BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Pour $|q| < 1$, donner l'expression des sommes suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exercice 1

On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$.

1. Factoriser $X^5 - 1$.
2. Calculer ω^5. En déduire la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
3. Montrer que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ et $\omega^4 = \overline{\omega}$. En déduire des expressions de $\omega^2 + \omega^3$ et de $\omega + \omega^4$ faisant intervenir des cosinus d'angles qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Montrer que $\omega^2 + \omega^3$ et $\omega + \omega^4$ sont les racines d'un polynôme de degré 2 que l'on déterminera. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1$.
2. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$.
3. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $z_k \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

1. Calculer $(z_k)^n$.
2. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On pose $P = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$. Calculer $(X-1)P(X)$.
4. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme P.
5. En considérant $P(1)$ et $P(-1)$, en déduire les valeurs des deux produits suivants : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 2

1. Soit Q un polynôme et m un entier supérieur à son degré.

   (a) Prouver que : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

   (b) En déduire que : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$.

2. On considère le polynôme P défini par : $P(X) = \dfrac{X^n (X-1)^n}{n!}$.

   (a) Donner les valeurs de $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k tel que k n'appartienne pas à $[\![n, 2n]\!]$.

   (b) Montrer que :

   $$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} \, P^{(n+k)}(0) \, X^k$$

   et en déduire, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(0)$.

   (c) Par la même méthode, calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de majoration pour les séries.

Exercice 1

Soient x, y et z trois nombres complexes deux à deux distincts.

1. Trouver trois polynômes P_x, P_y et P_z, chacun de degré au plus 2, tels que :

$$\left\{ P_x(y) = P_x(z) = P_y(x) = P_y(z) = P_z(x) = P_z(y) = 0, P_x(x) = P_y(y) = P_z(z) = 1. \right.$$

2. Soient a, b, c trois nombres complexes. On pose $P = aP_x + bP_y + cP_z$. Justifier que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$P(x) = a, \quad P(y) = b \quad \text{et} \quad P(z) = c.$$

3. En déduire tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$P(-1) = 2 \quad \text{et} \quad P(1) = 3$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes complexes P vérifiant :

$$P(X^2) = P(X+1)P(X).$$

1. Déterminer les polynômes constants solutions du problème.
2. Soit P un polynôme solution de l'équation et de degré supérieur ou égal à 1. On note a une racine de P dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que a^2 est aussi racine de P. Qu'en déduire par récurrence ?
   (b) Montrer que $a = 0$ ou que $|a| = 1$.
   (c) Montrer que $(a-1)^2$ est aussi racine de P.
   (d) En déduire que $a = 0$ ou $a = 1$.
3. Conclure.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}\right)^2$.

Exercice 1

On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$.

1. Factoriser $X^5 - 1$.
2. Calculer ω^5. En déduire la valeur de $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
3. Montrer que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ et $\omega^4 = \overline{\omega}$. En déduire des expressions de $\omega^2+\omega^3$ et de $\omega+\omega^4$ faisant intervenir des cosinus d'angles qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Montrer que $\omega^2+\omega^3$ et $\omega+\omega^4$ sont les racines d'un polynôme de degré 2 que l'on déterminera. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = (P(X))^2 + 1$.
2. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$.
3. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Énoncer le résultat sur les séries télescopiques.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $z_k \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

1. Calculer $(z_k)^n$.
2. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On pose $P = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$. Calculer $(X-1)P(X)$.
4. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme P.
5. En considérant $P(1)$ et $P(-1)$, en déduire les valeurs des deux produits suivants : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 2

1. Soit Q un polynôme et m un entier supérieur à son degré.
   (a) Prouver que : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
   (b) En déduire que : $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P(X) = \dfrac{X^n(X-1)^n}{n!}$.
   (a) Donner les valeurs de $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k tel que k n'appartienne pas à $[\![n, 2n]\!]$.
   (b) Montrer que :
   $$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!}\ P^{(n+k)}(0)\ X^k$$
   et en déduire, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(0)$.
   (c) Par la même méthode, calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Expliquer, pour les séries, le concept de convergence absolue et son intérêt.

Exercice 1

Soient x, y et z trois nombres complexes deux à deux distincts.

1. Trouver trois polynômes P_x, P_y et P_z, chacun de degré au plus 2, tels que :

$$\left\{ P_x(y) = P_x(z) = P_y(x) = P_y(z) = P_z(x) = P_z(y) = 0, P_x(x) = P_y(y) = P_z(z) = 1. \right.$$

2. Soient a, b, c trois nombres complexes. On pose $P = aP_x + bP_y + cP_z$. Justifier que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$P(x) = a, \quad P(y) = b \quad \text{et} \quad P(z) = c.$$

3. En déduire tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$P(-1) = 2 \quad \text{et} \quad P(1) = 3$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes complexes P vérifiant :

$$P(X^2) = P(X+1)P(X).$$

1. Déterminer les polynômes constants solutions du problème.
2. Soit P un polynôme solution de l'équation et de degré supérieur ou égal à 1. On note a une racine de P dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que a^2 est aussi racine de P. Qu'en déduire par récurrence ?
   (b) Montrer que $a = 0$ ou que $|a| = 1$.
   (c) Montrer que $(a-1)^2$ est aussi racine de P.
   (d) En déduire que $a = 0$ ou $a = 1$.
3. Conclure.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}\right)^2$.

Exercice 1

On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$.

1. Factoriser $X^5 - 1$.
2. Calculer ω^5. En déduire la valeur de $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$.
3. Montrer que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$ et $\omega^4 = \overline{\omega}$. En déduire des expressions de $\omega^2+\omega^3$ et de $\omega+\omega^4$ faisant intervenir des cosinus d'angles qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Montrer que $\omega^2+\omega^3$ et $\omega+\omega^4$ sont les racines d'un polynôme de degré 2 que l'on déterminera. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2

1. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = (P(X))^2 + 1$.
2. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$.
3. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Énoncer le résultat sur les séries télescopiques.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $z_k \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

1. Calculer $(z_k)^n$.
2. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On pose $P = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$. Calculer $(X-1)P(X)$.
4. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme P.
5. En considérant $P(1)$ et $P(-1)$, en déduire les valeurs des deux produits suivants : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 2

1. Soit Q un polynôme et m un entier supérieur à son degré.
   (a) Prouver que : $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
   (b) En déduire que : $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P(X) = \frac{X^n (X-1)^n}{n!}$.
   (a) Donner les valeurs de $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k tel que k n'appartienne pas à $[\![n, 2n]\!]$.
   (b) Montrer que :
   $$(X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n+k)!} P^{(n+k)}(0) X^k$$
   et en déduire, pour tout entier naturel k, $P^{(k)}(0)$.
   (c) Par la même méthode, calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier naturel k.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 6 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Expliquer, pour les séries, le concept de convergence absolue et son intérêt.

Exercice 1

Soient x, y et z trois nombres complexes deux à deux distincts.

1. Trouver trois polynômes P_x, P_y et P_z, chacun de degré au plus 2, tels que :

$$\left\{ P_x(y) = P_x(z) = P_y(x) = P_y(z) = P_z(x) = P_z(y) = 0, P_x(x) = P_y(y) = P_z(z) = 1. \right.$$

2. Soient a, b, c trois nombres complexes. On pose $P = aP_x + bP_y + cP_z$. Justifier que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$P(x) = a, \quad P(y) = b \quad \text{et} \quad P(z) = c.$$

3. En déduire tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$P(-1) = 2 \quad \text{et} \quad P(1) = 3$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes complexes P vérifiant :

$$P(X^2) = P(X+1)P(X).$$

1. Déterminer les polynômes constants solutions du problème.
2. Soit P un polynôme solution de l'équation et de degré supérieur ou égal à 1. On note a une racine de P dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que a^2 est aussi racine de P. Qu'en déduire par récurrence ?
   (b) Montrer que $a = 0$ ou que $|a| = 1$.
   (c) Montrer que $(a-1)^2$ est aussi racine de P.
   (d) En déduire que $a = 0$ ou $a = 1$.
3. Conclure.