BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Calcul de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice 1

1. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$. Vérifier que $(1+i)$ est une racine de P et en déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de P puis une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient a, b des réels et $P = X^4 + 2aX^3 + bX + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et de b le polynôme P est il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2

On considère les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels vérifiant :

$$P_0 = 2,\ P_1 = X,\ \text{et}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. (a) Déterminer P_2, P_3, P_4 et P_5.
   (b) Factoriser P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Écrire en langage `Python` une fonction `Poly(n,x)` qui renvoie la valeur de $P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier au maximum $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ pour tout entier $n \in [\![1, 4]\!]$.
   Conjecturer une formule portant sur $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.
5. En déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Convergence et somme de séries exponentielles et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Exercice 1

L'objectif est de résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

1. On suppose ici que $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ est solution du système (S).
   (a) On pose $a = \frac{x}{z}$ et $b = \frac{y}{z}$. Montrer que a et b sont racines d'un polynôme que l'on déterminera.
   (b) En notant $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$, en déduire que
   $$(x, y, z) = (x, xj, xj^2) \qquad \text{ou} \qquad (x, y, z) = (x, xj^2, xj).$$
   (c) Factoriser $X^3 - 1$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 2

1. Déterminer les racines de $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.
2. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P''(X) = 6P(X)$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c trois complexes tel que $a \neq 0$. On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de P. Expliciter $r_1 \times r_2$ et $r_1 + r_2$ en fonction de a, b et c. On appelle ces deux égalités les relations coefficients-racines.
2. Déterminer les trois relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 3.
3. (a) Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

   (b) Soit $P = X^3 + X + 1$. Calculer $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$ avec α_1, α_2 et α_3 les racines complexes de P.

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n (n entier naturel) ayant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le résultat sur les séries télescopiques.

Exercice 1

1. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$. Vérifier que $(1+i)$ est une racine de P et en déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de P puis une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient a, b des réels et $P = X^4 + 2aX^3 + bX + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et de b le polynôme P est il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2

On considère les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels vérifiant :

$$P_0 = 2,\ P_1 = X,\ \text{et}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. (a) Déterminer P_2, P_3, P_4 et P_5.
   (b) Factoriser P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Écrire en langage `Python` une fonction `Poly(n,x)` qui renvoie la valeur de $P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier au maximum $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ pour tout entier $n \in [\![1, 4]\!]$. Conjecturer une formule portant sur $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.
5. En déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$ avec n entier naturel.

Exercice 1

L'objectif est de résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

1. On suppose ici que $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ est solution du système (S).
   (a) On pose $a = \dfrac{x}{z}$ et $b = \dfrac{y}{z}$. Montrer que a et b sont racines d'un polynôme que l'on déterminera.
   (b) En notant $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$, en déduire que
   $$(x, y, z) = (x, xj, xj^2) \qquad \text{ou} \qquad (x, y, z) = (x, xj^2, xj).$$
   (c) Factoriser $X^3 - 1$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 2

1. Déterminer les racines de $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.
2. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P''(X) = 6P(X)$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c trois complexes tel que $a \neq 0$. On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de P. Expliciter $r_1 \times r_2$ et $r_1 + r_2$ en fonction de a, b et c. On appelle ces deux égalités les relations coefficients-racines.
2. Déterminer les trois relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 3.
3. (a) Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

   (b) Soit $P = X^3 + X + 1$. Calculer $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$ avec α_1, α_2 et α_3 les racines complexes de P.

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n (n entier naturel) ayant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le résultat sur les séries télescopiques.

Exercice 1

1. Soit $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$. Vérifier que $(1+i)$ est une racine de P et en déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de P puis une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient a, b des réels et $P = X^4 + 2aX^3 + bX + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et de b le polynôme P est il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2

On considère les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels vérifiant :

$$P_0 = 2,\ P_1 = X,\ \text{et}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. (a) Déterminer P_2, P_3, P_4 et P_5.
   (b) Factoriser P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Écrire en langage `Python` une fonction `Poly(n,x)` qui renvoie la valeur de $P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier au maximum $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right)$ pour tout entier $n \in [\![1, 4]\!]$.
   Conjecturer une formule portant sur $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.
5. En déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$ avec n entier naturel.

Exercice 1

L'objectif est de résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \end{cases}$$

1. On suppose ici que $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ est solution du système (S).
   (a) On pose $a = \dfrac{x}{z}$ et $b = \dfrac{y}{z}$. Montrer que a et b sont racines d'un polynôme que l'on déterminera.
   (b) En notant $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$, en déduire que
   $$(x, y, z) = (x, xj, xj^2) \qquad \text{ou} \qquad (x, y, z) = (x, xj^2, xj).$$
   (c) Factoriser $X^3 - 1$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 2

1. Déterminer les racines de $P = 8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.
2. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P''(X) = 6P(X)$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 5 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c trois complexes tel que $a \neq 0$. On note r_1 et r_2 les deux racines complexes de P. Expliciter $r_1 \times r_2$ et $r_1 + r_2$ en fonction de a, b et c. On appelle ces deux égalités les relations coefficients-racines.
2. Déterminer les trois relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 3.
3. (a) Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

   (b) Soit $P = X^3 + X + 1$. Calculer $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$ avec α_1, α_2 et α_3 les racines complexes de P.

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n (n entier naturel) ayant n racines réelles distinctes.

1. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.