BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir degré, coefficient dominant, terme dominant et terme constant d'un polynôme P. Précisez ce qu'est un polynôme unitaire ou normalisé.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{2}\right)^{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x(\exp(x)+1)-2(\exp(x)-1)}{x^3}\right)$

puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x\mapsto \exp\left(\sqrt{\cos(x)}\right)$.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions : $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt\end{cases}$. La courbe représentative de g dans le plan P sera notée Γ.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, on a :
$$\arctan(2x)-\arctan(x)\leqslant g(x)\leqslant \frac{1}{2x}.$$
3. En déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(g(x))$.
4. Déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
5. Démontrer que g admet un développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0.
6. Étudier la parité de g et montrer que : $g(x)\underset{0}{=}x-\dfrac{7}{6}x^3-\dfrac{31}{40}x^5+o\left(x^6\right)$.
7. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
8. Déterminer la position relative de la courbe g et de sa tangente au point d'abscisse 0 et enfin tracer la courbe Γ.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Comment peut-on caractériser les polynômes pairs ? Donnez un polynôme pair et un polynôme non pair.

Exercice 1

Pour tout λ réel positif, on pose $P_\lambda : x \mapsto x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrer que, pour tout λ réel positif, P_λ a une unique racine réelle, on la note $u(\lambda)$.
2. Montrer que u est monotone et continue te calculer ses limites.

Exercice 2

Des observations en laboratoire ont montré que l'évolution d'une population de paramécies en milieu nutritif satisfait à l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y \text{ (d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } \mathbb{R}_+)$$

où r et K sont deux réels strictement positifs et $y(0)$ est connue et strictement positif. On admet que les solutions non constantes de (E) sur $[0, +\infty[$ ne prennent jamais la valeur d'un équilibre sur $[0, +\infty[$. Soit φ une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ non constante et telle que $\varphi(0) > K$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+, \ \varphi(t) > K$.
2. Trouver deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, K\}, \ \frac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - K}$$
et en déduire une primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$ sur $]K, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) - K} = e^{r(t+C)}$$
4. Expliciter φ puis étudier ses variations sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir $\mathbb{R}_3[X]$ et dire ce qu'est un polynôme irréductible.

Exercice 1

Pour tout réel x strictement positif différent de 1, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Donner les variations de f.
2. Déduire du calcul de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt$ (avec x réel strictement positif différent de 1) un encadrement de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

1. Étudier f ainsi que ses branches infinies.
2. Montrer que f est bijective et donner l'expression de f^{-1}.
3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans le même repère.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Expliquer la décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{2}\right)^{x^2}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x(\exp(x)+1)-2(\exp(x)-1)}{x^3}\right)$ puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x\mapsto\exp\left(\sqrt{\cos(x)}\right)$.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions : $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto\displaystyle\int_x^{2x}f(t)dt\end{cases}$. La courbe représentative de g dans le plan P sera notée Γ.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, on a :
$$\arctan(2x)-\arctan(x)\leqslant g(x)\leqslant\frac{1}{2x}.$$
3. En déduire $\lim_{x\longrightarrow+\infty}(g(x))$.
4. Déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
5. Démontrer que g admet un développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0.
6. Étudier la parité de g et montrer que : $g(x)\underset{0}{=}x-\frac{7}{6}x^3-\frac{31}{40}x^5+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.
7. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
8. Déterminer la position relative de la courbe g et de sa tangente au point d'abscisse 0 et enfin tracer la courbe Γ.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Qu'appelle-t-on polynôme irréductible ? Citez un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais non irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1

Pour tout λ réel positif, on pose $P_\lambda : x \mapsto x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrer que, pour tout λ réel positif, P_λ a une unique racine réelle, on la note $u(\lambda)$.
2. Montrer que u est monotone et continue te calculer ses limites.

Exercice 2

Des observations en laboratoire ont montré que l'évolution d'une population de paramécies en milieu nutritif satisfait à l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y \text{ (d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } \mathbb{R}_+)$$

où r et K sont deux réels strictement positifs et $y(0)$ est connue et strictement positif. On admet que les solutions non constantes de (E) sur $[0, +\infty[$ ne prennent jamais la valeur d'un équilibre sur $[0, +\infty[$. Soit φ une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ non constante et telle que $\varphi(0) > K$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) > K$.
2. Trouver deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, K\},\ \frac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - K}$$
et en déduire une primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$ sur $]K, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) - K} = e^{r(t+C)}$$
4. Expliciter φ puis étudier ses variations sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Définir la notion de racine d'un polynôme et préciser ce qu'on peut dire en terme de divisibilité.

Exercice 1

Pour tout réel x strictement positif différent de 1, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Donner les variations de f.
2. Déduire du calcul de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt$ (avec x réel strictement positif différent de 1) un encadrement de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

1. Étudier f ainsi que ses branches infinies.
2. Montrer que f est bijective et donner l'expression de f^{-1}.
3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans le même repère.

BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Expliquer la décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{2}\right)^{x^2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x(\exp(x)+1)-2(\exp(x)-1)}{x^3}\right)$

puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x\mapsto \exp\left(\sqrt{\cos(x)}\right)$.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions : $f : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\end{cases}$ et $g : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt\end{cases}$. La courbe représentative de g dans le plan P sera notée Γ.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de g.
2. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, on a :
$$\arctan(2x)-\arctan(x)\leqslant g(x)\leqslant \frac{1}{2x}.$$
3. En déduire $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(g(x))$.
4. Déterminer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
5. Démontrer que g admet un développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0.
6. Étudier la parité de g et montrer que : $g(x)\underset{0}{=}x-\dfrac{7}{6}x^3-\dfrac{31}{40}x^5+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.
7. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
8. Déterminer la position relative de la courbe g et de sa tangente au point d'abscisse 0 et enfin tracer la courbe Γ.

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Qu'appelle-t-on polynôme irréductible ? Citez un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais non irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1

Pour tout λ réel positif, on pose $P_\lambda : x \mapsto x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrer que, pour tout λ réel positif, P_λ a une unique racine réelle, on la note $u(\lambda)$.
2. Montrer que u est monotone et continue te calculer ses limites.

Exercice 2

Des observations en laboratoire ont montré que l'évolution d'une population de paramécies en milieu nutritif satisfait à l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y \text{ (d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } \mathbb{R}_+)$$

où r et K sont deux réels strictement positifs et $y(0)$ est connue et strictement positif. On admet que les solutions non constantes de (E) sur $[0, +\infty[$ ne prennent jamais la valeur d'un équilibre sur $[0, +\infty[$. Soit φ une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ non constante et telle que $\varphi(0) > K$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) > K$.
2. Trouver deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, K\}, \ \frac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-K}$$
et en déduire une primitive F de $x \mapsto \dfrac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)}$ sur $]K, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) - K} = e^{r(t+C)}$$
4. Expliciter φ puis étudier ses variations sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 4 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir la notion de racine d'un polynôme et préciser ce qu'on peut dire en terme de divisibilité.

Exercice 1

Pour tout réel x strictement positif différent de 1, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Donner les variations de f.
2. Déduire du calcul de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt$ (avec x réel strictement positif différent de 1) un encadrement de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

1. Étudier f ainsi que ses branches infinies.
2. Montrer que f est bijective et donner l'expression de f^{-1}.
3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans le même repère.