Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées
Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

La convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ s'obtient entre autre par le critère d'Alembert puisque

$$\left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$$

On peut alors majorer le reste de la série en prenant appui sur une somme géométrique

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\frac{1}{1-1/n+1} = \frac{1}{n.n!}$$

Notons que raisonner par récurrence ne marche pas.

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j\right\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.
b) Par définition de Φ_j, on a

$$j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln \Phi_j$$

On en déduit $\Phi_j \geqslant \mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.
c) Par définition de Φ_j, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} \leqslant j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, sachant que $\Phi_j \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leqslant j \leqslant \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = \mathrm{e}^{j-\gamma+o(1)}$$

$\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

Par l'inégalité

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

on peut affirmer

$$|ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2 + f'^2\right)$$

et assurer que la fonction ff' est intégrable sur $[0, +\infty[$. Or

$$\int_0^x ff'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2$$

donc f^2 converge quand $x \to +\infty$. Puisque la fonction f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$ et converge en $+\infty$, sa limite est nécessairement nulle et donc $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A \in [0, +\infty[$ tel que

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'une part, par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\left| \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sqrt{\int_A^x 1\,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon \sqrt{x}$$

D'autre part, pour x assez grand

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \frac{C^{te}}{\sqrt{x}} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour x assez grand

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant 2\varepsilon$$

a) On a
$$\Sigma_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{tk}\right) = \operatorname{Im}\left(e^t \frac{1-e^{tn}}{1-e^t}\right)$$
donc
$$|\Sigma_n| \leqslant \left|e^t \frac{1-e^{tn}}{1-e^t}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^t|}$$
et la suite $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est effectivement bornée.
b) On a
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$
donc
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$
Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées.
Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

Posons

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

On observe

$$u_n = 2H_n - H_{n^2} = 2(\ln n + \gamma + o(1)) - \ln(n^2) - \gamma + o(1) \to \gamma$$

Q 1)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Q 2)

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

On a

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln(2k+1) - \ln(2k+1) = 0$$

et

$$\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) + o(1) \to 0$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

On a

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln n\right)$$

donc

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n-1)-\ln n\right) + \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n+1)-\ln n\right)$$

Après télescopage

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{N+1}{N} - \ln 2 \to -\ln 2$$

On en déduit que la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

Par comparaison série intégral,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$

donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$

Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha \leqslant 0$.