BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'un système complet d'évènements.

Exercice 1

Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et u l' endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ u(e_2) & = & e_2 + e_3 \\ u(e_3) & = & 2e_1 + 2e_4 \\ u(e_4) & = & 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \end{array}\right.$$

1. u est-elle bien définie ?
2. Préciser le noyau, le rang et l'image de u.
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, a réel, lorsque cela a du sens.
4. Recommencer l'exercice avec (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. On pose : $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$.
   (a) Montrer que H est une espace vectoriel et en donner sa dimension.
   (b) Est ce que H est le noyau d'une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
2. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, f(2e_1 + 3e_4) = e_2 \text{ et tel que } \mathrm{Ker}(f) \text{ soit :}$$

$$\left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\right\}.$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de l'image de f.
3. Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 2

Soit $D = \operatorname{Vect}((1,1,2))$ et $P = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de f, déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de P.
3. Vérifier que P et D sont supplémentaires, cela signifie que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans P et x_2 dans D.
4. Montrer que $f(D) \subset D$.
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Dire ce qu'est la propriété de σ-additivité.

Exercice 1

1. Soit : $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$. Montrer que g est un endomorphisme et étudier son injectivité puis sa surjectivité.
2. Pour tout fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\text{Pour tout réel } x\text{, on a : } (\varphi(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Recommencer la question précédente avec φ.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que A soit $P\,B\,P^{-1}$. On sait que cela signifie que A et B sont associées à une même application linéaire. On cherche des matrices inversibles semblables à leur inverse. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (5x-3y-z, 6x-4y-z, 2x-y)$$

et on note M la matrice canoniquement associée à f.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
2. (a) Déterminer un vecteur u_1 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Déterminer un vecteur u_2 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
   (c) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
4. Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une probabilité et donner un exemple.

Exercice 1

Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et u l' endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\begin{cases} u(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ u(e_2) &= e_2 + e_3 \\ u(e_3) &= 2e_1 + 2e_4 \\ u(e_4) &= 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \end{cases}$$

1. u est-elle bien définie ?
2. Préciser le noyau, le rang et l'image de u.
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, a réel, lorsque cela a du sens.
4. Recommencer l'exercice avec (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. On pose : $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$.
   (a) Montrer que H est une espace vectoriel et en donner sa dimension.
   (b) Est ce que H est le noyau d'une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
2. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, f(2e_1 + 3e_4) = e_2 \text{ et tel que } \mathrm{Ker}(f) \text{ soit :}$$

$$\left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0 \right\}.$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de l'image de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2

Soit $D = \mathrm{Vect}((1,1,2))$ et $P = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de f, déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de P.
3. Vérifier que P et D sont supplémentaires, cela signifie que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans P et x_2 dans D.
4. Montrer que $f(D) \subset D$.
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule des probabilités composées.

Exercice 1

1. Soit : $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$. Montrer que g est un endomorphisme et étudier son injectivité puis sa surjectivité.
2. Pour tout fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } (\varphi(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Recommencer la question précédente avec φ.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que A soit $P\,B\,P^{-1}$. On sait que cela signifie que A et B sont associées à une même application linéaire. On cherche des matrices inversibles semblables à leur inverse. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (5x-3y-z, 6x-4y-z, 2x-y)$$

et on note M la matrice canoniquement associée à f.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
2. (a) Déterminer un vecteur u_1 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Déterminer un vecteur u_2 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
   (c) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
4. Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une probabilité et donner un exemple.

Exercice 1

Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et u l' endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ u(e_2) & = & e_2 + e_3 \\ u(e_3) & = & 2e_1 + 2e_4 \\ u(e_4) & = & 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4 \end{array}\right.$$

1. u est-elle bien définie ?
2. Préciser le noyau, le rang et l'image de u.
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, a réel, lorsque cela a du sens.
4. Recommencer l'exercice avec (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. On pose : $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$.
   (a) Montrer que H est une espace vectoriel et en donner sa dimension.
   (b) Est ce que H est le noyau d'une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
2. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ alors :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3, f(2e_1 + 3e_4) = e_2 \text{ et tel que } \mathrm{Ker}(f) \text{ soit :}$$

$$\left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\right\}.$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f : P \mapsto P(X) + (1-X)P'(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de l'image de f.
3. Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 2

Soit $D = \operatorname{Vect}((1,1,2))$ et $P = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de f, déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de P.
3. Vérifier que P et D sont supplémentaires, cela signifie que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans P et x_2 dans D.
4. Montrer que $f(D) \subset D$.
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer la formule des probabilités composées.

Exercice 1

1. Soit : $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$. Montrer que g est un endomorphisme et étudier son injectivité puis sa surjectivité.
2. Pour tout fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } (\varphi(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Recommencer la question précédente avec φ.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que A soit $P\,B\,P^{-1}$. On sait que cela signifie que A et B sont associées à une même application linéaire. On cherche des matrices inversibles semblables à leur inverse. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (5x-3y-z, 6x-4y-z, 2x-y)$$

et on note M la matrice canoniquement associée à f.

1. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
2. (a) Déterminer un vecteur u_1 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Déterminer un vecteur u_2 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
   (c) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$, de première composante égale à 1, appartenant à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
4. Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.