BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir l'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Comment peut-on caractériser les applications linéaires surjectives ?

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}((-3,1,1,1),(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)).$$

1. Donner une base de $F \cap G$, puis sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. En déduire que $H = F \cap G$.
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Calculer $(A - I_3)^2(A - 2I_3)$ et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe trois réels $u_n,\ v_n,\ w_n$ tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 1 & 0 \\ v_n & w_n & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Expliciter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire A^n.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$

Exercice 1

1. Montrer que $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et y donner les coordonnées de X^2+X+1.
2. Trouver les bases de $\mathbb{R}^3$ parmi ces familles :
   (a) $((1,-1,0),(2,-1,2))$,
   (b) $((1,-1,0),(2,-1,2),(8,5,9),(7,6,17))$,
   (c) $((1,-1,0),(2,-1,2),((1,0,a)))$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on considère la fonction f_k définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k \exp(-x)$$

Soit F l'ensemble $\left\{ f \in E \text{ tel que : } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0_E \right\}$.

1. Soient f et g deux éléments de E. Prouver que $f \times g$ est un élément de E et :
$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
2. Montrer que F est un espace vectoriel.
3. Prouver que $(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ est une famille génératrice de F.
4. Donner une base de F.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Caractériser par le rang les notions d'applications linéaires injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On note S l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \ \forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que S est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.
3. Montrer que $\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$ est un sous- espace vectoriel de S et en donner une base.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Comment peut-on caractériser les applications linéaires injectives ?

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)).$$

1. Donner une base de $F \cap G$, puis sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. En déduire que $H = F \cap G$.
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Calculer $(A - I_3)^2(A - 2I_3)$ et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe trois réels u_n, v_n, w_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 1 & 0 \\ v_n & w_n & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Expliciter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire A^n.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Exercice 1

1. Montrer que $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et y donner les coordonnées de X^2+X+1.
2. Trouver les bases de $\mathbb{R}^3$ parmi ces familles :
   (a) $((1,-1,0),(2,-1,2))$,
   (b) $((1,-1,0),(2,-1,2),(8,5,9),(7,6,17))$,
   (c) $((1,-1,0),(2,-1,2),((1,0,a)))$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on considère la fonction f_k définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k \exp(-x)$$

Soit F l'ensemble $\left\{ f \in E \text{ tel que : } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0_E \right\}$.

1. Soient f et g deux éléments de E. Prouver que $f \times g$ est un élément de E et :
$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
2. Montrer que F est un espace vectoriel.
3. Prouver que $(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ est une famille génératrice de F.
4. Donner une base de F.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Caractériser par le rang les notions d'applications linéaires injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On note S l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que S est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.
3. Montrer que $\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$ est un sous- espace vectoriel de S et en donner une base.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir le noyau d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Comment peut-on caractériser les applications linéaires injectives ?

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}((-3,1,1,1),(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)).$$

1. Donner une base de $F \cap G$, puis sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. En déduire que $H = F \cap G$.
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

Exercice 2

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Calculer $(A - I_3)^2(A - 2I_3)$ et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe trois réels u_n, v_n, w_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 1 & 0 \\ v_n & w_n & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Expliciter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire A^n.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Exercice 1

1. Montrer que $((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et y donner les coordonnées de X^2+X+1.
2. Trouver les bases de $\mathbb{R}^3$ parmi ces familles :
   (a) $((1,-1,0),(2,-1,2))$,
   (b) $((1,-1,0),(2,-1,2),(8,5,9),(7,6,17))$,
   (c) $((1,-1,0),(2,-1,2),((1,0,a)))$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on considère la fonction f_k définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k \exp(-x)$$

Soit F l'ensemble $\left\{ f \in E \text{ tel que : } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0_E \right\}$.

1. Soient f et g deux éléments de E. Prouver que $f \times g$ est un élément de E et :
$$(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
2. Montrer que F est un espace vectoriel.
3. Prouver que $(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ est une famille génératrice de F.
4. Donner une base de F.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Caractériser par le rang les notions d'applications linéaires injectives, surjectives, bijectives.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On note S l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \ \forall n \in \mathbb{N}^\star \ , \ (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que S est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.
3. Montrer que $\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$ est un sous- espace vectoriel de S et en donner une base.