BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice 1

1. Soient a et b deux réels. Existence de :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)}dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}}$.

Exercice 2

Pour tout n entier naturel, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$. Fixons n un entier naturel.

1. Prouver que : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ et $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
2. En déduire un équivalent de $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que $\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n}$ pour tout x dans $[0,\sqrt{n}]$.
4. Appliquer le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}dx$.
5. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$ à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
6. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition du rang d'une famille de vecteurs, utilisation pour caractériser les familles libres, les familles génératrices, les bases.

Exercice 1

1. Existence et calcul éventuel de :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{1+x}\right) dx.$$
2. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$, puis la calculer.

Exercice 2

1. Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$.
2. Pour tout entier naturel n, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel

Exercice 1

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on souhaite déterminer la nature de :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}.$$

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
2. On suppose $\alpha > 1$. En déduire que l'intégrale étudiée est convergente.
3. Soit b un réel strictement supérieur à e. Calculer $\displaystyle\int_e^b \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
4. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\dfrac{1}{t}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 2

On considère les trois intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\, dx$$

Montrer que I, J et K sont de même nature. En déduire la nature de I.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!
Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice 1

1. Soient a et b deux réels. Existence de :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)}dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}}$.

Exercice 2

Pour tout n entier naturel, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$. Fixons n un entier naturel.

1. Prouver que : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ et $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
2. En déduire un équivalent de $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que $\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n}$ pour tout x dans $[0, \sqrt{n}]$.
4. Appliquer le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} dx$.
5. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$ à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
6. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Que peut-on dire de l'union d'espaces vectoriels ? Que peut-on dire de l'intersection d'espaces vectoriels ?

Exercice 1

1. Existence et calcul éventuel de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right) dx.$$

2. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$, puis la calculer.

Exercice 2

1. Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.
2. Pour tout entier naturel n, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définir la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel

Exercice 1

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on souhaite déterminer la nature de :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}.$$

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
2. On suppose $\alpha > 1$. En déduire que l'intégrale étudiée est convergente.
3. Soit b un réel strictement supérieur à e. Calculer $\displaystyle\int_e^b \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
4. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\dfrac{1}{t}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 2

On considère les trois intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\, dx$$

Montrer que I, J et K sont de même nature. En déduire la nature de I.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice 1

1. Soient a et b deux réels. Existence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(1+x^2)}dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}}$.

Exercice 2

Pour tout n entier naturel, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$. Fixons n un entier naturel.

1. Prouver que : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$, $1 \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}$ et $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
2. En déduire un équivalent de $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que $\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n}$ pour tout x dans $[0, \sqrt{n}]$.
4. Appliquer le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ à $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}dx$.
5. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$ à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
6. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Que peut-on dire de l'union d'espaces vectoriels ? Que peut-on dire de l'intersection d'espaces vectoriels ?

Exercice 1

1. Existence et calcul éventuel de :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right) dx.$$
2. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$, puis la calculer.

Exercice 2

1. Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$.
2. Pour tout entier naturel n, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel

Exercice 1

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on souhaite déterminer la nature de :

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}.$$

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
2. On suppose $\alpha > 1$. En déduire que l'intégrale étudiée est convergente.
3. Soit b un réel strictement supérieur à e. Calculer $\displaystyle\int_e^b \frac{dx}{x(\ln(x))^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
4. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\dfrac{1}{t}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 2

On considère les trois intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\, dx$$

Montrer que I, J et K sont de même nature. En déduire la nature de I.