tout entier m supérieur à n, on a alors :
$$\mathrm{Ker}\,(f^m) = \mathrm{Ker}\,(f^n)\,.$$
3. Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que la suite $(\dim\ (\mathrm{Ker}(f^n)))_{n \geqslant n_0}$ soit constante et prouver que, si n_0 est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors $n_0 \leqslant N$.
4. En déduire que, si f est nilpotent, alors $f^N = 0$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une tribu.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canoniquement associée $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A.

1. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$
3. Montrer que u avec $u = 1 + X + X^2$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
4. En déduire $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}_2[X]})$.
5. Soient $v = 1 - X + X^2$ et $w = 4 + 2X + X^2$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D.
8. On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ (avec $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$). Expliciter P et montrer que P est inversible.
9. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1}.