BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Si $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$, déterminer l'expression d'une de ses primitives sur l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 1

1. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (Existence ? ?) avec :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Exercice 2

Soient $f : t \mapsto \dfrac{t^2-2\pi t}{2\pi}$ et $g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ deux fonctions définies sur $[0,\pi]$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1. Démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ puis de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(kt)dt$ avec k entier supérieur à 1.
3. Démontrer que, pour tout t de $]0,\pi]$, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\right) = 0$.
5. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0,+\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction :$x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n(n+1)}{3^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ existe et qu'on a :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$
2. En déduire un programme Python qui calcule une valeur approchée de e à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).
3. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge et donner un programme Python qui calcule une valeur approchée de sa somme à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\, dt$ puis de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\, dt$.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2 + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt$ et en déduire que $(R_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.
2. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2 et pour tout entier p strictement supérieur à n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2}$ et une intégrale et en déduire une majoration de $(R_n)_{n\geqslant 1}$ par une autre suite.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la définition de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ si f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1

1. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (Existence ? ?) avec :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Exercice 2

Soient $f : t \mapsto \dfrac{t^2-2\pi t}{2\pi}$ et $g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ deux fonctions définies sur $[0,\pi]$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1. Démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ puis de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$ avec k entier supérieur à 1.
3. Démontrer que, pour tout t de $]0,\pi]$, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\right) = 0$.
5. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la dérivée et une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n(n+1)}{3^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ existe et qu'on a :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$
2. En déduire un programme Python qui calcule une valeur approchée de e à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).
3. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge et donner un programme Python qui calcule une valeur approchée de sa somme à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2 + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\, dt$ et en déduire que $(R_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.
2. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2 et pour tout entier p strictement supérieur à n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2}$ et une intégrale et en déduire une majoration de $(R_n)_{n\geqslant 1}$ par une autre suite.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la définition de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ si f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 1

1. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (Existence ? ?) avec :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Exercice 2

Soient $f : t \mapsto \dfrac{t^2-2\pi t}{2\pi}$ et $g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ deux fonctions définies sur $[0,\pi]$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

1. Démontrer la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ puis de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$ avec k entier supérieur à 1.
3. Démontrer que, pour tout t de $]0,\pi]$, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\right) = 0$.
5. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

BCPST2 **Sujet 2** — Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 — https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la dérivée et une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n(n+1)}{3^n}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2-1}$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ existe et qu'on a :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$
2. En déduire un programme Python qui calcule une valeur approchée de e à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).
3. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge et donner un programme Python qui calcule une valeur approchée de sa somme à ε près (ε réel strictement positif choisi par l'utilisateur).

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées.

Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général u_n convergent avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2 + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.
2. Expliciter les sommes des séries de terme général u_n (après avoir prouvé leur existence) avec :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$,
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,dt$ et en déduire que $(R_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.
2. Comparer, pour tout entier n supérieur à 2 et pour tout entier p strictement supérieur à n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2}$ et une intégrale et en déduire une majoration de $(R_n)_{n\geqslant 1}$ par une autre suite.