MP **Sujet 1**
Semaine de colle: 3

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Convergence de la série $\sum \frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^{\beta}}$ avec β un réel.

Exercice 1

1. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ en sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

1. Ecrire en `Python` une fonction qui renvoie les N premières valeurs de la suite (u_n), puis donner les instructions permettant de représenter graphiquement les 100 premières valeurs de (u_n).
2. Donner les variations de la suite (u_n).
3. Donner un majorant de $(\ln(u_n))$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
5. Justifier que la suite $(\ln(u_n))$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
6. Montrer que, pour tout $n \in$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
7. En déduire que : $\forall n \in,\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$.
8. Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

MP **Sujet 2**
Semaine de colle: 3

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{n\alpha-1}$ si $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 1

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

MP **Sujet 3**
Semaine de colle: 3

Corrigé dès mercredi sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 1

Soit j un entier naturel. On appelle $\varphi(j)$ le plus petit entier naturel non nul p tel que $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \geqslant j$.

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Démontrer que $\lim_{j\longrightarrow+\infty} (\varphi(j)) = +\infty$.
3. Démontrer que $\lim_{j\longrightarrow+\infty} \left(\frac{\varphi(j+1)}{\varphi(j)}\right) = e$.

Exercice 2

1. Montrer que $\sum_{k\geqslant 1} \sin(k)$ est bornée.
2. En déduire que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(k)}{k}$ converge.