BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } xy = 0 \}$,
2. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule} \}$,
3. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ arithmétique} \right\}$,
4. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ convergente} \right\}$,
5. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ est monotone} \}$.

Exercice 2

On pose : $P = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0 \}$ et :

$$Q = \text{ Vect } \left((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 3, 0, 1) \right).$$

1. Démontrer que P est un espace vectoriel.
2. Déterminez une base et la dimension des espaces P et Q.
3. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.
4. Expliciter $P \cap Q$.
5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique couple (v_1, v_2) tel que v_1 appartienne à Q, v_2 appartienne à P et $v = v_1 + v_2$.
6. Recommencer l'exercice avec :

$$P = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0 \right\}$$

et :

$$Q = \text{ Vect } \left(1 + X + X^3, 1 + 2X^3, 2 + 3X + X^3 \right).$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du noyau d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x = y \}$,
2. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule en } 0 \}$,
3. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x^2 + y^2 = 0 \}$,
4. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ monotone} \right\}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit $e_1 = (1, -1, -1, 0)$ ainsi que :

$$e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1 + \lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1 + \lambda, -1 - \lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$. λ désigne dans cet exercice un réel.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension
2. Déterminer la dimension de V_λ et en déduire une base de V_λ.
3. Donner des équations cartésiennes de V_{-1}.
4. Expliciter $U \cap V_{-1}$.
5. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du noyau et de l'image d'une matrice.

Exercice 1

1. Donner une base et la dimension de $F = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \text{ tel que : } x - 2y + z = 0\}$, de $G = \{(a, a+b, b) \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et de :
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0 \right\}.$$
2. Soient A et B les ensembles suivants :
$$A = \left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 3y - 2z = 0\right\}$$
$$B = \left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x - y + z + t = x - t = 0\right\}.$$
Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels puis déterminer une base de A, de B puis de $A \cap B$.

Exercice 2

Pour tout réel t, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(t)A(s)$ pour tous réels t et s.
2. Calculer $(A(t))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que cette formule est encore valable pour tous les entiers $n < 0$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'un isomorphisme et d'une forme linéaire.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } xy = 0\}$,
2. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule}\}$,
3. $E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$,
4. $E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ convergente}\right\}$,
5. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ est monotone}\}$.

Exercice 2

On pose : $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\}$ et :

$$Q = \text{ Vect } ((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 3, 0, 1)).$$

1. Démontrer que P est un espace vectoriel.
2. Déterminez une base et la dimension des espaces P et Q.
3. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.
4. Expliciter $P \cap Q$.
5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique couple (v_1, v_2) tel que v_1 appartienne à Q, v_2 appartienne à P et $v = v_1 + v_2$.
6. Recommencer l'exercice avec :

$$P = \left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\right\}$$

et :

$$Q = \text{ Vect } \left(1 + X + X^3, 1 + 2X^3, 2 + 3X + X^3\right).$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du noyau d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x = y\,\}$,
2. $E = \{\,f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule en } 0\,\}$,
3. $E = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x^2 + y^2 = 0\,\}$,
4. $E = \left\{\,(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ monotone}\,\right\}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit $e_1 = (1, -1, -1, 0)$ ainsi que :

$$e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1 + \lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1 + \lambda, -1 - \lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$. λ désigne dans cet exercice un réel.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension
2. Déterminer la dimension de V_λ et en déduire une base de V_λ.
3. Donner des équations cartésiennes de V_{-1}.
4. Expliciter $U \cap V_{-1}$.
5. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 1

1. Donner une base et la dimension de $F = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \text{ tel que : } x - 2y + z = 0\}$, de $G = \{(a, a+b, b) \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et de :
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0 \right\}.$$
2. Soient A et B les ensembles suivants :
$$A = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 3y - 2z = 0 \right\}$$
$$B = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x - y + z + t = x - t = 0 \right\}.$$
Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels puis déterminer une base de A, de B puis de $A \cap B$.

Exercice 2

Pour tout réel t, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(t)A(s)$ pour tous réels t et s.
2. Calculer $(A(t))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que cette formule est encore valable pour tous les entiers $n < 0$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'un isomorphisme et d'une forme linéaire.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } xy = 0 \}$,
2. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule} \}$,
3. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ arithmétique} \right\}$,
4. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ convergente} \right\}$,
5. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ est monotone} \}$.

Exercice 2

On pose : $P = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0 \}$ et :

$$Q = \text{ Vect } ((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 3, 0, 1)) .$$

1. Démontrer que P est un espace vectoriel.
2. Déterminez une base et la dimension des espaces P et Q.
3. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.
4. Expliciter $P \cap Q$.
5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique couple (v_1, v_2) tel que v_1 appartienne à Q, v_2 appartienne à P et $v = v_1 + v_2$.
6. Recommencer l'exercice avec :

   $$P = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0 \right\}$$

   et :

   $$Q = \text{ Vect } \left(1 + X + X^3, 1 + 2X^3, 2 + 3X + X^3\right) .$$

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du noyau d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 1

Dire si les espaces suivants sont ou non des espaces vectoriels (Preuve attendue!) :

1. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x = y \}$,
2. $E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tel que : } f \text{ s'annule en } 0 \}$,
3. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } x^2 + y^2 = 0 \}$,
4. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que : } (u_n) \text{ monotone} \right\}$.

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit $e_1 = (1, -1, -1, 0)$ ainsi que :

$$e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1 + \lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1 + \lambda, -1 - \lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$. λ désigne dans cet exercice un réel.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension
2. Déterminer la dimension de V_λ et en déduire une base de V_λ.
3. Donner des équations cartésiennes de V_{-1}.
4. Expliciter $U \cap V_{-1}$.
5. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 1

1. Donner une base et la dimension de $F = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \text{ tel que : } x - 2y + z = 0\}$, de $G = \{(a, a+b, b) \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et de :
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que : } x + 2y + z = 0 \text{ et } y + z - 2t = 0 \right\}.$$
2. Soient A et B les ensembles suivants :
$$A = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x + 3y - 2z = 0 \right\}$$
$$B = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } x - y + z + t = x - t = 0 \right\}.$$
Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels puis déterminer une base de A, de B puis de $A \cap B$.

Exercice 2

Pour tout réel t, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(t)A(s)$ pour tous réels t et s.
2. Calculer $(A(t))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que cette formule est encore valable pour tous les entiers $n < 0$.