BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelles sont les opérations élémentaires que l'on peut faire sur les lignes d'un système linéaire ?
Quelles opérations peut-on effectuer sur les lignes ou colonnes d'une matrice sans en modifier le rang ?

Exercice 1

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ en posant $u=\sqrt{t}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}dx.$$

1. Montrer que I_n est convergente et la calculer.
2. Montrer que J_n est convergente et la calculer.
3. Montrer que $(I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et en déduire un équivalent de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définir la notion de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel ou complexe

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}}dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice 2

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente puis, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x}dx$.
   (a) Montrer I_n est bien définie.
   (b) Montrer que $f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}dx$. Calculer J_n.
   (d) Exprimer I_n à l'aide de J_n et en déduire $\lim_{n\to+\infty} (I_n)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une famille libre $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} t\sin(t)\exp(-t)dt \text{ et } \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\exp\left(-\sqrt{t}\right)dt$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Étudier la nature et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt$.
4. Classer $e^{-t^2x}, e^{-n^2x},\ e^{-(n+1)^2x}$ où n est la partie entière de t et t un réel strictement positif.
5. En déduire un encadrement de f.
6. Déterminer la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'une matrice carrée 2×2 pour qu'elle soit inversible. Dans ce cas, exprimer les coefficients de la matrice inverse en fonction des coefficients de la matrice de départ.

Exercice 1

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}dx.$$

1. Montrer que I_n est convergente et la calculer.
2. Montrer que J_n est convergente et la calculer.
3. Montrer que $(I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et en déduire un équivalent de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quand peut-on appliquer la formule du binôme pour deux matrices ? Écrire alors cette formule.

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}}dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice 2

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente puis, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x}dx$.

   (a) Montrer I_n est bien définie.

   (b) Montrer que $f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (c) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}dx$. Calculer J_n.

   (d) Exprimer I_n à l'aide de J_n et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une famille génératrice (finie) dans un espace vectoriel E.

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} t\sin(t)\exp(-t)dt \text{ et } \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\exp\left(-\sqrt{t}\right)dt$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Étudier la nature et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt$.
4. Classer $e^{-t^2x}, e^{-n^2x},\ e^{-(n+1)^2x}$ où n est la partie entière de t et t un réel strictement positif.
5. En déduire un encadrement de f.
6. Déterminer la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'une matrice carrée 2×2 pour qu'elle soit inversible. Dans ce cas, exprimer les coefficients de la matrice inverse en fonction des coefficients de la matrice de départ.

Exercice 1

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ en posant $u=\sqrt{t}$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}dx.$$

1. Montrer que I_n est convergente et la calculer.
2. Montrer que J_n est convergente et la calculer.
3. Montrer que $(I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et en déduire un équivalent de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Quand peut-on appliquer la formule du binôme pour deux matrices ? Écrire alors cette formule.

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}}dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice 2

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente puis, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x}dx$.
   (a) Montrer I_n est bien définie.
   (b) Montrer que $f : \begin{cases} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}dx$. Calculer J_n.
   (d) Exprimer I_n à l'aide de J_n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définition d'une famille génératrice (finie) dans un espace vectoriel E.

Exercice 1

1. Donner la nature des intégrales suivantes :
$$\int_0^{+\infty} t\sin(t)\exp(-t)dt \text{ et } \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\exp\left(-\sqrt{t}\right)dt$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Étudier la nature et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt$.
4. Classer $e^{-t^2x}, e^{-n^2x},\ e^{-(n+1)^2x}$ où n est la partie entière de t et t un réel strictement positif.
5. En déduire un encadrement de f.
6. Déterminer la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.