BCPST2 **Sujet 1** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Définir le degré d'un polynôme à coefficients réels ou complexes.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto (\cos(x))^{1+\sin(x)}$.

Exercice 2

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant cette approximation en chaque point :

$$\text{en tout point } a,\quad \varphi(a+h)\simeq\varphi(a)+h\varphi'(a),\qquad \text{lorsque } h \text{ est petit (positif ou négatif).}$$

Soit $I=]1,+\infty[$, on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t\in I,\quad -t^2y'(t)+ty(t)=(y(t))^2((\text{d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } I).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. Montrer que $f : t\mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E).
2. Question si tu es en 5/2 : L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
3. Représenter en Python la fonction f sur $[2,4]$ puis, après avoir brillamment expliqué par la méthode d'Euler, sous réserve d'existence d'une solution y à (E), utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de y.
4. Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire (E') :
$$t^2z'(t)+tz(t)=1 \text{ inconnue } z \text{ fonction dérivable sur } I$$
5. Soit $y\in\mathcal{S}_1$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I. Montrer que $t\mapsto\dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E'). En déduire l'expression de y.
6. A-t-on $\mathcal{S}_1=\mathcal{S}$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?

Exercice 1

On considère $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Montrer que, si x est un réel strictement positif différent de 1, alors $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$.

Exercice 2

Soit G la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t}{t^4+t^2+1} dt.$$

1. Donner les variations de G.
2. Soit x un réel non nul. Exprimer $G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $G\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Indication : On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire les limites de G aux bornes de son ensemble de définition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Somme et produit des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)} \right)$ puis $\lim\limits_{x \to 0} \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2+x^3}} \right)$ puis calculer de trois façons différentes le développement limité d'ordre 5 de tan en 0.

Exercice 2

On propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit y une solution de (E). On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t) \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$.

1. Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour x réel strictement positif.
2. En déduire que la fonction z vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation (E') d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre (E).

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, que vaut la dérivée k-ième du polynôme X^n ?

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$ puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto (\cos(x))^{1+\sin(x)}$.

Exercice 2

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant cette approximation en chaque point :

$$\text{en tout point } a, \quad \varphi(a+h) \simeq \varphi(a) + h\varphi'(a), \qquad \text{lorsque } h \text{ est petit (positif ou négatif).}$$

Soit $I =]1, +\infty[$, on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I, \quad -t^2 y'(t) + ty(t) = (y(t))^2 ((\text{d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } I).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E).
2. Question si tu es en 5/2 : L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
3. Représenter en Python la fonction f sur $[2, 4]$ puis, après avoir brillamment expliqué par la méthode d'Euler, sous réserve d'existence d'une solution y à (E), utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de y.
4. Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire (E') :

$$t^2 z'(t) + tz(t) = 1 \text{ inconnue } z \text{ fonction dérivable sur } I$$

5. Soit $y \in \mathcal{S}_1$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E'). En déduire l'expression de y.
6. A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 1

On considère $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Montrer que, si x est un réel strictement positif différent de 1, alors $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$.

Exercice 2

Soit G la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt.$$

1. Donner les variations de G.
2. Soit x un réel non nul. Exprimer $G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $G\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Indication : On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire les limites de G aux bornes de son ensemble de définition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Citer la proposition sur degré des polynômes et opérations.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to0}\left(\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}}\right)$ puis calculer de trois façons différentes le développement limité d'ordre 5 de tan en 0.

Exercice 2

On propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \dfrac{1}{2x^2}y = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit y une solution de (E). On pose, pour $t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t)\exp\left(-\dfrac{t}{2}\right)$.

1. Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour x réel strictement positif.
2. En déduire que la fonction z vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation (E') d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre (E).

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, que vaut la dérivée k-ième du polynôme X^n ?

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ puis donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto (\cos(x))^{1+\sin(x)}$.

Exercice 2

Rappel : la méthode d'EULER permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant cette approximation en chaque point :

$$\text{en tout point } a, \quad \varphi(a+h) \simeq \varphi(a) + h\varphi'(a), \qquad \text{lorsque } h \text{ est petit (positif ou négatif).}$$

Soit $I =]1, +\infty[$, on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I, \quad -t^2y'(t) + ty(t) = (y(t))^2((\text{d'inconnue } y \text{ fonction dérivable sur } I).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

1. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E).
2. Question si tu es en 5/2 : L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
3. Représenter en Python la fonction f sur $[2, 4]$ puis, après avoir brillamment expliqué par la méthode d'Euler, sous réserve d'existence d'une solution y à (E), utiliser la méthode d'EULER pour représenter en Python un tracé approximatif de y.
4. Déterminer les solutions de l'équation différentielle linéaire (E') :
$$t^2z'(t) + tz(t) = 1 \text{ inconnue } z \text{ fonction dérivable sur } I$$
5. Soit $y \in \mathcal{S}_1$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E'). En déduire l'expression de y.
6. A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques

Mini mini question de cours

Citer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 1

On considère $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Montrer que, si x est un réel strictement positif différent de 1, alors $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$.

Exercice 2

Soit G la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t}{t^4+t^2+1}dt.$$

1. Donner les variations de G.
2. Soit x un réel non nul. Exprimer $G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $G\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Indication : On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire les limites de G aux bornes de son ensemble de définition.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: Ton super prof!

Semaine de colle: 3 https://cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini mini question de cours

Citer la proposition sur degré des polynômes et opérations.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}\right)$ puis $\lim_{x\to0}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2+x^3}}\right)$ puis calculer de trois façons différentes le développement limité d'ordre 5 de tan en 0.

Exercice 2

On propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit y une solution de (E). On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)\exp\left(-\frac{t}{2}\right)$.

1. Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour x réel strictement positif.
2. En déduire que la fonction z vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation (E') d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre (E).