BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer la proposition sur la convergence absolue pour une intégrale généralisée. Si la condition citée n'est pas nécessaire, donner, sans preuve, un contre-exemple.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\dfrac{2^n}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{n! + 3^n}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Exercice 2

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} [2; +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :
$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}.$$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ et un équivalent de la suite de ses sommes partielles.

BCPST2 **Sujet 2** — Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 — https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ et celle de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{7}{n^4 + 2^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\dfrac{n}{\pi^n}\right)$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^{2n+1}}{(2n)!}$,
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin(2n)2^n}{n!}$.

Exercice 2

Soit u_0 un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une relation entre $\ln(u_n)$ et S_{n-1} .
2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_k$.
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série $\sum u_k$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t}dt$ et celle de $\displaystyle\int_2^0 \frac{1}{t^2}dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =,$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right).$
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \frac{3^n}{(2+n)!},$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\frac{1}{n+n^2+1}\right).$

Exercice 2

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, en déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. Soit p un entier naturel. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^p$ suivant les valeurs de p.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t}dt$ et celle de $\displaystyle\int_2^0 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\frac{2^n}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{n! + 3^n}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Exercice 2

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} [2;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :
$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}.$$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ et un équivalent de la suite de ses sommes partielles.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de majoration pour les intégrales généralisées.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{7}{n^4 + 2^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\dfrac{n}{\pi^n}\right)$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^{2n+1}}{(2n)!}$,
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin(2n)2^n}{n!}$.

Exercice 2

Soit u_0 un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une relation entre $\ln(u_n)$ et S_{n-1} .
2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_k$.
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série $\sum u_k$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =,$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}\right).$
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \dfrac{3^n}{(2+n)!},$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n+n^2+1}\right).$

Exercice 2

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, en déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. Soit p un entier naturel. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^p$ suivant les valeurs de p.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t}dt$ et celle de $\displaystyle\int_2^0 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\dfrac{2^n}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{n! + 3^n}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{3^n}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Exercice 2

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} [2;+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :
$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}.$$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ et un équivalent de la suite de ses sommes partielles.

BCPST2 **Sujet 2** — Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 — https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de majoration pour les intégrales généralisées.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{7}{n^4 + 2^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\dfrac{n}{\pi^n}\right)$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^{2n+1}}{(2n)!}$,
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin(2n)2^n}{n!}$.

Exercice 2

Soit u_0 un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une relation entre $\ln(u_n)$ et S_{n-1} .
2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_k$.
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série $\sum u_k$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$?

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =,$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right).$
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \dfrac{3^n}{(2+n)!},$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n+n^2+1}\right).$

Exercice 2

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, en déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. Soit p un entier naturel. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^p$ suivant les valeurs de p.